1　ガンマ関数とディガンマ関数

1･1　ガンマ関数

　ガンマ関数は階乗を連続化したものであり、これにより、例えば $(1/2)!$ などの定義および計算が可能になる。

1･1･1　ガウスの表示式（パイ関数）

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \tag{1.1}$$

導出

　$(z-1)!$ を次のように変形する。

$$(z-1)! = \frac{z!}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdots z\cdot(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+z)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = \frac{n!\,n^z \dfrac{(n+1)}{n}\dfrac{(n+2)}{n}\cdots\dfrac{(n+z)}{n}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

　自然数 n は任意でよいから、$n\to\infty$ とすれば、

$$\frac{n+1}{n}\to1\,,\ \frac{n+2}{n}\to1\ ,\cdots,\ \frac{n+z}{n}\to1$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z \dfrac{(n+1)}{n}\dfrac{(n+2)}{n}\cdots\dfrac{(n+z)}{n}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

となる。最早 z は $0, -1, -2, \cdots$ 以外なら何でもよいから、$(z-1)!$ を関数 $\Gamma(z)$ に置き換えて与式を得る。

1･1･2　オイラーの表示式

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\} \tag{2.1}$$

導出

　(1.1)をさらに次のように変形する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\ \frac{n}{n-1}\right)^z$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\ \frac{n+1}{n}\right)^z \qquad \because\ \frac{n+1}{n}\to 1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\cdot\frac{\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^{z}}{\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}$$

1･1･3 積分表示

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt \qquad Re(z)>0 \tag{3.1}$$

証明

$$\Gamma_n(z)=\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}\,dt \tag{3.2}$$

とすれば、 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}=e^{-t}$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt \tag{3.3}$$

また、(3.2) において、$t=ns$ とおけば、$t:0\sim n\rightarrow s:0\sim 1,\ dt=nds$ であるから、

$$\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}\,dt=\int_0^{1}(1-s)^{n}n^{z-1}s^{z-1}n\,ds=n^{z}\int_0^{1}(1-s)^{n}s^{z-1}\,ds$$

$$=n^{z}\left[\frac{s^{z}}{z}(1-s)^{n}\right]_0^1+\frac{n^{z}\cdot n}{z}\int_0^{1}(1-s)^{n-1}s^{z}\,ds$$

$$=\frac{n^{z}\cdot n}{z}\left[\frac{s^{z+1}}{z+1}(1-s)^{n-1}\right]_0^1+\frac{n^{z}\cdot n(n-1)}{z(z+1)}\int_0^{1}(1-s)^{n-2}s^{z+1}\,ds$$

$$\vdots$$

$$=\frac{n^{z}\cdot n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}\int_0^{1}s^{z+n-1}\,ds=\frac{n^{z}\cdot n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

故に

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \tag{3.4}$$

かくして、(1.1),(3.3),(3.4) より次式を得る。

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt \qquad Re(z)>0$$

1･1･4 ワイエルシュトラウスの表示式

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{4.1}$$

導出

ガウスの表示式(1.1) の逆数をとれば、

$$\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n^z\cdot n!}=\frac{1}{n^z}\cdot z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$=\frac{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z}}{e^{(\log n)z}}\cdot z\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

$$=e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z}\cdot z\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z}\cdot z\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

$$=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\qquad \text{但し}\quad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

1・1・5 ガンマ関数の性質(その1)

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\tag{5.1}$$

$$\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)\tag{5.1'}$$

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1\tag{5.2}$$

$$\Gamma(n+1)=n!\qquad (n\text{ は非負の整数})\tag{5.3}$$

$$\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}=z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)\qquad (n\text{ は自然数})\tag{5.4}$$

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)}=(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\qquad (n\text{ は自然数})\tag{5.4'}$$

$$\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z-n)}=(-1)^{-n}\frac{\Gamma(1+z+n)}{\Gamma(1+z)}\qquad (n\text{ は非負の整数})\tag{5.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z}=1\tag{5.6}$$

証明

ガウスの表示式(1.1)より、

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^{z+1}z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)\cdot n!\,n^z}\right\}=\lim_{n\to\infty}z\cdot\frac{n}{z+n+1}=z$$

