2 多重階乗

2・1 2重階乗

2・1・1 2重階乗の定義

定義2・1・1

m, n を自然数とするとき、

$$m!! \equiv n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot \cdots \cdot 5\cdot 3\cdot 1 \qquad m=2n-1 \tag{1^1}$$

$$\equiv n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot \cdots \cdot 6\cdot 4\cdot 2 \qquad m=2n \tag{1^0}$$

$$\equiv 1 \qquad m=0,\ -1 \tag{1^-}$$

例

$$2!! = 2,\quad 4!! = 2\cdot 4,\quad 6!! = 2\cdot 4\cdot 6,\ \cdots$$

$$1!! = 1,\quad 3!! = 1\cdot 3,\quad 5!! = 1\cdot 3\cdot 5,\ \cdots$$

$$0!! = (-1)!! = 1$$

2・1・2 2重階乗の基本公式

公式2・1・2

n を自然数、 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, π を円周率 とするとき、

$$n! = n!!\cdot(n-1)!! \tag{2}$$

$$(2n-1)!! = 2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) / \sqrt{\pi} \tag{3^1}$$

$$(2n)!! = 2^n\Gamma\left(n+\frac{2}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) = 2^n\Gamma(n+1) = 2^n n! \tag{3^0}$$

$$(-2n)!! = \infty, \qquad 0!! = 1 \tag{4}$$

$$\{-(2n+1)\}!! = (-1)^{-n}\frac{2}{(2n-1)!!}, \qquad (-1)!! = 1 \tag{5}$$

証明

先ず、$(1^1)\times(1^0)$ とすれば、

$$(2n)!!\cdot(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot \cdots \cdot 5\cdot 3\cdot 1$$
$$\times\ 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot \cdots \cdot 6\cdot 4\cdot 2 = (2n)!$$

2n を n に置き換えて (2) を得る。

次に、$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ であるから、

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad (2n-1)!!=2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi} \qquad (3^1)$$

同様の方法で (3^0) を得る。

(3^0) に $n=0$ を代入すれば、

$$0!!=2^0\Gamma(1)=1$$

n を $-n$ に置換すれば、

$$(-2n)!!=\Gamma(1-n)2^{-n}=\infty \qquad (+\text{から接近})$$

次に、(2)と(3^0) より、

$$(2n-1)!!=\frac{(2n)!}{(2n)!!}=\frac{\Gamma(1+2n)}{2^n\Gamma(1+n)}$$

$n=0$ を代入すれば、

$$(-1)!!=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)2^0}=\frac{0!}{0!\cdot 1}=1$$

これは $0!!=1$ と相俟って定義 (1^-) の正当性を保証する。

最後に、n を $-n$ に置換すれば、

$$\{-(2n+1)\}!!=\frac{\Gamma(1-2n)}{2^{-n}\Gamma(1-n)}=\frac{2^n\Gamma\{-(2n\,1)\}}{\Gamma\{-(n-1)\}}$$

$$=(-1)^{(n-1)-(2n-1)}\frac{(n-1)!\,2^n}{(2n-1)!}=(-1)^{-n}\frac{(n-1)!\,2^n}{(2n-1)!}$$

$$=(-1)^{-n}\frac{2n(n-1)!\,2^n}{(2n)!}=(-1)^{-n}\frac{2\,n!\,2^n}{(2n)!}$$

$$=(-1)^{-n}\frac{2}{(2n-1)!!} \qquad \left(\because\ \frac{(2n)!}{2^n n!}=(2n-1)!!\right)$$

例1

$$13!!=(2\cdot 7-1)!!=2^7\Gamma\left(7+\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^7\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}$$

$$=128\times 1871.25430543/1.77245385=135135.0000$$

例2

$$(-3)!!=(-1)^1\frac{2}{1!!}=-2,\qquad (-5)!!=(-1)^2\frac{2}{3!!}=\frac{2}{3}$$

2・1・3　マクローリン展開の2重階乗表現（公式）

公式2・1・3

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(0)}{0!!}x^0+\frac{f'(0)}{2!!}x^1+\frac{f''(0)}{4!!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6!!}x^3+\cdots \tag{6}$$

導出

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots\\&=\frac{f(0)}{2^0\cdot 0!}2x^0+\frac{f'(0)}{2^1\cdot 1!}2^1x^1+\frac{f''(0)}{2^2\cdot 2!}2^2x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{2^3\cdot 3!}2^3x^3+\cdots\\&=\frac{f(0)}{0!!}(2x)^0+\frac{f'(0)}{2!!}(2x)^1+\frac{f''(0)}{4!!}(2x)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6!!}(2x)^3+\cdots\end{aligned}$$

x を $x/2$ に置き換えると、

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(0)}{0!!}x^0+\frac{f'(0)}{2!!}x^1+\frac{f''(0)}{4!!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6!!}x^3+\cdots$$

を得る。

2・1・4　初等関数の2重階乗展開

2・1・3 を初等関数に適用することにより以下の諸式を得る。

（1）　指数関数の2重階乗展開

$$e^{\pm\frac{x}{2}}=\frac{x^0}{0!!}\pm\frac{x^1}{2!!}+\frac{x^2}{4!!}\pm\frac{x^3}{6!!}+\frac{x^4}{8!!}\pm\cdots$$

（2）　三角関数の2重階乗展開

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{x^0}{0!!}-\frac{x^2}{4!!}+\frac{x^4}{8!!}-\frac{x^6}{12!!}+\frac{x^8}{16!!}-\cdots$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x^1}{2!!}-\frac{x^3}{6!!}+\frac{x^5}{10!!}-\frac{x^7}{14!!}+\frac{x^9}{18!!}-\cdots$$

（3）　双曲線関数の2重階乗展開

$$\cosh\frac{x}{2}=\frac{x^0}{0!!}+\frac{x^2}{4!!}+\frac{x^4}{8!!}+\frac{x^6}{12!!}+\frac{x^8}{16!!}+\cdots$$

$$\sinh\frac{x}{2}=\frac{x^1}{2!!}+\frac{x^3}{6!!}+\frac{x^5}{10!!}+\frac{x^7}{14!!}+\frac{x^9}{18!!}+\cdots$$

