3　一般二項と一般多項定理

3･1　二項定理

定理 3･1･1

実数 x_1, x_2 と非負の整数 n について

$$(x_1+x_2)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, x_1^{n-r} x_2^{r} \tag{1.1}$$

二項係数

二項係数は (1.1) において現れる正整数であり、${}_nC_r$ と記述されている。ここに n, r は共に非負の整数である。${}_nC_r$ は n 個の異なる要素から順序を無視して r 個の異なる要素を選ぶ組み合わせ数であり、次のように計算される。

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

パスカルの三角形

${}_nC_r$ の n を行に r を列に並べたものはパスカルの三角形と呼ばれる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & {}_0C_0 & & & & \\
 & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & \\
 & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & \\
 & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 & \\
{}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

二項係数の性質

二項係数の性質は数多く知られているが、基本的な(パスカルの三角形から直ちに解る)ものを幾つか示せば次のとおりである。これらのうちⅱ は ${}_nC_r$ の逐次計算に使われる。

ⅰ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

ⅱ ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

ⅲ ${}_nC_r = \sum_{k=r-1}^{n-1} {}_kC_{r-1}$

ⅳ $\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = 2^n$

ⅴ $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_nC_r = 0$

3･2　一般二項定理

3･2･1　ニュートンの一般二項定理

定理 3･2･1

任意の実数 α について次式が成立する。

$$(1+x)^{\alpha} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^{r} & |x|\le 1 \quad (\,|x| = 1 \text{ is allowed at } \alpha > 0\,) \qquad (1.1) \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}x^{\alpha-r} & |x|>1 \qquad (1.2) \end{cases}$$

証明

n が自然数のとき、二項定理により任意の x について

$$(1+x)^{n} = \sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\,x^{r}$$

$r > n$ については ${}_{n}C_{r} = 0$ であるから、これは次のように書くことが出来る。

$$(1+x)^{n} = \sum_{r=0}^{\infty} {}_{n}C_{r}\,x^{r}$$

そこで自然数 n を実数 α に拡張すれば、

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^{r} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r+1)\;r!}x^{r} \tag{1.1}$$

ここで

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r+1)\;r!}x^{r} \equiv a_{r}$$

と置けば

$$\frac{a_{r+1}}{a_{r}} = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r)\;(r+1)!}x^{r+1}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r+1)\;r!}x^{r}} = \frac{(\alpha-r)x}{r+1}$$

これより

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{a_{r+1}}{a_{r}}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\frac{(\alpha-r)x}{r+1}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\frac{(\alpha/r-1)x}{1+1/r}\right| = \left|\frac{-x}{1}\right| = |x|$$

よってダランベールの判定法により、$|x|<1$ ならば (1.1) は絶対収束する。

次に、$|x|>1$ のとき $|x^{-1}|<1$。よって (1.1) により

$$\left(1+x^{-1}\right)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\left(x^{-1}\right)^{r}$$

両辺に x^{α} を乗じれば

$$(x+1)^{\alpha} = x^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^{-r} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}x^{\alpha-r} \tag{1.2}$$

$|x|=1$ の場合の証明は次の細節で行う。

3･2･2　一般二項係数

定理 3･2･1 に出てきた係数 $\binom{\alpha}{r}$ は**一般二項係数**と呼ばれるもので、次のようなものである。

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r+1)\Gamma(r+1)}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!} \tag{2.0}$$

最初の幾つかを列挙すれば次のとおりである。

$$\binom{\alpha}{0}=1,\ \binom{\alpha}{1}=\frac{\alpha}{1!},\ \binom{\alpha}{2}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ \binom{\alpha}{3}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!},\ \cdots$$

一般二項係数についても二項係数と似たような性質が知られているが、特に重要なのは一般二項係数の総和である。これを求めるため、若干の *Lemma* を用意する。

Lemma 3.2.2

二項係数級数 $\sum_{r=0}^{\infty}a_r\binom{\alpha-1}{r}$ は、α が正の整数でないならば、

ディリクレ級数 $\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{a_r}{r^{\alpha}}$ と同時に収束または発散する。