よって(5.1)を得る。そして符号を変えれば(5.1')を得る。

次に、

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-\frac{1}{k}}=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot e^{-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdots e^{-\frac{n+1}{n}}$$

$$= \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} = \frac{(n+1)}{n}\cdot e^{Log\,n}\cdot e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{(n+1)}{n}\cdot e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-Log\,n\right)}$$

$$\therefore\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-\frac{1}{k}} = e^{-\gamma}$$

これをワイエルシュトラウスの表示式(4.1)に代入すれば、

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = e^{\gamma\cdot 1}\,1\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} = e^{\gamma}\cdot e^{-\gamma} = 1$$

よって $\Gamma(1)=1$ 、そして (5.1) より $\Gamma(2)=1\times\Gamma(1)=1$ 、すなわち、(5.2)を得る。

(5.1) に正の整数 n を逐次代入すれば、

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots \qquad = n!\,\Gamma(1) = n!$$

すなわち、(5.3) を得る。$\Gamma(1)=0!$ と規約すれば(5.3) は $n=0$ についても成立する。

また、(5.1)より、

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z,\quad \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z+1)} = z+1,\ \cdots\ \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z+n-1)} = z+n-1$$

これらを辺々掛け合わせると

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}\cdot\frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z+1)}\cdot\ \cdots\ \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z+n-1)} = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)$$

よって (5.4) を得る。そして (5.4) において z を $z-n$ に置き換えれば (5.4') を得る。

この (5.4') において z を $-z$ に置き換えれば

$$\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z-n)} = (-z-1)(-z-2)\cdots(-z-n)$$

$$= (-1)^{-n}(z+1)(z+2)\cdots(z+n) = (-1)^{-n}\frac{\Gamma(1+z+n)}{\Gamma(1+z)}$$

となり (5.5) を得る。この式は $n=0$ についても成立する。またこの式は明らかに z が正整数のときも成立し、よって後述(1･3)の特異点公式の内容を一部含んでいる。

(5.4)より、

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)\Gamma(z)$$

$$= z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)\cdot\Gamma(z)\cdot\frac{1}{(z+n)}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^{z}} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)\cdot\Gamma(z)}{(n-1)!\,n^{z}(z+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}{n!\,n^{z}}\cdot\frac{n}{z+n}\cdot\Gamma(z)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(z)}\cdot 1\cdot\Gamma(z) = 1$$

これに $(n-1)! = \Gamma(n)$ を代入すれば(5.6)を得る。

1・1・6　ガンマ関数の性質(その2)

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3^n}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)=\frac{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)=\frac{3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}{4^n}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z},\qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z},\qquad \Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z}$$

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(3z)=\frac{3^{3z-1/2}}{2\pi}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right)$$

証明　省略。

1・1・7　対数関数とガンマ関数

$$\int_x^{x+1}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}dz=\log x \tag{7.1}$$

$$\int_1^{n+1}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}dz=\log(n!) \tag{7.2}$$

導出

そのまま素直に対数積分すれば、

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}dz&=\left[\log\Gamma(z)\right]_x^{x+1}=\log\Gamma(x+1)-\log\Gamma(x)\\&=\log\{x\Gamma(x)\}-\log\Gamma(x)=\log x+\log\Gamma(x)-\log\Gamma(x)\\&=\log x\end{aligned}$$

また、

$$\int_1^{n+1}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}dz=\left[\log\Gamma(z)\right]_1^{n+1}=\log\Gamma(n+1)-\log\Gamma(1)$$

$$= log(n!) - log 1$$
$$= log(n!)$$

1・1・8 ガンマ関数の2次微分

$$\frac{\Gamma''(z)}{\Gamma(z)} = \left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}' + \left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2} + \left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}^2 \qquad (8.1)$$

導出

$$\left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}' = \frac{\Gamma''(z)\Gamma(z) - \Gamma'(z)^2}{\Gamma(z)^2} = \frac{\Gamma''(z)}{\Gamma(z)} - \left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}^2$$

より、

$$\frac{\Gamma''(z)}{\Gamma(z)} = \left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}' + \left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}^2$$

一方、次節の (2.8) (トリガンマ関数)より、

$$\left\{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right\}' = \frac{d}{dz}\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