（4）　対数関数の2重階乗展開

$$\log\left(1\pm\frac{x}{2}\right)=\pm\frac{0!}{2!!}x-\frac{1!}{4!!}x^2\pm\frac{2!}{6!!}x^3-\frac{3!}{8!!}x^4\pm\cdots$$

$$\log\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{0!}{2!!}x+\frac{2!}{6!!}x^3+\frac{4!}{10!!}x^5+\frac{6!}{14!!}x^7+\cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{2+xi}{2-xi} = \frac{0!}{2!!}x - \frac{2!}{6!!}x^3 + \frac{4!}{10!!}x^5 - \frac{6!}{14!!}x^7 + \cdots$$

(5) 逆三角関数の2重階乗展開

$$\sin^{-1}x = \frac{(-1)!!}{0!!}\frac{x^1}{1} + \frac{1!!}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{6!!}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\tan^{-1}\frac{x}{2} = \frac{0!}{2!!}x - \frac{2!}{6!!}x^3 + \frac{4!}{10!!}x^5 - \frac{6!}{14!!}x^7 + \cdots$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{x}{2} = \frac{1}{2i}\log\frac{2+xi}{2-xi}$$

(6) 逆双曲線関数の2重階乗展開

$$\sinh^{-1}x = \frac{(-1)!!}{0!!}\frac{x^1}{1} - \frac{1!!}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} - \frac{5!!}{6!!}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\tanh^{-1}\frac{x}{2} = \frac{0!}{2!!}x + \frac{2!}{6!!}x^3 + \frac{4!}{10!!}x^5 + \frac{6!}{14!!}x^7 + \cdots$$

$$\therefore\ \tanh^{-1}\frac{x}{2} = \log\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \qquad |x|<2$$

(7) 無理関数の2重階乗展開

$$(1\pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{(-1)!!}{2!!}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 \pm \frac{3!!}{6!!}x^3 - \frac{5!!}{8!!}x^4 \pm \cdots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1!!}{2!!}x + \frac{3!!}{4!!}x^2 \mp \frac{5!!}{6!!}x^3 + \frac{7!!}{8!!}x^4 \mp \cdots$$

$$\int\sqrt{1\pm x^2}dx = x \pm \frac{(-1)!!}{2!!}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1!!}{4!!}\frac{1}{5}x^5 \pm \frac{3!!}{6!!}\frac{1}{7}x^7 - \cdots$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1\pm x^2}} = x \mp \frac{1!!}{2!!}\frac{1}{3}x^3 + \frac{3!!}{4!!}\frac{1}{5}x^5 \mp \frac{5!!}{6!!}\frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

2•1•5 初等関数の2重階乗級数

2•1•4 の特殊値として以下の級数を得る。

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2!!} + \frac{1}{4!!} + \frac{1}{6!!} + \frac{1}{8!!} + \cdots = 1.648721$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2!!} + \frac{1}{4!!} - \frac{1}{6!!} + \frac{1}{8!!} - \cdots = 0.606530$$

$$\cos\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4!!} + \frac{1}{8!!} - \frac{1}{12!!} + \frac{1}{16!!} - \cdots = 0.877582$$

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2!!} - \frac{1}{6!!} + \frac{1}{10!!} - \frac{1}{14!!} + \frac{1}{18!!} - \cdots = 0.479425$$

$$\cosh\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4!!} + \frac{1}{8!!} + \frac{1}{12!!} + \frac{1}{16!!} + \cdots = 1.127625$$

$$\sinh\frac{1}{2} = \frac{1}{2!!} + \frac{1}{6!!} + \frac{1}{10!!} + \frac{1}{14!!} + \frac{1}{18!!} + \cdots = 0.521095$$

$$\log\frac{3}{2} = \frac{0!}{2!!} - \frac{1!}{4!!} + \frac{2!}{6!!} - \frac{3!}{8!!} + \cdots = 0.405465$$

$$\log 2 = \frac{0!}{2!!} + \frac{1!}{4!!} + \frac{2!}{6!!} + \frac{3!}{8!!} + \cdots = 0.693147$$

$$\log\sqrt{3} = \frac{0!}{2!!} + \frac{2!}{6!!} + \frac{4!}{10!!} + \frac{6!}{14!!} + \cdots = 0.549306$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{0!}{2!!} - \frac{2!}{6!!} + \frac{4!}{10!!} - \frac{6!}{14!!} + \cdots = 0.463647$$

$$\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{0!}{2!!} + \frac{2!}{6!!} + \frac{4!}{10!!} + \frac{6!}{14!!} + \cdots = 0.549306$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{(-1)!!}{2!!} - \frac{1!!}{4!!} + \frac{3!!}{6!!} - \frac{5!!}{8!!} + \cdots = 0.141421$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1!!}{2!!} + \frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} + \frac{7!!}{8!!} - \cdots = 0.707106$$

$$1 = \frac{(-1)!!}{2!!} + \frac{1!!}{4!!} + \frac{3!!}{6!!} + \frac{5!!}{8!!} + \cdots$$

2・2 3重階乗

2・2・1 3重階乗の定義

定義2・2・1

m, n を自然数とするとき、

$$m!!! \equiv m\cdot(m-3)\cdot(m-6)\cdot \cdots \cdot 7\cdot 4\cdot 1 \qquad m=3n-2 \qquad (1^2)$$

$$\equiv m\cdot(m-3)\cdot(m-6)\cdot \cdots \cdot 8\cdot 5\cdot 2 \qquad m=3n-1 \qquad (1^1)$$

$$\equiv m\cdot(m-3)\cdot(m-6)\cdot \cdots \cdot 9\cdot 6\cdot 3 \qquad m=3n \qquad (1^0)$$

$$\equiv 1 \qquad m=0,\ -1,\ -2 \qquad (1^-)$$

例

$1!!! = 1,\quad 4!!! = 1\cdot 4,\quad 7!!! = 1\cdot 4\cdot 7,\ \cdots$ （イー・スー・チー）