出所 「岩波数学公式Ⅱ」 p132

Lemma 3.2.3

非整数 $\alpha>0$ に対して $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}$ は絶対収束する。

証明

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{\alpha}{\alpha-r}\binom{\alpha-1}{r}$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha-r}\binom{\alpha-1}{r}$$

$a_r=\frac{\alpha}{\alpha-r}$ と置けば

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_r\binom{\alpha-1}{r}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r} \tag{s1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{a_r}{r^{\alpha}}=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\alpha}{r^{\alpha}(\alpha-r)} \tag{s2}$$

ここで

$$(-1)^r\frac{\alpha}{r^{\alpha}(\alpha-r)}\equiv b_r$$

と置けば

$$\frac{b_{r+1}}{b_r} = \frac{(-1)^{r+1}\dfrac{\alpha}{(r+1)^{\alpha}(\alpha - r - 1)}}{(-1)^{r}\dfrac{\alpha}{r^{\alpha}(\alpha - r)}} = -\frac{r^{\alpha}(\alpha - r)}{(r+1)^{\alpha}(\alpha - r - 1)}$$

これより

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{b_{r+1}}{b_r}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\frac{r^{\alpha}(\alpha - r)}{(r+1)^{\alpha}(\alpha - r - 1)}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\frac{\alpha\, r^{\alpha} - r^{\alpha+1}}{\alpha(r+1)^{\alpha} - (r+1)^{\alpha+1}}\right|$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left|\frac{r^{\alpha+1}}{(r+1)^{\alpha+1}}\frac{\dfrac{\alpha\, r^{\alpha}}{r^{\alpha+1}} - 1}{\dfrac{\alpha(r+1)^{\alpha}}{(r+1)^{\alpha+1}} - 1}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{r}}\right)^{\alpha+1}\frac{\dfrac{\alpha}{r} - 1}{\dfrac{\alpha}{r+1} - 1}\right| = 1$$

判定不能であるから、ラーベ(Raabe)の収束判定法を試みる。

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\left|\frac{b_r}{b_{r+1}}\right| - 1\right) = \lim_{r\to\infty} r\left(\left|\frac{(r+1)^{\alpha}(\alpha - r - 1)}{r^{\alpha}(\alpha - r)}\right| - 1\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(\left|\frac{r(r+1)^{\alpha}}{r^{\alpha}} - \frac{r(r+1)^{\alpha}}{r^{\alpha}(\alpha - r)}\right| - r\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(\left|r\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha} - \left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha}\frac{r}{\alpha - r}\right| - r\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha}\left|r + \frac{1}{1-\alpha/r}\right| - r\right)$$

十分大きなrについては$1-\alpha/r>0$であるから

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\left|\frac{b_r}{b_{r+1}}\right| - 1\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha} r + \left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha/r} - r\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty} r\left\{\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha} - 1\right\} + \lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha/r}$$

ここで

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\frac{1}{r^{s}} = 1 + \frac{\alpha}{1!}\frac{1}{r^{1}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\frac{1}{r^{2}} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\frac{1}{r^{3}} + \cdots$$

であるから、

$$r\left\{\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha} - 1\right\} = r\sum_{s=1}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\frac{1}{r^{s}} = \sum_{s=1}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\frac{1}{r^{s-1}} = \alpha + \sum_{s=2}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\frac{1}{r^{s-1}}$$

よって

$$\lim_{r\to\infty} r\left\{\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha} - 1\right\} = \alpha + \lim_{r\to\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\frac{1}{r^{s-1}} = \alpha$$

また、

$$\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha/r} = 1$$

結局、

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\left|\frac{b_r}{b_{r+1}}\right| -1\right) = \alpha+1$$

かくして、$\alpha>0$ ならば (s2) は絶対収束する。すると*Lemma* 3.2.2 に従って (s1) も絶対収束する。

定理 3･2･4

任意の実数 $\alpha>0$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r} = 2^{\alpha} \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{\alpha}{r} = 0 \tag{2.2}$$