よって(8.1)を得る。

1・1・9 ガンマ関数の特殊値

ガンマ関数の性質(1・1・5 、1・1・6)より次の特殊値が得られる。これらは頻繁に使用されるのでここに掲載する。

(1) その1

$$\Gamma(0) = \infty$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1!!}{2^0}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1!!}{2^1}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7!!}{2^4}\sqrt{\pi} = \frac{105}{16}\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9!!}{2^5}\sqrt{\pi} = \frac{945}{32}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.678938\cdots \quad , \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.354118\cdots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.625600\cdots \quad , \quad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.225417\cdots$$

(2) その2

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2^1}{1!!}\sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2^2}{3!!}\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{2^3}{5!!}\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi} \quad , \qquad \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{2^4}{7!!}\sqrt{\pi} = \frac{16}{105}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{2^5}{9!!}\sqrt{\pi} = -\frac{32}{945}\sqrt{\pi} \quad , \qquad \Gamma\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{2^6}{11!!}\sqrt{\pi}$$

1･2 ディガンマ関数

1･2･1 ディガンマ関数の定義

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の対数の1階導関数をディガンマ関数と呼び、次式で定義する。

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{1.0}$$

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt \qquad \text{（積分表示）} \tag{1.0'}$$

なお、2階以上の導関数はトリガンマ、テトラガンマ、ペンタガンマ、… と呼ばれ、一般に n 階の導関数はポリガンマ関数と呼ばれる。

ディガンマ関数を含めて、これらは $\psi^{(0)}(z),\psi^{(1)}(z),\psi^{(2)}(z),\ \cdots\ ,\psi^{(n)}(z)$ のように表示され、プサイ関数と総称される。

1･2･2 ディガンマ関数の性質

$$\psi(z) = -\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\log n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+z}\right) \tag{2.1}$$

$$\psi(1)= -\gamma\ , \qquad \psi(2) = 1-\gamma \tag{2.2}$$

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right) \tag{2.3}$$

$$\psi(z+n) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}\ ,\quad \psi(z-n) = \psi(z) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-k} \tag{2.4}$$

$$\psi(1+n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{2.5}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 \tag{2.6}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\pm n\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} \tag{2.7}$$

$$\psi^{(1)}(z) = \frac{d}{dz}\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} \qquad \text{（トリガンマ関数）} \tag{2.8}$$

但し $\gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310 42\cdots$

証明

前節の ワイエルシュトラウスの表示式（逆数）

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z}\cdot z^{-1}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+z}\cdot e^{\frac{z}{n}}\right)$$

を z で対数微分すると、

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\gamma e^{-rz}}{e^{-\gamma z}} - \frac{z^{-2}}{z^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}e^{z/n}}{e^{z/n}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n/(n+z)^2}{n/(n+z)}$$

$$= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$$

よって(2.1)の前半を得る。また、

$$-\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+z}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+z}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+z}\right)$$

よって (2.1) の後半を得る。

そして、(2.1)の前半に $z=1,\ z=2$ をそれぞれ代入すれば、

$$\psi(1) = -\gamma - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = -\gamma$$

$$\psi(2) = -\gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= 1 - \gamma - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 - \gamma$$

よって (2.2) を得る。

前節の (5.1)式 $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ の両辺を z で微分すれば、

$$\Gamma'(z+1) = z\,\Gamma'(z) + \Gamma(z)$$

これを $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ で辺々割れば

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z}, \qquad \text{i.e.} \qquad \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

かくして (2.3) の前半が得られ、これに (2.1) を代入すれば、(2.3) の後半を得る。

次にこれに $z+1, z+2, \cdots, z+n-1$ 及び $z, z-1, \cdots, z-n$ を順次代入すれば、

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}, \qquad \psi(z) - \psi(z-1) = \frac{1}{z-1}$$

$$\psi(z+2) - \psi(z+1) = \frac{1}{z+1}, \qquad \psi(z-1) - \psi(z-2) = \frac{1}{z-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\psi(z+n) - \psi(z+n-1) = \frac{1}{z+n-1}, \qquad \psi(z-n+1) - \psi(z-n) = \frac{1}{z-n}$$