$2!!! = 2,\quad 5!!! = 2\cdot 5,\quad 8!!! = 2\cdot 5\cdot 8,\ \cdots$ （リャン・ウー・パー）

$3!!! = 3,\quad 6!!! = 3\cdot 6,\quad 9!!! = 3\cdot 6\cdot 9,\ \cdots$ （サブ・ロウ・チュー）

$0!!! = (-1)!!! = (-2)!!! = 1$

2・2・2 3重階乗の基本公式

公式2・2・2

n を自然数、 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ とするとき、

$$n! = n!!!\cdot(n-1)!!!\cdot(n-2)!!! \qquad (2)$$

$$(3n-2)!!! = 3^n\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \qquad (3^2)$$

$$(3n-1)!!! = 3^n\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \qquad (3^1)$$

$$(3n)!!! = 3^n\Gamma\left(n+\frac{3}{3}\right) / \Gamma\left(\frac{3}{3}\right) = 3^n\Gamma(n+1) = 3^n n! \qquad (3^0)$$

$$(-3n)!!! = \infty, \qquad 0!!! = 1 \qquad (4)$$

$$(-1)!!!\cdot(-2)!!! = 1 \qquad (5)$$

$$\{-(3n+1)\}!!!\cdot\{-(3n+2)\}!!! = \frac{3}{(3n-1)!!!\cdot(3n-2)!!!} \qquad (6)$$

証明

先ず、$(1^2)\times(1^1)\times(1^0)$ とすれば、

$$\begin{aligned}(3n-2)!!!\cdot(3n-1)!!!\cdot(3n)!!!\\ &= (3n-2)\cdot(3n-5)\cdot(3n-8)\cdot \cdots \cdot 7\cdot 4\cdot 1\\ &\times(3n-1)\cdot(3n-4)\cdot(3n-7)\cdot \cdots \cdot 8\cdot 5\cdot 2\\ &\times\ 3n\cdot(3n-3)\cdot(3n-6)\cdot \cdots \cdot 9\cdot 6\cdot 3 = (3n)!\end{aligned}$$

3n を n に置き換えて (2) を得る。
次に、$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z)$ であるから、

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{3}\right)=\Gamma\left(1+\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Gamma\left(3+\frac{1}{3}\right)=\Gamma\left(1+\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{3}\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{3}\frac{4}{3}\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{(3n-2)!!!}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\quad (3n-2)!!!=3^n\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \tag{3^2}$$

同様の方法で (3^1), (3^0) を得る。
(3^0) に $n=0$ を代入すれば、

$$0!!!=3^0\Gamma(1)=1$$

n を $-n$ に置換すれば、

$$(-3n)!!!=3^{-n}\Gamma(1-n)=\infty \qquad \text{（＋から接近）}$$

次に、(2)と(3^0) より、

$$(3n-1)!!!\cdot(3n-2)!!!=\frac{(3n)!}{(3n)!!!}=\frac{\Gamma(1+3n)}{3^n\Gamma(1+n)}$$

$n=0$ を代入すれば、

$$(-1)!!!\cdot(-2)!!!=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)3^0}=\frac{0!}{0!\cdot 1}=1$$

これは $0!!!=1$ と相俟って定義 (1^-) の正当性を保証する。
最後に、n を $-n$ に置換すれば、

$$\{-(3n+1)\}!!!\cdot\{-(3n+2)!!!\}=\frac{\Gamma(1-3n)}{3^{-n}\Gamma(1-n)}=\frac{3^n\Gamma\{-(3n-1)\}}{\Gamma\{-(n-1)\}}$$

$$=(-1)^{(n-1)-(3n-1)}\frac{(n-1)!\,3^n}{(3n-1)!}=(-1)^{-2n}\frac{(n-1)!\,3^n}{(3n-1)!}$$

$$=\frac{3n(n-1)!\,3^n}{(3n)!}=\frac{3\,n!\,3^n}{(3n)!}=\frac{3}{(3n-1)!!!\cdot(3n-2)!!!}$$

例1

$$17!!!=(3\cdot 6-1)!!!=3^6\Gamma\left(6+\frac{2}{3}\right)/\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=3^6\Gamma\left(\frac{20}{3}\right)/\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=729\times 389.03492617/1.35411794=209439.9998$$

例2

$$(-4)!!!\cdot(-5)!!! = \frac{3}{1!!!\cdot 2!!!} = \frac{3}{2}$$

2．2．3　マクローリン展開の3重階乗表現(公式)

公式2･2･3

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(0)}{0!!!}x^0+\frac{f'(0)}{3!!!}x^1+\frac{f''(0)}{6!!!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{9!!!}x^3+\cdots \tag{7}$$

導出

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$$= \frac{f(0)}{3^0\cdot 0!}3x^0+\frac{f'(0)}{3^1\cdot 1!}3^1x^1+\frac{f''(0)}{3^2\cdot 2!}3^2x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3^3\cdot 3!}3^3x^3+\cdots$$

$$= \frac{f(0)}{0!!!}(3x)^0+\frac{f'(0)}{3!!!}(3x)^1+\frac{f''(0)}{6!!!}(3x)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{9!!!}(3x)^3+\cdots$$

x を $x/3$ に置き換えると、

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(0)}{0!!!}x^0+\frac{f'(0)}{3!!!}x^1+\frac{f''(0)}{6!!!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{9!!!}x^3+\cdots$$

を得る。

2･2･4　初等関数の3重階乗展開

2･2･3 を初等関数に適用することにより以下の諸式を得る。

(1)　指数関数の3重階乗展開

$$e^{\pm\frac{x}{3}} = \frac{x^0}{0!!!} \pm \frac{x^1}{3!!!} + \frac{x^2}{6!!!} \pm \frac{x^3}{9!!!} + \frac{x^4}{12!!!} \pm \cdots$$