証明

Lemma 3.2.3 により、非整数 $\alpha>0$ に対して $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}$ は絶対収束する。

従って、定理 3･2･1 (1.1) により

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}1^r = (1+1)^{\alpha} = 2^{\alpha} \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(-1)^r = (1-1)^{\alpha} = 0 \tag{2.2}$$

Note

(2.1) は実は $\alpha>-1$ ならば成立することが知られている。(但し、それは条件収束である。)
例えば、$\alpha=-0.9$ の場合、右辺は $2^{-0.9}=0.53588673\cdots$ であり、左辺がこの値に収束するようには見える。しかし、収束が非常に遅くてその確認が困難である。そこでこれにクノップ変換を施して収束を加速すると次のようになる。

$$\text{fa}[\alpha\_, q\_, m\_] := \sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\text{Binomial}[k, r]\ \text{Binomial}[\alpha, r]$$

$$\text{SetPrecision}\left[\text{fa}\left[-0.9, \frac{3}{5}, 15\right], 10\right] \qquad 0.5358867304$$

(2.1) が $2^{-0.9}$ に収束していることが確認できる。

3･2･3 一般二項定理

定理 3･2･1 はさらに一般化できる。

定理 3･2･5

α を任意の実数とするとき、$|x_1|\ge|x_2|$ なる x_1, x_2 について次式が成立する。

$$(x_1+x_2)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x_1^{\alpha-r}x_2^{r} \qquad (x_1=x_2 \text{ is allowed at } \alpha>0) \tag{3.1}$$

証明

$|x_1| \ge |x_2|$ のとき $1 > \dfrac{|x_2|}{|x_1|} = \left|\dfrac{x_2}{x_1}\right|$ 故、定理 3･2･1 (1.1) を用いて

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2)^\alpha &= \left\{x_1\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\right\}^\alpha = x_1^\alpha\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha \\
&= x_1^\alpha\left\{1 + \binom{\alpha}{1}\frac{x_2}{x_1} + \binom{\alpha}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \binom{\alpha}{3}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 + \cdots\right\} \\
&= \binom{\alpha}{0}x_1^\alpha + \binom{\alpha}{1}x_1^{\alpha-1}x_2^1 + \binom{\alpha}{2}x_1^{\alpha-2}x_2^2 + \binom{\alpha}{3}x_1^{\alpha-3}x_2^3 + \cdots \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x_1^{\alpha-r}x_2^r
\end{aligned}
$$

Note

証明過程から明らかなように、$|x_1| \ge |x_2|$ ならば (3.1) は絶対収束する。

但し $|x_1| = |x_2|$ は $\alpha > 0$ のときに許される。

このことは一般多項定理において重要となる。

3・3　多項定理

定理 3・3・0

実数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ と非負の整数 $n, r_1, r_2, \cdots, r_m$ について次式が成立する。

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^n=\sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_m!}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_m^{r_m} \tag{0.1}$$

但しΣは $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$ となるような全ての $\left(r_1, r_2, \cdots, r_m\right)$ の組の総和を表す。

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^n=\sum\frac{n!}{\left(n-r_1\cdots-r_{m-1}\right)!\,r_1!\cdots r_{m-1}!}x_1^{n-r_1\cdots-r_{m-1}}x_2^{r_1}\cdots x_m^{r_{m-1}} \tag{0.2}$$

但しΣは可能な全ての $\left(n, r_1, r_2, \cdots, r_{m-1}\right)$ の組の総和を表す。

(0.1) は周知であるので証明は略す。また、(0.2) が (0.1) と同義なることも直ちに明らかである。これらは定理と言うよりもむしろ定義に近い。

多項係数の生成方法

定理 3・3・0 は理論的には難しくない。難しいのは但し書きである。これは重複組合せ（m 個の異なるものから重複を許して n 個取る）を実際に生成することであるが、4項以上にもなるとこれが容易でない。筆者はこれらを漏れなく生成する式を考案したので、次にこれを定理として提示する。(1.2) は但し書きを累次級数（多重級数）により実現するものであり、(1.1) はそれを対角級数（半多重級数）により実現するものである。