これらを辺々加え合わせれば

$$\psi(z+n) - \psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}, \qquad \psi(z) - \psi(z-n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-k}$$

よって、(2.4) を得る。

この(2.4)の前半に $z=1$ を代入すれば

$$\psi(1+n) = \psi(1) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k} = -\gamma + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

よって (2.5) を得る。

(2.1) に $z=\dfrac{1}{2}$ を代入すれば、

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$$

$$=-\gamma-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=-\gamma-2\log 2$$

よって (2.6) を得る。

(2.1) に $z=\dfrac{1}{2}\pm n$ を代入すれば、

$$\psi\left(\frac{1}{2}+n\right)=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+\frac{1}{2}+n}$$

$$=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1+2n}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}$$

$$=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}$$

$$=-\gamma-2\log 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}-n\right)=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+\frac{1}{2}-n}=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1-2n}$$

$$=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1-2n}-2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2k+1-2n}$$

$$=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$$

$$=-\gamma-2\log 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

よって (2.7) を得る。

最後に、

$$\frac{d}{dz}\psi(z)=\frac{d}{dz}\left\{-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}$$

よって (2.8) を得る。

1･2･3 ディガンマ関数の特殊値

ディガンマ関数の性質 (1･2･2) より次の特殊値が得られる。

(1) その1

$$\psi(0)=-\infty$$

$$\psi(1) = -\gamma \quad , \quad \psi(2) = -\gamma + 1$$

$$\psi(3) = -\gamma + \frac{3}{2} \quad , \quad \psi(4) = -\gamma + \frac{11}{6}$$

$$\psi(5) = -\gamma + \frac{5}{4} \quad , \quad \psi(6) = -\gamma + \frac{29}{20}$$

$$\psi(7) = -\gamma + \frac{97}{60} \quad , \quad \psi(8) = -\gamma + \frac{739}{420}$$

(2) その2

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2$$

$$\psi\left(\frac{3}{2}\right) = \psi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2$$

$$\psi\left(\frac{5}{2}\right) = \psi\left(-\frac{3}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\times\frac{4}{3}$$

$$\psi\left(\frac{7}{2}\right) = \psi\left(-\frac{5}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\times\frac{23}{15}$$

$$\psi\left(\frac{9}{2}\right) = \psi\left(-\frac{7}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\times\frac{176}{105}$$

$$\psi\left(\frac{11}{2}\right) = \psi\left(-\frac{9}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\times\frac{563}{315}$$

$$\psi\left(\frac{13}{2}\right) = \psi\left(-\frac{11}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\times\frac{6508}{3465}$$

1·3 特異点公式

公式 1·3·1 (特異点公式)

$\Gamma(z)$, $\psi(z)$, $\psi_m(z)$ をそれぞれガンマ関数、ディガンマ関数、ポリガンマ関数とするとき、$n=0,1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-n)} = (-1)^n\Gamma(1+n) = (-1)^n n! \tag{1.1}$$

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m)} = (-1)^{m-n}\frac{m!}{n!} \qquad (m=0,1,2,3,\cdots) \tag{1.2}$$

$$\frac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)} = (-1)^{n+1}n! \tag{1.3}$$

$$\frac{\psi(-n)}{\psi\{-(n+1)\}} = 1 \tag{1.4}$$

$$\frac{\psi_m(-n)}{\psi_m\{-(n+1)\}} = 1 \qquad \left(\psi_m(z)=\frac{d^m}{dz^m}\psi(z)\right) \tag{1.5}$$

証明

ガウスの表示式(1·1·1)より、

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z+1}\,z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!\,n^z\,(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}$$

とすれば、$z=-1,-2\cdots$ のときこれは不定形となり、値は定まらない。

今、$z\ne-1, \ne-2, \cdots$ と仮定すれば、$z+1, z+2, \cdots, z+n$ は全て非ゼロになる。

すると $z+1, z+2, \cdots, z+n$ で分母子を除すことができ、

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{z}{\frac{z}{n}+1+\frac{1}{n}} = z$$