(2)　三角関数の3重階乗展開

$$\cos\frac{x}{3} = \frac{x^0}{0!!!} - \frac{x^2}{6!!!} + \frac{x^4}{12!!!} - \frac{x^6}{18!!!} + \frac{x^8}{24!!!} - \cdots$$

$$\sin\frac{x}{3} = \frac{x^1}{3!!!} - \frac{x^3}{9!!!} + \frac{x^5}{15!!!} - \frac{x^7}{21!!!} + \frac{x^9}{27!!!} - \cdots$$

(3)　双曲線関数の3重階乗展開

$$\cosh\frac{x}{3} = \frac{x^0}{0!!!} + \frac{x^2}{6!!!} + \frac{x^4}{12!!!} + \frac{x^6}{18!!!} + \frac{x^8}{24!!!} + \cdots$$

$$\sinh\frac{x}{3} = \frac{x^1}{3!!!} + \frac{x^3}{9!!!} + \frac{x^5}{15!!!} + \frac{x^7}{21!!!} + \frac{x^9}{27!!!} + \cdots$$

(4)　対数関数の3重階乗展開

$$\log\left(1\pm\frac{x}{3}\right) = \pm\frac{0!}{3!!!}x - \frac{1!}{6!!!}x^2 \pm \frac{2!}{9!!!}x^3 - \frac{3!}{12!!!}x^4 \pm \cdots$$

$$\log\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{0!}{3!!!}x + \frac{2!}{9!!!}x^3 + \frac{4!}{15!!!}x^5 + \frac{6!}{21!!!}x^7 + \cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{3+xi}{3-xi} = \frac{0!}{3!!!}x - \frac{2!}{9!!!}x^3 + \frac{4!}{15!!!}x^5 - \frac{6!}{21!!!}x^7 + \cdots$$

(5)　逆三角関数の3重階乗展開

$$\tan^{-1}\frac{x}{3} = \frac{0!}{3!!!}x - \frac{2!}{9!!!}x^3 + \frac{4!}{15!!!}x^5 - \frac{6!}{21!!!}x^7 + \cdots$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{x}{3} = \frac{1}{2i}\log\frac{3+xi}{3-xi}$$

(6)　逆双曲線関数の3重階乗展開

$$\tanh^{-1}\frac{x}{3} = \frac{0!}{3!!!}x + \frac{2!}{9!!!}x^3 + \frac{4!}{15!!!}x^5 + \frac{6!}{21!!!}x^7 + \cdots$$

$$\therefore\ \tanh^{-1}\frac{x}{3} = \log\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \qquad |x|<3$$

(7)　無理関数の3重階乗展開

$$(1\pm x)^{\frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{(-1)!!!}{3!!!}x - \frac{2!!!}{6!!!}x^2 \pm \frac{5!!!}{9!!!}x^3 - \frac{8!!!}{12!!!}x^4 \pm \cdots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{3}} = 1 \mp \frac{1!!!}{3!!!}x + \frac{4!!!}{6!!!}x^2 \mp \frac{7!!!}{9!!!}x^3 + \frac{10!!!}{12!!!}x^4 \mp \cdots$$

$$\int\sqrt[3]{1\pm x^3}\,dx = x \pm \frac{(-1)!!!}{3!!!}\frac{1}{4}x^4 - \frac{2!!!}{6!!!}\frac{1}{7}x^7 \pm \frac{5!!!}{9!!!}\frac{1}{10}x^{10} - \cdots$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1\pm x^3}} = x \mp \frac{1!!!}{3!!!}\frac{1}{4}x^4 + \frac{4!!!}{6!!!}\frac{1}{7}x^7 \mp \frac{7!!!}{9!!!}\frac{1}{10}x^{10} + \cdots$$

2･2･5　初等関数の3重階乗級数

2･2･4 の特殊値として以下の級数を得る。

$$e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3!!!} + \frac{1}{6!!!} + \frac{1}{9!!!} + \frac{1}{12!!!} + \cdots \qquad 1.395612$$

$$e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3!!!} + \frac{1}{6!!!} - \frac{1}{9!!!} + \frac{1}{12!!!} - \cdots \qquad 0.716531$$

$$\cos\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6!!!} + \frac{1}{12!!!} - \frac{1}{18!!!} + \frac{1}{24!!!} - \cdots \qquad 0.944956$$

$$\sin\frac{1}{3} = \frac{1}{3!!!} - \frac{1}{9!!!} + \frac{1}{15!!!} - \frac{1}{21!!!} + \frac{1}{27!!!} - \cdots \qquad 0.327194$$

$$\cosh\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6!!!} + \frac{1}{12!!!} + \frac{1}{18!!!} + \frac{1}{24!!!} + \cdots \qquad 1.056071$$

$$\sinh\frac{1}{3} = \frac{1}{3!!!} + \frac{1}{9!!!} + \frac{1}{15!!!} + \frac{1}{21!!!} + \frac{1}{27!!!} + \cdots \qquad 0.339540$$

$$\log\frac{4}{3} = \frac{0!}{3!!!} - \frac{1!}{6!!!} + \frac{2!}{9!!!} - \frac{3!}{12!!!} + \cdots \qquad 0.287682$$

$$-\log\frac{2}{3} = \frac{0!}{3!!!} + \frac{1!}{6!!!} + \frac{2!}{9!!!} + \frac{3!}{12!!!} + \cdots \qquad 0.405465$$

$$\log\sqrt{2} = \frac{0!}{3!!!} + \frac{2!}{9!!!} + \frac{4!}{15!!!} + \frac{6!}{21!!!} + \cdots \qquad 0.346573$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{0!}{3!!!} - \frac{2!}{9!!!} + \frac{4!}{15!!!} - \frac{6!}{21!!!} + \cdots \qquad 0.321750$$

$$\tanh^{-1}\frac{1}{3} = \frac{0!}{3!!!} + \frac{2!}{9!!!} + \frac{4!}{15!!!} + \frac{6!}{21!!!} + \cdots \qquad 0.346573$$