定理 3・3・1

実数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ と自然数 n について次式が成立する。

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^n=\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}}x_1^{n-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}}x_m^{r_{m-1}} \tag{1.1}$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{n}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{n}\binom{n}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}}\cdots\binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}}$$
$$\times x_1^{n-r_1-\cdots-r_{m-1}}x_2^{r_1}x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}} \tag{1.2}$$

証明

定理 3・1・1 より次式が成立する。

$$\left(x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^n=\sum_{r_1=0}^{n}{}_nC_{r_1}x_1^{n-r_1}\left(x_2+x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^{r_1} \tag{1}$$

$$\left(x_2+x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^{r_1}=\sum_{r_2=0}^{r_1}{}_{r_1}C_{r_2}x_2^{r_1-r_2}\left(x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^{r_2} \tag{2}$$

$$\left(x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^{r_2}=\sum_{r_3=0}^{r_2}{}_{r_2}C_{r_3}x_3^{r_2-r_3}\left(x_4+\cdots+x_m\right)^{r_3} \tag{3}$$

$\vdots$

$$\left(x_{m-2}+x_{m-1}+x_m\right)^{r_{m-3}} = \sum_{r_{m-2}=0}^{r_{m-3}} {}_{r_{m-3}}C_{r_{m-2}}\, x_{m-2}^{r_{m-3}-r_{m-2}} \left(x_{m-1}+x_m\right)^{r_{m-2}} \tag{m−2}$$

$$\left(x_{m-1}+x_m\right)^{r_{m-2}} = \sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}} {}_{r_{m-2}}C_{r_{m-1}}\, x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}}\, x_m^{r_{m-1}} \tag{m−1}$$

(2), (3), ⋯ , (m−2), (m−1) を順次 (1) へ代入し、二項係数を一般二項係数に置換すれば (1.1) を得る。

次に、定理 3･4･1 (後述)によれば、$\left|x_1\right| \ge \left|x_2+x_3+\cdots+x_m\right|$ のとき

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^{\alpha} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}} \binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}} \cdots \binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}}$$
$$\times\ x_1^{\alpha-\left(r_1+\cdots+r_{m-1}\right)}\, x_2^{r_1} x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}}$$

実数 α を非負の整数 n に置換すれば

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^{n} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{\infty} \binom{n}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}} \binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}} \cdots \binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}}$$
$$\times\ x_1^{n-\left(r_1+\cdots+r_{m-1}\right)}\, x_2^{r_1} x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}}$$

$\binom{n}{r} = 0 \ \ for\ \ r>n,\ \ r=1,2,3,\cdots$ であるから、これは有限多重級数である。従って条件 $\left|x_1\right| \ge \left|x_2+x_3+\cdots+x_m\right|$ は不要である。このままでも良いが、Σの上限 ∞ を n に書き換えて (1.2) を得る。

cf.

(1.2) は (0.2) に帰着する。何故なら

$$\binom{n}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}} \binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}} \cdots \binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}} = \frac{n\,!}{\left(n-r_1\cdots-r_{m-1}\right)!\ r_1!\cdots r_{m-1}!}$$

例1 $\left(\boldsymbol{x_1+x_2+x_3}\right)^{\boldsymbol{4}}$ の展開

(1.1) を用いれば

$$\left(x_1+x_2+x_3\right)^4 = \sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{r} \binom{4}{r}\binom{r}{s} x_1^{4-r} x_2^{r-s} x_3^{s}$$
$$= \binom{4}{0} x_1^4 \sum_{s=0}^{0}\binom{0}{s} x_2^{0-s}x_3^{s}$$
$$+ \binom{4}{1} x_1^3 \sum_{s=0}^{1}\binom{1}{s} x_2^{1-s}x_3^{s} + \binom{4}{2} x_1^2 \sum_{s=0}^{2}\binom{2}{s} x_2^{2-s}x_3^{s}$$
$$+ \binom{4}{3} x_1^1 \sum_{s=0}^{3}\binom{3}{s} x_2^{3-s}x_3^{s} + \binom{4}{4} x_1^0 \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s} x_2^{4-s}x_3^{s}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & x_1^4 \\
& + 4x_1^3(x_2+x_3) \\
& + 6x_1^2(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2) \\
& + 4x_1(x_2^3+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+x_3^3) \\
& + x_2^4+4x_2^3x_3+6x_2^2x_3^2+4x_2x_3^3+x_3^4
\end{aligned}
$$