ここで、$z=0$ を代入すれば

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} = 0$$

次に、$z\ne-1$ と仮定しているから、$z=-1$ は代入できない。

そこで $z\to -1$ とすれば

$$\lim_{z\to-1}\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-1)} = -1$$

同様に $z\to -2,-3,\cdots, -k, \cdots$ とすれば、それぞれ

$$\frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-2)} = -2,\ \frac{\Gamma(-2)}{\Gamma(-3)} = -3,\ \cdots,\ \frac{\Gamma(-k+1)}{\Gamma(-k)} = -k,\ \cdots$$

これらを k 項まで乗じれば

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-k)} = \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-1)}\frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-2)}\cdots\frac{\Gamma(-k+1)}{\Gamma(-k)} = (-1)^k k! = (-1)^k\Gamma(1+k)$$

かくて k を n に置き換えれば (1.1) を得る。

これを用いて、

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m)}=\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(0)}\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-m)}=\frac{(-1)^m m!}{(-1)^n n!}=(-1)^{m-n}\frac{m!}{n!}$$

よって (1.2) を得る。この式も $m=0,\ n=0$ について成立する。

次に

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\ n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

$$\psi(z)=\frac{d\,log\Gamma(z)}{dz}=\lim_{n\to\infty}\left\{log\,n-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\cdots+\frac{1}{z+n}\right)\right\}$$

より

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{log\,n-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\cdots+\frac{1}{z+n}\right)}{\dfrac{n!\ n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}}$$

$z\neq0$ と仮定し、この分母子に $z+k\ \ (k=0,1,2,\cdots)$ を乗じれば

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(z+k)log\,n-\left(\frac{z+k}{z}+\frac{z+k}{z+1}+\cdots+\frac{z+k}{z+k-1}+1+\frac{z+k}{z+k+1}+\cdots+\frac{z+k}{z+n}\right)}{\dfrac{n!\ n^z}{z(z+1)\cdots(z+k-1)\cdot1\cdot(z+k+1)\cdots(z+n)}}$$

ここで $z\to-k\ \ (k=0,1,2,\cdots)$ とすれば

$$\frac{\psi(-k)}{\Gamma(-k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{0\cdot log\,n-\left(\frac{0}{-k}+\frac{0}{-k+1}+\cdots+\frac{0}{-1}+1+\frac{0}{1}+\cdots+\frac{0}{n}\right)}{\dfrac{n!\ n^{-k}}{(-k)\cdots(-2)(-1)\cdot1\cdot\{1\cdot2\cdots(n-k)\}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{(-k)\cdots(-2)(-1)\cdot1\cdot\{1\cdot2\cdots(n-k)\}}{n!\ n^{-k}}$$

となる。これをさらに細かく計算すると

$z\to-k\ \ (k=0)$ のとき、

$$\frac{\psi(-k)}{\Gamma(-k)}=\lim_{n\to\infty}-\frac{n^0 n!}{n!}=1$$

となり、$z\to-k\ \ (k=1,2,3,\ \cdots)$ のとき

$$\frac{\psi(-k)}{\Gamma(-k)}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{k+1}k!\cdot\frac{n^k}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-k+k)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^{k+1}k!\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}+\frac{k}{n}\right)}$$

$$=(-1)^{k+1}k!$$

となることが判る。そこで k を n に置き換えれば (1.3) を得る。

次に (1.2),(1.3) を用いて

$$\frac{\psi(-n)}{\psi\{-(n+1)\}} = \frac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)}\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma\{-(n+1)\}}\frac{\Gamma\{-(n+1)\}}{\psi\{-(n+1)\}}$$

$$= (-1)^{n+1}n!\{-(n+1)\}\frac{1}{(-1)^{n+2}(n+1)!} = 1$$

かくして (1.4) を得る。

最後に、

$$\psi_m(z) = (-1)^{m+1}m!\left\{\frac{1}{z^{m+1}}+\frac{1}{(z+1)^{m+1}}+\frac{1}{(z+2)^{m+1}}+\cdots\right\}$$

より

$$\frac{\psi_m\{-(z+1)\}}{\psi_m(-z)} = \frac{\dfrac{1}{(-z-1)^{m+1}}+\dfrac{1}{(-z)^{m+1}}+\dfrac{1}{(-z+1)^{m+1}}+\dfrac{1}{(-z+2)^{m+1}}+\cdots}{\dfrac{1}{(-z)^{m+1}}+\dfrac{1}{(-z+1)^{m+1}}+\dfrac{1}{(-z+2)^{m+1}}+\cdots}$$

