4　高階積分

4・1　高階原始関数と高階積分

4・1・1　高階原始関数

定義4・1・1

$n=1,2,3,\cdots$ について、関数 $f^{<n-1>}(x)$ の原始関数を $f^{<n>}(x)$ と記述し、これを関数 $f(x)$ の **高階原始関数** と言う。

$f^{<n>}(x)$ は不定積分 $\int f^{<n-1>}(x)dx+c_n$ を意味することも、積分関数 $\int_{a_n}^{x} f^{<n-1>}(x)dx$ を意味することもある。

関数 $f(x)$ の原始関数は大文字を使って $F(x)$ と記述されることが多い。では関数 $F(x)$ の原始関数やそのまた原始関数はどう表すかとなると、例えば $G(x),H(x),\cdots$ 等が考えられる。しかしこの記法では27階とかの原始関数を表すのは困難なので、筆者は高階微分の記法 (n) を採用して $F(x),\ G(x),\ H(x),\ \cdots$ を $f^{(-1)}(x),f^{(-2)}(x),f^{(-3)}(x),\ \cdots$ と表し使っていた。そのうちマイナス記号が邪魔になったので $(-n)$ を $[n]$ と表そうと考えたがこれはガウスの記号と間違えそうなので、未使用の山切括弧<>を用い $f^{<1>}(x),f^{<2>}(x),f^{<3>}(x),\ \cdots$ と表すに至った。この記法の威力は章を追う毎に明らかになる。

例

$$(\sin x)^{<1>} = -\cos x+c_1 \qquad c_1 \text{ は任意の定数}$$

$$(\sin x)^{<2>} = -\sin x+c_1x+c_2 \qquad c_1,c_2 \text{ は任意の定数}$$

$$(\sin x)^{<3>} = \cos x+c_1x^2+c_2x+c_3 \qquad c_1,c_2,c_3 \text{ は任意の定数}$$

4・1・2　高階積分

定義4・1・2

関数 f を1つの独立変数 x について繰り返し積分することを**高階積分**と言い、次のように記述する。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)dx^n \quad \left\{ =\int_{a_n}^{x}\left(\cdots\int_{a_3}^{x}\left(\int_{a_2}^{x}\left(\int_{a_1}^{x} f(x)dx\right)dx\right)dx\cdots\right)dx \right\}$$

そして

$a_k=a \quad for \ \ k=1,\ \cdots,n$ のとき、 これを**固定下限の高階積分**と呼び、
$a_k \ne a \quad for\ some\ k$ 　のとき、 これを**可変下限の高階積分**と呼ぶ。

多重積分と高階積分の相違点

多重積分は n 次元つまり n 個の独立変数について積分を行うものである。これに対して高階積分は1次元つまり1個の独立変数について n 回積分を行うものであり、重回積分とも呼ばれる。

卑近な表現をすれば、例えば3重積分は $f(x,y,z)$ を縦・横・上下に積分するのに対し、3階

積分は$f(x)$を縦（座標上では横）にばかり3回積分するものである。

高階積分の表記方法としては多重積分の式をそのまま使って

$$\int_{a_n}^{x}\int_{a_{n-1}}^{t_n}\cdots\int_{a_1}^{t_2} f(t_1)\,dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

とするものが多いが、この記法は余りに煩雑かつ不便である。よって本稿ではこれらの問題解消と変数の節約のため、$t_1, t_2, \cdots, t_n$を全てxで表し $dt_1 dt_2 \cdots dt_n$もdx^nで表し、定義のように表記した。

例

$$\int_0^x\int_0^x e^x dx^2 = \int_0^x\left(\int_0^x e^x dx\right)dx = \int_0^x\left(e^x - 1\right)dx = e^x - x - 1$$

$$\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^x e^x dx^2 = \int_{-\infty}^x\left(\int_{-\infty}^x e^x dx\right)dx = \int_{-\infty}^x e^x\,dx = e^x$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \sin x\,dx^3 = \int_0^x\int_0^x(1-\cos x)\,dx^2 = \int_0^x(x-\sin x)\,dx = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^x\int_{\frac{2\pi}{2}}^x\int_{\frac{1\pi}{2}}^x \sin x\,dx^3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^x\int_{\frac{2\pi}{2}}^x(-\cos x)\,dx^2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^x(-\sin x)\,dx = \cos x$$

4･1･3　高階積分の基本定理

1階積分の場合、原始関数と積分との関係は次の定理で示されている。

微分積分の基本定理

f を閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とし、F をf の任意の原始関数とするとき、$x \in [a, b]$ に対して次式が成立する。なお、$F(a)$は積分定数と呼ばれている。