(1.2) を用いれば

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^4 &= \sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{r+s}\binom{r+s}{s}x_1^{4-r-s}x_2^r x_3^s \\
&= \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{0+s}\binom{0+s}{s}x_1^{4-s}x_2^0x_3^s \\
&\quad + \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{1+s}\binom{1+s}{s}x_1^{3-s}x_2^1x_3^s + \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{2+s}\binom{2+s}{s}x_1^{2-s}x_2^2x_3^s \\
&\quad + \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{3+s}\binom{3+s}{s}x_1^{1-s}x_2^3x_3^s + \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{4+s}\binom{4+s}{s}x_1^{0-s}x_2^4x_3^s \\
&= x_1^4 + 4x_1^3x_3 + 6x_1^2x_3^2 + 4x_1x_3^3 + x_3^4 \\
&\quad + 4x_1^3x_2 + 12x_1^2x_2x_3 + 12x_1x_2x_3^2 + 4x_2x_3^3 + 0 \\
&\quad + 6x_1^2x_2^2 + 12x_1x_2^2x_3 + 6x_2^2x_3^2 + 0 + 0 \\
&\quad + 4x_1x_2^3 + 4x_2^3x_3 + 0 + 0 + 0 \\
&\quad + x_2^4 + 0 + 0 + 0 + 0
\end{aligned}
$$

これを対角線に沿って集計したものが上であることが判る。

例2 $(x_1+x_2+x_3+x_4)^3$ の展開

今度は数式処理ソフトを使って定理の式を展開する。(1.1) と (1.2) により展開し、それぞれ等価の検証を行っている。

```
fl[n_] := (x1 + x2 + x3 + x4)^n
Expand[fl[3]]
```

$x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3+3x_1^2x_3+6x_1x_2x_3+3x_2^2x_3+3x_1x_3^2+3x_2x_3^2+x_3^3+3x_1^2x_4$
$+6x_1x_2x_4+3x_2^2x_4+6x_1x_3x_4+6x_2x_3x_4+3x_3^2x_4+3x_1x_4^2+3x_2x_4^2+3x_3x_4^2+x_4^3$

$$\texttt{fr}[n\_] := \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\texttt{Binomial}[n,r]\,\texttt{Binomial}[r,s]\,\texttt{Binomial}[s,t] \times x_1^{n-r}x_2^{r-s}x_3^{s-t}x_4^{t}$$

```
fr[3]
```

$x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3+3x_1^2x_3+6x_1x_2x_3+3x_2^2x_3+3x_1x_3^2+3x_2x_3^2+x_3^3+3x_1^2x_4$
$+6x_1x_2x_4+3x_2^2x_4+6x_1x_3x_4+6x_2x_3x_4+3x_3^2x_4+3x_1x_4^2+3x_2x_4^2+3x_3x_4^2+x_4^3$

```
Expand[fl[3]] == fr[3]
True
```

```
fs[n_] := Sum[Binomial[n, r + s + t] Binomial[r + s + t, s + t]
    × Binomial[s + t, t] x1^(n-r-s-t) x2^r x3^s x4^t, {r, 0, n}, {s, 0, n}, {t, 0, n}]
```

$$fs[n\_] := \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n} \mathrm{Binomial}[n, r+s+t]\,\mathrm{Binomial}[r+s+t, s+t] \times \mathrm{Binomial}[s+t, t]\, x_1^{n-r-s-t} x_2^{r} x_3^{s} x_4^{t}$$