$z\neq 0$ とすれば分母も非ゼロかつ正となるから

$$\frac{\psi_m\{-(z+1)\}}{\psi_m(-z)} = 1+\frac{\dfrac{1}{(-z-1)^{m+1}}}{\dfrac{1}{(-z)^{m+1}}+\dfrac{1}{(-z+1)^{m+1}}+\cdots+\dfrac{1}{(-z+n)^{m+1}}+\cdots}$$

ここで $z\to n$ とすれば、$\dfrac{1}{(-z+n)^{m+1}}\to\infty$ となり、$\dfrac{1}{(-z+n+1)^{m+1}}$ より後ろの項の総和は有限値に収束するから $(\because\ m>0)$ 、結局右辺第2項は0に収束する。よって、

$$\frac{\psi_m\{-(n+1)\}}{\psi_m(-n)} = \lim_{z\to n}\frac{\psi_m\{-(z+1)\}}{\psi_m(-z)} = 1$$

となり、(1.5) が証明された。

例

実際に数式ソフトで計算した結果は次のとおり。

```
f[z_] := Gamma[z + 1] / Gamma[z]                  Limit [f [z], z → -2]   -2

g[z_] := PolyGamma[z] / Gamma[z]                  Limit [g [z], z → -3]    6

h[z_] := PolyGamma[3, z] / PolyGamma[3, z - 1]    Limit [h [z], z → -4]    1
```

cf.

$$\frac{\psi(n)}{\Gamma(n)} = \frac{H_{n-1}-\gamma}{(n-1)!} \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad \left(H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

1・2・2 及び 1・1・5 より

$$\psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma = H_n - \gamma \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!$$

両者の比を取り、$n+1$ を n に置換して与式を得る。

この公式の意義

$z = 0, -1, -2 \cdots$ は $\Gamma(z), \psi(z)$ の特異点(1位の極)でありその値は ±∞ である。ところがこれらの点における $\Gamma(z)$ や $\psi(z)$ の任意の比をとると、これらは除去可能な特異点になり、しかもそれらの比は全て整数又は整数の逆数になる。上記公式 (1.1)〜(1.4) はこのことを主張しているのである。

例えば、

$$\frac{\Gamma(-3)}{\Gamma(-7)} = \frac{\Gamma(-3)}{\Gamma(0)} \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-7)} = \frac{-7!}{-3!} = 840$$

$$\frac{\Gamma(-3)}{\psi(-7)} = \frac{\Gamma(-3)}{\Gamma(-7)} \frac{\Gamma(-7)}{\psi(-7)} = \frac{-7!}{-3!} \frac{1}{(-1)^8 7!} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\psi(-8)}{\Gamma(-5)} = \frac{\psi(-8)}{\Gamma(-8)} \frac{\Gamma(-8)}{\Gamma(-5)} = (-1)^9 8! \frac{-5!}{8!} = 120$$

これらはガンマ関数とディガンマ関数に固有の現象であり、トリガンマ関数以上のポリガンマ関数においては生じない。例えば、トリガンマとディガンマの比 $\psi_1(z)/\psi_0(z)$ をとれば、$z=0, -1, -2, -3, \cdots$ はこの関数(比)の1位の極になり、一般に $\psi_m(z)/\psi_n(z)$ $(m>n)$ をとれば $z=0, -1, -2, -3, \cdots$ はこの関数(比)の $(m-n)$ 位の極になる。トリガンマ関数以上は正に次元が違うのである。

トリガンマ関数以上のポリガンマ関数において言い得ることは、同次数のポリガンマ関数の比は $z=0, -1, -2, -3, \cdots$ において全て1になること((1.5)式)のみである。

ガンマ関数やディガンマ関数の特異点同士の比が有理数になると言うこの性質は、ベキ関数や対数関数の超微積分(非整数階微積分)に不可欠となる。

2008.12.19
2024.03.11 Added cf. to Sec.3 .

河野 和
広島市

宇宙人の数学