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

高階積分ついても次の定理が成立する。

定理4･1･3

$f^{<r>}$ $r=0,1,\cdots,n$ を閉区間 I 上の連続関数とし、$f^{<r+1>}$を $f^{<r>}$ の任意の原始関数とするとき、$a_r, x \in I$ に対して次式が成立する。

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x f(x)\,dx^n = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a_{n-r})\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r \tag{1.1}$$

特に$a_r = a$ $\quad for\ \ r=1,2,\cdots,n$ のとき

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^n = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.2}$$

証明

先ず、微分積分の基本定理により次の諸式が成立する。

$$\int_{a_1}^{x} f^{<0>} dx = f^{<1>} - f_{a_1}^{<1>} \tag{01}$$

$$\int_{a_2}^{x} f^{<1>} dx = f^{<2>} - f_{a_2}^{<2>} \tag{12}$$

$$\int_{a_3}^{x} f^{<2>} dx = f^{<3>} - f_{a_3}^{<3>} \tag{23}$$

$$\int_{a_4}^{x} f^{<3>} dx = f^{<4>} - f_{a_4}^{<4>} \tag{34}$$

$$\vdots$$

(01)の両辺を a_2 から x まで積分すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} dx^2 = \int_{a_2}^{x} f^{<1>} dx - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_2}^{x} dx$$

(12)を代入すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} dx^2 = f^{<2>} - f_{a_2}^{<2>} - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_2}^{x} dx$$

この両辺を a_3 から x まで積分すると

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f(x)\, dx^3 = \int_{a_3}^{x} f^{<2>} dx - f_{a_2}^{<2>} \int_{a_3}^{x} dx - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2$$

(23)を代入すると

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f(x)\, dx^3 = f^{<3>} - f_{a_3}^{<3>} - f_{a_2}^{<2>} \int_{a_3}^{x} dx - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2$$

この両辺を a_4 から x まで積分すると

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)\, dx^4 = \int_{a_4}^{x} f^{<3>} dx - f_{a_3}^{<3>} \int_{a_4}^{x} dx - f_{a_2}^{<2>} \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x} dx^2 - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^3$$

(34)を代入すると

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)\, dx^4 = f^{<4>} - f_{a_4}^{<4>} - f_{a_3}^{<3>} \int_{a_4}^{x} dx - f_{a_2}^{<2>} \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x} dx^2 - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^3$$

以下帰納法により次式を得る。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)\, dx^n = f^{<n>} - f_{a_n}^{<n>} - \sum_{r=1}^{n-1} f_{a_{n-r}}^{<n-r>} \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

そして $f_{a_n}^{<n>}$ をΣ中に押し込んで (1.1) を得る。

特に $a_r = a \quad for \quad r=1,2,\cdots,n$ のとき

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} dx^r = \frac{(x-a)^r}{r!} \quad r=0,1,\cdots,n-1$$

であるから

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)dx^n = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1} f_a^{<n-r>} \frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.2}$$

積分定数多項式

定理中の式に含まれる $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a_{n-r}) \int_{a_n}^x \cdots \int_{a_{n-r+1}}^x dx^r$, $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a) \frac{(x-a)^r}{r!}$ を**積分定数多項式** と呼ぶことにする。

(1.1) の場合、これを多項式で表示することは大変困難である。ちなみにこれを強引に計算して $f(x)$ の4階積分を多項式で表示すると次のようになる。5階以上になると手が付けられない。

$$\int_{a_4}^x \cdots \int_{a_1}^x f(x)dx^4 = f^{<4>} - f_{a_4}^{<4>} - f_{a_3}^{<3>} \frac{(x-a_4)^1}{1!} - f_{a_2}^{<2>} \frac{(x-a_4)(x-2a_3+a_4)}{2!}$$
$$- f_{a_1}^{<1>} \frac{(x-a_4)\left(x^2+a_4 x - 3a_2 x + 6a_2 a_3 - 3a_2 a_4 - 3a_3^2 + a_4^2\right)}{3!}$$

(1.2) の剰余項は既に多項式で表示されており $n-1$ 次であることが一目で分かる。この式はさらに次のように陽表的に書くこともできる。但し、あまりメリットはない。

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)dx^n = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1} c_{r+1} x^r , \quad c_{r+1} = \sum_{s=r}^{n-1} (-1)^{s-r} \frac{f_a^{<n-s>}}{s!} {}_sC_{s-r} a^{s-r}$$

例1

$$\int_{a_2}^x \int_{a_1}^x f(x)dx^2 = f^{<2>} - f_{a_2}^{<2>} - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_2}^x dx = f^{<2>} - f_{a_2}^{<2>} - f_{a_1}^{<1>} \frac{(x-a_2)^1}{1!}$$