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{(-1)!!!}{3!!!} - \frac{2!!!}{6!!!} + \frac{5!!!}{9!!!} - \frac{8!!!}{12!!!} + \cdots \qquad 1.259921$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 1 - \frac{1!!!}{3!!!} + \frac{4!!!}{6!!!} - \frac{7!!!}{9!!!} + \frac{10!!!}{12!!!} - \cdots \qquad 0.793700$$

$$1 = \frac{(-1)!!!}{3!!!} + \frac{2!!!}{6!!!} + \frac{5!!!}{9!!!} + \frac{8!!!}{12!!!} + \cdots$$

2･3 多重階乗

2･3･1 多重階乗の定義

定義2･3･1

m, n, k を自然数、 !! ⋯ !（k個）≡ $!_k$ とするとき、

$$m!_k \equiv n\cdot(n-k)\cdot(n-2k)\ \cdots\ (1+k)\cdot 1 \qquad m=kn-(k-1) \qquad (1^{k-1})$$

$$\vdots$$

$$\equiv n\cdot(n-k)\cdot(n-2k)\ \cdots\ \{(k-1)+k\}\cdot(k-1) \qquad m=kn-1 \qquad (1^1)$$

$$\equiv n\cdot(n-k)\cdot(n-2k)\ \cdots\ (k+k)\cdot k \qquad m=kn \qquad (1^0)$$

$$\equiv 1 \qquad m=0,-1,\cdots,-(k-1) \qquad (1^-)$$

例

$$1!_4=1,\quad 5!_4=1\cdot 5,\quad 9!_4=1\cdot 5\cdot 9,\quad 13!_4=1\cdot 5\cdot 9\cdot 13,\quad \cdots$$

$$2!_4=2,\quad 6!_4=2\cdot 6,\quad 10!_4=2\cdot 6\cdot 10,\quad 14!_4=2\cdot 6\cdot 10\cdot 14,\quad \cdots$$

$$3!_4=3,\quad 7!_4=3\cdot 7,\quad 11!_4=3\cdot 7\cdot 11,\quad 15!_4=3\cdot 7\cdot 11\cdot 15,\quad \cdots$$

$$4!_4=4,\quad 8!_4=4\cdot 8,\quad 12!_4=4\cdot 8\cdot 12,\quad 16!_4=4\cdot 8\cdot 12,16,\quad \cdots$$

$$0!_4=(-1)!_4=(-2)!_4=(-3)!_4=1$$

2･3･2 多重階乗の基本公式

公式2･3･2

k, n を自然数、 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ とするとき、

$$n!=n!_k\cdot(n-1)!_k\cdot(n-2)!_k\cdot\ \cdots\ \cdot\{n-(k-1)\}!_k \qquad (2)$$

$$(kn-s)!_k=k^n\Gamma\left(n+\frac{k-s}{k}\right)/\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right),\quad s=1,2,\cdots k-1 \qquad (3^s)$$

$$(kn)!_k=k^n\Gamma\left(n+\frac{k}{k}\right)/\Gamma\left(\frac{k}{k}\right)=k^n\Gamma(n+1)=k^n n! \qquad (3^0)$$

$$(-kn)!_k=\infty,\qquad 0!_k=1 \qquad (4)$$

$$(-1)!_k\cdot(-2)!_k\cdot\ \cdots\ \cdot\{-(k-1)\}!_k=1 \qquad (5)$$

$$\{-(kn+1)\}!_k\cdot\{-(kn+2)\}!_k\cdot\cdots\ \cdot\{-(kn+k-1)\}!_k$$
$$=\frac{k}{(kn-1)!_k\cdot(kn-2)!_k\cdot\cdots\ \cdot\{kn-(k-1)\}!_k} \qquad (6)$$

証明

先ず、$(1^{k-1})\times\cdots\times(1^1)\times(1^0)$ とすれば、

$$\{kn-(k-1)\}!_k\cdot\ \cdots\ \cdot(kn-1)!_k\cdot(kn)!_k$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \{kn-(k-1)\}\{kn-(2k-1)\}\{kn-(3k-1)\}\cdots(k+1)\cdot 1 \\
& \times\{kn-(k-2)\}\{kn-(2k-2)\}\{kn-(3k-2)\}\cdots(k+2)\cdot 2 \\
& \quad\vdots \\
& \times (kn-1)\ \{kn-(k+1)\}\{kn-(2k+1)\}\cdots\{k+(k-1)\}(k-1) \\
& \times kn\ (kn-k)\ (kn-2k)\cdots(k+k)\cdot k \\
= \ & (kn)!
\end{aligned}
$$

kn を n に置き換えて (2) を得る。

次に、$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z)$ であるから、

$$\Gamma\left(1+\frac{k-s}{k}\right)=\frac{k-s}{k}\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right)$$

$$\Gamma\left(2+\frac{k-s}{k}\right)=\Gamma\left(1+\frac{2k-s}{k}\right)=\frac{2k-s}{k}\Gamma\left(\frac{2k-s}{k}\right)=\frac{2k-s}{k}\frac{k-s}{k}\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right)$$

$$\Gamma\left(3+\frac{k-s}{k}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3k-s}{k}\right)=\frac{3k-s}{k}\frac{2k-s}{k}\frac{k-s}{k}\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(n+\frac{k-s}{k}\right)=\frac{(nk-s)\cdot\cdots\cdot(2k-s)(k-s)}{k^n}\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right)=\frac{(kn-s)!_k}{k^n}\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right)$$

$$\therefore\quad (kn-s)!_k=k^n\Gamma\left(n+\frac{k-s}{k}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{k-s}{k}\right) \qquad (3^s)$$

特に $s=0$ と置けば (3^0) を得る。

(3^0) に $n=0$ を代入すれば、

$$0!_k=k^0\Gamma(1)=1$$

n を $-n$ に置換すれば、

$$(-kn)!_k=k^{-n}\Gamma(1-n)=\infty \qquad \text{（＋から接近 ）}$$

次に、(2)と(3^0) より、

$$(kn-1)!_k\cdot(kn-2)!_k\cdot\ \cdots\ \cdot\{kn-(k-1)\}!_k=\frac{(kn)!}{(kn)!_k}=\frac{\Gamma(1+kn)}{k^n\Gamma(1+n)}$$