N[fs[3]]

$$x_1^3+3.x_1^2 x_2+3.x_1 x_2^2+x_2^3+3.x_1^2 x_3+6.x_1 x_2 x_3+3.x_2^2 x_3+3.x_1 x_3^2+3.x_2 x_3^2+x_3^3+3.x_1^2 x_4 +6.x_1 x_2 x_4+3.x_2^2 x_4+6.x_1 x_3 x_4+6.x_2 x_3 x_4+3.x_3^2 x_4+3.x_1 x_4^2+3.x_2 x_4^2+3.x_3 x_4^2+x_4^3$$

Expand[f1[3]] == fs[3]

True

多項係数の総和

$$\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}} {}_nC_{r_1}\,{}_{r_1}C_{r_2}\cdots{}_{r_{m-2}}C_{r_{m-1}} = m^n \tag{1.1″}$$

証明

$$\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r = \sum_{r=0}^{n}{}_nC_r 1^{n-r}1^r = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}{}_nC_r\,{}_rC_s = \sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\left(\sum_{s=0}^{r}{}_rC_s\right) = \sum_{r=0}^{n}{}_nC_r 1^{n-r}2^r = (1+2)^n = 3^n$$

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}{}_nC_r\,{}_rC_s\,{}_sC_t = \sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\left(\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}{}_rC_s\,{}_sC_t\right) = \sum_{r=0}^{n}{}_nC_r 1^{n-r}3^r = (1+3)^n = 4^n$$

以下、帰納法により与式を得る。

例　$(x_1+x_2+x_3)^4$ の多項係数の総和

例1 の多項係数の総和を求めると次のようになる。

$$1+(4+4)+(6+12+6)+(4+12+12+4)+(1+4+6+4+1) = 81 = 3^4$$

3・4　一般多項定理

一般多項定理なるものの存否を筆者は知らないが、関数の多積の高階微積分に不可欠なのでここに提示する。

定理 3・4・1

実数 α および $x_1, x_2, \cdots, x_m$ $s.t.$ $|x_1| \geq |x_2+x_3+\cdots+x_m|$ について次式が成立する。

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^{\alpha} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} x_1^{\alpha-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}}x_m^{r_{m-1}} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}}\cdots\binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}} \times x_1^{\alpha-(r_1+\cdots+r_{m-1})}x_2^{r_1}x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}} \tag{1.2}$$

但し、$|x_1| = |x_2+x_3+\cdots+x_m|$ は $\alpha > 0$ のときに許される。

証明

定理 3・2・5 より、$|x_1| \geq |x_2+x_3+\cdots+x_m|$ のとき次式が成立する。

$$\left(x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^{\alpha} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r_1}x_1^{\alpha-r_1}\left(x_2+x_3+x_4+\cdots+x_m\right)^{r_1}$$

ここで右辺は絶対収束する。

他方、定理 3・3・1 (1.1) より次式が成立する。

$$\left(x_2+x_3+\cdots+x_m\right)^{r_1} = \sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{r_1}{r_2}\binom{r_2}{r_3}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} x_2^{r_1-r_2}x_3^{r_2-r_3}\cdots x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}}x_m^{r_{m-1}}$$

後者を前者に代入すれば

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^{\alpha} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} x_1^{\alpha-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}}x_m^{r_{m-1}} \tag{1.1}$$

当然にこの右辺も絶対収束する。

次に、多重級数とその累次級数をそれぞれ次のように記述しよう。

$$\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_m=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_m} \quad , \quad \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_m=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_{m-1},r_m}$$