$n=0$ を代入すれば、

$$(-1)!_k\cdot(-2)!_k\cdot\ \cdots\ \cdot\{-(k-1)\}!_k=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)k^0}=\frac{0!}{0!\cdot 1}=1$$

これは $0!_k=1$ と相俟って定義 (1^-) の正当性を示唆する。

最後に、n を $-n$ に置換すれば、

$$
\begin{aligned}
&\{-(kn+1)\}!_k\cdot\{-(kn+2)\}!_k\cdot\cdots\ \cdot\{-(kn+k-1)\}!_k \\
&=\frac{\Gamma(1-kn)}{k^{-n}\Gamma(1-n)}=\frac{k^n\Gamma\{-(kn-1)\}}{\Gamma\{-(n-1)\}} \\
&=(-1)^{(n-1)-(kn-1)}\frac{(n-1)!\,k^n}{(kn-1)!}=(-1)^{-(k-1)n}\frac{kn(n-1)!\,k^n}{(kn)!}
\end{aligned}
$$

$$= (-1)^{-(k-1)n} \frac{kn!k^n}{(kn)!}$$

$$= (-1)^{-(k-1)n} \frac{k}{(kn-1)!_k \cdot (kn-2)!_k \cdot \cdots \cdot \{kn-(n-1)\}!_k}$$

例1

$$27!_5 = (5\times 6-3)!_5 = 5^6 \Gamma\left(6+\frac{5-3}{5}\right) / \Gamma\left(\frac{5-3}{5}\right) = 5^6 \Gamma\left(\frac{32}{5}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= 15625\times 240.83377994/2.21815954 = 1696464.0025$$

例2

$$(-6)!_5 \cdot (-7)!_5 \cdot (-8)!_5 \cdot (-9)!_5 = \frac{(-1)^{-(5-1)} \cdot 5}{1!_5 \cdot 2!_5 \cdot 3!_5 \cdot 4!_5} = \frac{5}{24}$$

2•3•3 マクローリン展開の k 重階乗表現(公式)

公式2•3•3

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{f(0)}{0!_k}x^0 + \frac{f'(0)}{k!_k}x^1 + \frac{f''(0)}{(2k)!_k}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{(3k)!_k}x^3 + \cdots \tag{7}$$

導出

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= \frac{f(0)}{k^0 \cdot 0!}kx^0 + \frac{f'(0)}{k^1 \cdot 1!}k^1x^1 + \frac{f''(0)}{k^2 \cdot 2!}k^2x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{k^3 \cdot 3!}k^3x^3 + \cdots$$

$$= \frac{f(0)}{0!_k}(kx)^0 + \frac{f'(0)}{k!_k}(kx)^1 + \frac{f''(0)}{(2k)!_k}(kx)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{(3k)!_k}(kx)^3 + \cdots$$

x を x/k に置き換えると、

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{f(0)}{0!_k}x^0 + \frac{f'(0)}{k!_k}x^1 + \frac{f''(0)}{(2k)!_k}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{(3k)!_k}x^3 + \cdots$$

2•3•4 初等関数の多重階乗展開

2•3•3 を初等関数に適用することにより以下の諸式を得る。

(1) 指数関数の多重階乗展開

$$e^{\pm\frac{x}{n}} = \frac{x^0}{0!_n} \pm \frac{x^1}{n!_n} + \frac{x^2}{(2n)!_n} \pm \frac{x^3}{(3n)!_n} + \frac{x^4}{(4n)!_n} \pm \cdots$$

(2) 三角関数の多重階乗展開

$$\cos\frac{x}{n} = \frac{x^0}{0!_n} - \frac{x^2}{(2n)!_n} + \frac{x^4}{(4n)!_n} - \frac{x^6}{(6n)!_n} + \frac{x^8}{(8n)!_n} - \cdots$$

$$\sin\frac{x}{n} = \frac{x^1}{n!_n} - \frac{x^3}{(3n)!_n} + \frac{x^5}{(5n)!_n} - \frac{x^7}{(7n)!_n} + \frac{x^9}{(9n)!_n} - \cdots$$

(3)　双曲線関数の多重階乗展開

$$\cosh\frac{x}{n} = \frac{x^0}{0!_n} + \frac{x^2}{(2n)!_n} + \frac{x^4}{(4n)!_n} + \frac{x^6}{(6n)!_n} + \frac{x^8}{(8n)!_n} + \cdots$$

$$\sinh\frac{x}{n} = \frac{x^1}{n!_n} + \frac{x^3}{(3n)!_n} + \frac{x^5}{(5n)!_n} + \frac{x^7}{(7n)!_n} + \frac{x^9}{(9n)!_n} + \cdots$$

(4)　対数関数の多重階乗展開

$$\log\left(1\pm\frac{x}{n}\right) = \pm\frac{0!}{n!_n}x - \frac{1!}{(2n)!_n}x^2 \pm \frac{2!}{(3n)!_n}x^3 - \frac{3!}{(4n)!_n}x^4 \pm \cdots$$

$$\log\sqrt{\frac{n+x}{n-x}} = \frac{0!}{n!_n}x + \frac{2!}{(3n)!_n}x^3 + \frac{4!}{(5n)!_n}x^5 + \frac{6!}{(7n)!_n}x^7 + \cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{n+xi}{n-xi} = \frac{0!}{n!_n}x - \frac{2!}{(3n)!_n}x^3 + \frac{4!}{(5n)!_n}x^5 - \frac{6!}{(7n)!_n}x^7 + \cdots$$

(5)　逆三角関数の多重階乗展開

$$\tan^{-1}\frac{x}{n} = \frac{0!}{n!_n}x - \frac{2!}{(3n)!_n}x^3 + \frac{4!}{(5n)!_n}x^5 - \frac{6!}{(7n)!_n}x^7 + \cdots$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{x}{n} = \frac{1}{2i}\log\frac{n+xi}{n-xi}$$