この累次級数を対角級数に変換するには次の操作をすれば良い。(「2 多重級数と指数関数 」)

r_{m-1} を $r_{m-1}-r_m$ に置換し、右から1番目の ∞ を r_{m-1} に置換する。

r_{m-2} を $r_{m-2}-r_{m-1}$ に置換し、右から2番目の ∞ を r_{m-2} に置換する。

$\vdots$

r_1 を r_1-r_2 に置換し、右から $(m-1)$ 番目の ∞ を r_1 に置換する。

それならば、対角級数を元の累次級数に戻すにはこの反対の操作をすれば良い、即ち

r_1 を r_1+r_2 に置換し、左から2番目の Σ 上の r_1 を ∞ に置換する。

r_2 を r_2+r_3 に置換し、左から3番目の Σ 上の r_2 を ∞ に置換する。

⋮

r_{m-1} を $r_{m-1}+r_m$ に置換し、左から $(m-1)$ 番目の Σ 上の r_{m-1} を ∞ に置換する。

例えば

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^\alpha=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\binom{r_2}{r_3}x_1^{\alpha-r_1}x_2^{r_1-r_2}x_3^{r_2-r_3}x_4^{r_3}$$

$$r_1\to r_1+r_2,\ \sum^{r_1}\to\sum^{\infty};\quad=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\sum_{r_3=0}^{r_2}\binom{\alpha}{r_1+r_2}\binom{r_1+r_2}{r_2}\binom{r_2}{r_3}x_1^{\alpha-r_1-r_2}x_2^{r_1}x_3^{r_2-r_3}x_4^{r_3}$$

$$r_2\to r_2+r_3,\ \sum^{r_2}\to\sum^{\infty};\quad=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\sum_{r_3=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r_1+r_2+r_3}\binom{r_1+r_2+r_3}{r_2+r_3}\binom{r_2+r_3}{r_3}x_1^{\alpha-r_1-r_2-r_3}x_2^{r_1}x_3^{r_2}x_4^{r_3}$$

かくて、この操作を (1.1) に対して行えば次式を得る。

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^\alpha=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}}\cdots\binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}}$$
$$\times\ x_1^{\alpha-(r_1+\cdots+r_{m-1})}x_2^{r_1}x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}}\tag{1.2}$$

(1.1) が絶対収束するから、この並べ替えは許される。

例1 $(x_1+x_2+x_3)^{3.9}$ の展開

(1.1) を用いれば

$$(x_1+x_2+x_3)^{3.9}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{3.9}{r}\binom{r}{s}x_1^{3.9-r}x_2^{r-s}x_3^{s}$$
$$=\binom{3.9}{0}x_1^{3.9}\sum_{s=0}^{0}\binom{0}{s}x_2^{0-s}x_3^{s}+\binom{3.9}{1}x_1^{2.9}\sum_{s=0}^{1}\binom{1}{s}x_2^{1-s}x_3^{s}$$
$$+\binom{3.9}{2}x_1^{1.9}\sum_{s=0}^{2}\binom{2}{s}x_2^{2-s}x_3^{s}+\binom{3.9}{3}x_1^{0.9}\sum_{s=0}^{3}\binom{3}{s}x_2^{3-s}x_3^{s}$$
$$+\binom{3.9}{4}\frac{1}{x_1^{0.1}}\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}x_2^{4-s}x_3^{s}+\binom{4.1}{5}\frac{1}{x_1^{1.1}}\sum_{s=0}^{5}\binom{5}{s}x_2^{5-s}x_3^{s}+\cdots$$
$$=x_1^{3.9}$$
$$+\ 3.9\,x_1^{2.9}(x_2+x_3)$$
$$+\ 5.655\,x_1^{1.9}(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)$$
$$+\ 3.5815\,x_1^{0.9}(x_2^3+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+x_3^3)$$
$$+\ \frac{0.805838}{x_1^{0.1}}(x_2^4+4x_2^3x_3+6x_2^2x_3^2+4x_2x_3^3+x_3^4)$$
$$-\ \frac{0.0161168}{x_1^{1.1}}(x_2^5+5x_2^4x_3+10x_2^3x_3^2+10x_2^3x_3^2+5x_2x_3^4+x_3^5)$$