(6)　逆双曲線関数の3重階乗展開

$$\tanh^{-1}\frac{x}{n} = \frac{0!}{n!_n}x + \frac{2!}{(3n)!_n}x^3 + \frac{4!}{(5n)!_n}x^5 + \frac{6!}{(7n)!_n}x^7 + \cdots$$

$$\therefore\ \tanh^{-1}\frac{x}{n} = \log\sqrt{\frac{n+x}{n-x}} \qquad |x|<n$$

(7)　無理関数の多重階乗展開

$$(1\pm x)^{\frac{1}{n}} = 1\pm\frac{(-1)!_n}{n!_n}x - \frac{(n-1)!_n}{(2n)!_n}x^2 \pm \frac{(2n-1)!_n}{(3n)!_n}x^3 - \frac{(3n-1)!_n}{(4n)!_n}x^4 \pm \cdots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{n}} = 1\mp\frac{1!_n}{n!_n}x + \frac{(n+1)!_n}{(2n)!_n}x^2 \mp \frac{(2n+1)!_n}{(3n)!_n}x^3 + \frac{(3n+1)!_n}{(4n)!_n}x^4 \mp \cdots$$

$$\int\sqrt[n]{1\pm x^n}\,dx = x\pm\frac{(-1)!_n}{n!_n}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{(n-1)!_n}{(2n)!_n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \frac{(2n-1)!_n}{(3n)!_n}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \cdots$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{1\pm x^n}} = x\mp\frac{1!_n}{n!_n}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{(n+1)!_n}{(2n)!_n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \frac{(2n+1)!_n}{(3n)!_n}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \cdots$$

2・3・5　初等関数の多重階乗級数

2・3・4 の特殊値として以下の級数を得る。

$$e^{\pm\frac{1}{n}} = 1 \pm \frac{1}{n!_n} + \frac{1}{(2n)!_n} \pm \frac{1}{(3n)!_n} + \frac{1}{(4n)!_n} \pm \cdots$$

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{(2n)!_n} + \frac{1}{(4n)!_n} - \frac{1}{(6n)!_n} + \frac{1}{(8n)!_n} - \cdots$$

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n!_n} - \frac{1}{(3n)!_n} + \frac{1}{(5n)!_n} - \frac{1}{(7n)!_n} + \frac{1}{(9n)!_n} - \cdots$$

$$\cosh\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{(2n)!_n} + \frac{1}{(4n)!_n} + \frac{1}{(6n)!_n} + \frac{1}{(8n)!_n} + \cdots$$

$$\sinh\frac{1}{n} = \frac{1}{n!_n} + \frac{1}{(3n)!_n} + \frac{1}{(5n)!_n} + \frac{1}{(7n)!_n} + \frac{1}{(9n)!_n} + \cdots$$

$$\log\left(1\pm\frac{1}{n}\right) = \pm\frac{0!}{n!_n} - \frac{1!}{(2n)!_n} \pm \frac{2!}{(3n)!_n} - \frac{3!}{(4n)!_n} \pm \cdots$$

$$\log\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{0!}{n!_n} + \frac{2!}{(3n)!_n} + \frac{4!}{(5n)!_n} + \frac{6!}{(7n)!_n} + \cdots \qquad (n>1)$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{n} = \frac{0!}{n!_n} - \frac{2!}{(3n)!_n} + \frac{4!}{(5n)!_n} - \frac{6!}{(7n)!_n} + \cdots$$

$$\tanh^{-1}\frac{1}{n} = \frac{0!}{n!_n} + \frac{2!}{(3n)!_n} + \frac{4!}{(5n)!_n} + \frac{6!}{(7n)!_n} + \cdots$$

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \frac{(-1)!_n}{n!_n} - \frac{(n-1)!_n}{(2n)!_n} + \frac{(2n-1)!_n}{(3n)!_n} - \frac{(3n-1)!_n}{(4n)!_n} + \cdots \quad (n>1)$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1 - \frac{1!_n}{n!_n} + \frac{(n+1)!_n}{(2n)!_n} - \frac{(2n+1)!_n}{(3n)!_n} + \frac{(3n+1)!_n}{(4n)!_n} - \cdots$$

$$1 = \frac{(-1)!_n}{n!_n} + \frac{(n-1)!_n}{(2n)!_n} + \frac{(2n-1)!_n}{(3n)!_n} + \frac{(3n-1)!_n}{(4n)!_n} + \cdots \quad (n>1)$$

特に$n=1$のとき、

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2.718281$$

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots = 0.367879$$

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \cdots = 0.540302$$

$$\sin 1 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \cdots = 0.841470$$

$$\cosh 1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \cdots = 1.543080$$

$$\sinh 1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \cdots = 1.175201$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = 0.693147$$

$$tan^{-1}1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = 0.785398$$

$$tanh^{-1}1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty$$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

2･3･6 ポッホハマー記号の多重階乗表示

1より小さい有理数のポッホハマー記号は多重階乗で表示することができる。

公式2･3･4

n, k を2以上の自然数、a を $|a| < n$ なる整数とするとき、

$$\left(\frac{a}{n}\right)_k = \frac{\{a+(k-1)n\}!_n}{n^k} \quad (a>0 \text{のとき}) \tag{8}$$

$$= \frac{a\{a+(k-1)n\}!_n}{n^k} \quad (a<0 \text{のとき}) \tag{8'}$$

導出

$$\left(\frac{a}{n}\right)_k = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}+1\right)\cdots\left(\frac{a}{n}+k-1\right) = \frac{a(a+1n)\cdots\{a+(k-1)n\}}{n^k}$$

$$= \frac{\{a+(k-1)n\}!_n}{n^k} \quad (a>0 \text{のとき})$$

$a<0$ のとき、$a!_n=1,\ a+1n>0,\ \cdots,\ a+(k-1)n>0$ 故、

$$a = a \cdot a!_n \quad (k=1)$$

$$a(a+1n) = a \cdot (a+1n)!_n \quad (k=2)$$

$$a(a+1n)(a+2n) = a \cdot (a+2n)!_n \quad (k=3)$$

$$\vdots$$

よって、

$$\frac{a(a+1n)\cdots\{a+(k-1)n\}}{n^k} = \frac{a \cdot \{a+(k-1)n\}!_n}{n^k}$$

となる。

例

$$\left(\frac{1}{3}\right)_k = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots\{1+3(k-1)\}}{3^k} = \frac{\{1+3(k-1)\}!!!}{3^k}$$

$$\left(\frac{-1}{3}\right)_k = \frac{-1\cdot 2\cdot 5\cdots\{-1+3(k-1)\}}{3^k} = \frac{-1\cdot\{-1+3(k-1)\}!!!}{3^k} \quad (-1)!!!=1$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)_k = \frac{-2\cdot 1\cdot 4\cdots\{-2+3(k-1)\}}{3^k} = \frac{-2\cdot\{-2+3(k-1)\}!!!}{3^k} \quad (-2)!!!=1$$