⋮

(1.2) を用いれば

$$(x_1+x_2+x_3)^{3.9} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{3.9}{r+s}\binom{r+s}{s}x_1^{3.9-r-s}x_2^{r}x_3^{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\binom{3.9}{0+s}\binom{0+s}{s}x_1^{3.9-s}x_2^{0}x_3^{s} + \sum_{s=0}^{\infty}\binom{3.9}{1+s}\binom{1+s}{s}x_1^{2.9-s}x_2^{1}x_3^{s}$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty}\binom{3.9}{2+s}\binom{2+s}{s}x_1^{1.9-s}x_2^{2}x_3^{s} + \sum_{s=0}^{\infty}\binom{3.9}{3+s}\binom{3+s}{s}x_1^{0.9-s}x_2^{3}x_3^{s}$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty}\binom{3.9}{4+s}\binom{4+s}{s}x_1^{-0.1-s}x_2^{4}x_3^{s} + \cdots$$

$$= x_1^{3.9} + 3.9x_1^{29}x_3 + 5.655x_1^{19}x_3^2 + 3.5815x_1^{09}x_3^3 + \frac{0.805838x_3^4}{x_1^{0.1}} + \cdots$$

$$+ 3.9x_1^{29}x_2 + 11.31x_1^{19}x_2x_3 + 10.7445x_1^{09}x_2x_3^2 + \frac{3.22335x_2x_3^3}{x_1^{0.1}} - \frac{0.0805838}{x_1^{1.1}}$$

$$+ 5.655x_1^{19}x_2^2 + 10.7445x_1^{09}x_2^2x_3 + \frac{4.83503x_2^2x_3^2}{x_1^{0.1}} - \frac{0.161168x_2^2x_3^3}{x_1^{1.1}} + \cdots$$

$$+ 3.5815x_1^{09}x_2^3 + \frac{3.22335x_2^3x_3}{x_1^{0.1}} - \frac{0.161168x_2^3x_3^2}{x_1^{1.1}} + \frac{0.0590948x_2^3x_3^3}{x_1^{2.1}} + \cdots$$

$$+ \frac{0.805838x_2^4}{x_1^{0.1}} - \frac{0.0805838x_2^4x_3}{x_1^{1.1}} + \frac{0.0443211x_2^4x_3^2}{x_1^{2.1}} - \frac{0.0310247x_2^4x_3^3}{x_1^{3.1}} + \cdots$$

$$\vdots$$

これを対角線に沿って集計したものが上であることが判る。

例2 $(a+b+c+d)^{2.9}$

```
Clear[p]; p = 2.9;
f1[a_, b_, c_, d_] := (a + b + c + d)^p
f1[5, -2, 3, 4]
794.328

fr[a_, b_, c_, d_] := Sum[Binomial[p, r] Binomial[r, s] Binomial[s, t] × a^(p-r) b^(r-s) c^(s-t) d^t, {r, 0, ∞}, {s, 0, r}, {t, 0, s}]
N[fr[5, -2, 3, 4]]
794.328

fs[a_, b_, c_, d_] := Sum[Binomial[p, r + s + t] Binomial[r + s + t, s + t] × Binomial[s + t, t] a^(p-r-s-t) b^r c^s d^t, {r, 0, ∞}, {s, 0, ∞}, {t, 0, ∞}]
fs[5, -2, 3, 4]
794.328
```

この数値例では $a = b+c+d$ であるが、(1.1) と (1.2) は一致している。

一般多項係数の総和

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} \Leftarrow m^{\alpha} \tag{1.1″}$$

さすがに

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} = m^{\alpha}$$

とはならない。何故ならば、$x_1=x_2=\cdots=x_m=1$ は条件 $|x_1| \ge |x_2+x_3+\cdots+x_m|$ を満たさないからである。この部分和を

$$S_n = \sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}}$$

とするとき、$n\to\infty$ とすると S_n は振動発散する。そして m^{α} はこの発散級数の中心値になる。実際、S_n にクノップ変換を施せば m^{α} の近似値を高精度で得ることができる。 しかしながら、それは級数にはならず、漸近展開になる。

2007.07.06
2016.02.13 updated
2016.02.22 renewed
2022.02.07 updated（ 定理 3･4･1 の証明の5行目 ）

Kano Kono

宇宙人の数学