2・3・7 超幾何関数の多重階乗表示

パラメータが1より小なる有理数のとき、超幾何関数は多重階乗で表示することができる。

公式2・3・5

n を2以上の自然数、a を $|a|<n$ なる整数とするとき、

$$ {}_2F_1\left(\frac{a}{n}, b, c\,;x\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+n(k-1)\}!_n \cdot (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (a>0) \tag{9} $$

$$ = 1 + a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+n(k-1)\}!_n \cdot (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (a<0) \tag{9'} $$

n を2以上の自然数、a,b,c を $|a|,|b|,|c|<n$ なる整数とするとき、

$$ {}_2F_1\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}\,;x\right) $$

$$ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+n(k-1)\}!_n \cdot \{b+n(k-1)\}!_n}{\{c+n(k-1)\}!_n} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (a,b,c>0) \tag{10} $$

$$ = 1 + a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+n(k-1)\}!_n \cdot \{b+n(k-1)\}!_n}{\{c+n(k-1)\}!_n} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (a\text{ のみ負}) \tag{10'} $$

$$ = 1 + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+n(k-1)\}!_n \cdot \{b+n(k-1)\}!_n}{\{c+n(k-1)\}!_n} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (c\text{ のみ負}) \tag{10''} $$

導出

(8), (8') と $n^k \cdot k! = (nk)!_n$ より、

$$ {}_2F_1\left(\frac{a}{n}, b, c\,;x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{n}\right)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} $$

$$ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+(k-1)n\}!_n (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (a>0) $$

$$ = 1 + a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+(k-1)n\}!_n (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(nk)!_n} \quad (a<0) $$

$$ {}_2F_1\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}\,;x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{n}\right)_k \left(\frac{b}{n}\right)_k}{\left(\frac{c}{n}\right)_k} \frac{x^k}{k!} $$

$$ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dfrac{\{a+(k-1)n\}!_n}{n^k} \dfrac{\{b+(k-1)n\}!_n}{n^k}}{\dfrac{\{c+(k-1)n\}!_n}{n^k}} \frac{x^k}{k!} \quad (a,b,c>0) $$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{a+n(k-1)\}!_n \cdot \{b+n(k-1)\}!_n}{\{c+n(k-1)\}!_n} \frac{x^k}{(nk)!_n} \qquad (a,b,c > 0)$$

a,b,c のうち負のものが $\sum$ の係数となるから、(10'), 10″) は明らか。

例1

$${}_2F_1\left(\frac{1}{3}, c, c\,;\, x\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{1+3(k-1)\}!_3 \cdot (c)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(3k)!_3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!!!} x^k$$

$$= 1 + \frac{1!!!}{3!!!} x + \frac{4!!!}{6!!!} x^2 + \frac{7!!!}{9!!!} x^3 + \frac{10!!!}{12!!!} x^4 + \cdots = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$$

例2

$${}_2F_1\left(\frac{-1}{3}, c, c\,;\, x\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{-1+3(k-1)\}!_3 \cdot (c)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(3k)!_3} = 1 + (-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-4)!!!}{(3k)!!!} x^k$$

$$= 1 - \frac{(-1)!!!}{3!!!} x - \frac{2!!!}{6!!!} x^2 - \frac{5!!!}{9!!!} x^3 - \frac{8!!!}{12!!!} x^4 - \cdots = (1-x)^{\frac{1}{3}}$$

例3

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\,;\, x^2\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{1+2(k-1)\}!_2 \cdot \{1+2(k-1)\}!_2}{\{3+2(k-1)\}!_2} \frac{x^{2k}}{(2k)!_2}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! \cdot (2k-1)!!}{(2k+1)!!} \frac{x^{2k}}{(2k)!!}$$

$$= 1 + \frac{(1!!)^2}{2!! \cdot 3!!} x^2 + \frac{(3!!)^2}{4!! \cdot 5!!} x^4 + \frac{(5!!)^2}{6!! \cdot 7!!} x^6 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1!!}{2!!} \frac{x^2}{3} + \frac{3!!}{4!!} \frac{x^4}{5} + \frac{5!!}{6!!} \frac{x^6}{7} + \cdots = \frac{\sin^{-1} x}{x}$$

例4

$${}_2F_1\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\,;\, x^n\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{1+n(k-1)\}!_n \cdot \{n-1+n(k-1)\}!_n}{\{n+1+n(k-1)\}!_n} \frac{x^{nk}}{(nk)!_n}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{n(k-1)+1\}!_n \cdot (nk-1)!_n}{(nk+1)!_n} \frac{x^{nk}}{(nk)!_n}$$

$$= 1 + \frac{1!_n(n-1)!_n}{n!_n(n+1)!_n} x^n + \frac{(n+1)!_n(2n-1)!_n}{(2n)!_n(2n+1)!_n} x^{2n} + \frac{(2n+1)!_n(3n-1)!_n}{(3n)!_n(3n+1)!_n} x^{3n} \cdots$$

$$= 1 + \frac{(n-1)!_n}{n!_n} \frac{x^n}{n+1} + \frac{(2n-1)!_n}{(2n)!_n} \frac{x^{2n}}{2n+1} + \frac{(3n-1)!_n}{(3n)!_n} \frac{x^{3n}}{3n+1} + \cdots$$

2003.02.04

K. Kono

宇宙人の数学