ここで $f = e^x$ とし、これの任意の高階原始関数はそれぞれ次のようであったとする。

$$\left(e^x\right)^{<1>} = e^x + c_1 , \quad \left(e^x\right)^{<2>} = e^x + c_1 x + c_2$$

これらを上式に代入すれば

左辺: $\displaystyle\int_{a_2}^x \int_{a_1}^x e^x dx^2 = e^x - e^{a_2} - e^{a_1} \frac{(x-a_2)^1}{1!}$

右辺: $\displaystyle\left(e^x\right)^{<2>} - \left(e^x\right)_{a_2}^{<2>} - \left(e^x\right)_{a_1}^{<1>} \frac{(x-a_2)^1}{1!}$

$$= e^x + c_1 x + c_2 - e^{a_2} - c_1 a_2 - c_2 - \left(e^{a_1} + c_1\right) \frac{(x-a_2)^1}{1!}$$
$$= e^x - e^{a_2} - e^{a_1} \frac{(x-a_2)^1}{1!}$$

例2

$$\int_{a_3}^x \int_{a_2}^x \int_{a_1}^x f(x)dx^3 = f^{<3>} - f_{a_3}^{<3>} - f_{a_2}^{<2>} \int_{a_3}^x dx - f_{a_1}^{<1>} \int_{a_3}^x \int_{a_2}^x dx^2$$

$$=f^{<3>}-f_{a_3}^{<3>}-f_{a_2}^{<2>}\frac{(x-a_3)^1}{1!}-f_{a_1}^{<1>}\frac{(x-a_3)(x-2a_2+a_3)}{2!}$$

ここで $f=\sin x$ とし、これらの任意の高階原始関数はそれぞれ次のようであったとする。

$$(\sin x)^{<1>}=-\cos x\ ,\ (\sin x)^{<2>}=-\sin x\ ,\ (\sin x)^{<3>}=\cos x$$

これらを上式に代入すれば

左辺: $\displaystyle\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}\sin x\,dx^3$

$$=\cos x-\cos a_3+\frac{(x^2-a_3^2)\cos a_1}{2!}+(x-a_3)\sin a_2-a_2(x-a_3)\cos a_1$$

右辺: $\displaystyle\cos x-\cos a_3+\sin a_2\frac{(x-a_3)^1}{1!}+\cos a_1\frac{(x-a_3)(x-2a_2+a_3)}{2!}$

$$=\cos x-\cos a_3+(x-a_3)\sin a_2+\frac{(x^2-a_3^2)\cos a_1}{2!}-a_2(x-a_3)\cos a_1$$

4･1･4 直系と傍系

定義4･1･4

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f(x)\,dx^n=f^{<n>}(x)-\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a_{n-r})\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r \tag{1.1}$$

において、

積分定数多項式が0であるとき、$\displaystyle\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f(x)\,dx^n$ を **直系高階積分** と言い、

これに等しい関数 を **直系高階原始関数** と言う。

積分定数多項式が0でないとき、$\displaystyle\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f(x)\,dx^n$ を **傍系高階積分** と言い、

これに等しい関数 を **傍系高階原始関数** と言う。

これらは(1.2) においても同様である。

直系高階原始関数を簡単に言えば、**積分定数を無視して $f(x)$ を x について何回も積分したものが直系高階原始関数** である。

例

左辺: 傍系高階積分　　右辺: 傍系高階原始関数

$$\int_{3}^{x}\int_{2}^{x}\int_{1}^{x}\sin x\,dx^3=\cos x-\cos 3+\sin 2\cdot\frac{(x-3)^1}{1!}+\cos 1\cdot\frac{(x-3)(x-2\cdot 2+3)}{2!}$$

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}e^x\,dx^2\qquad=e^x-1-x$$

左辺: 直系高階積分　　右辺: 直系高階原始関数

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{2\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\sin x\,dx^3=\cos x$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}e^x dx^2 \qquad =e^x$$

4･1･5　高階積分が直系であるための必要条件

定理4･1･3 の（1.1）において、1の高階積分は自由な値を取り得るから、積分定数多項式が0であるためには、$f^{<r>}(a_r)=0\ \ r=1,2,\cdots,n$ であるべきことが解かる。これは後に重要となるので定理として述べておく。

定理4･1･5

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f(x)dx^n=f^{<n>}(x)-\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a_{n-r})\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r \tag{1.1}$$

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x}f(x)dx^n=f^{<n>}(x)-\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.2}$$

において、これらの高階積分が直系であるための必要条件はそれぞれ次のとおりである。

$$f^{<r>}(a_r)=0 \qquad r=1,2,\cdots,n$$

$$f^{<r>}(a)=0 \qquad r=1,2,\cdots,n$$

即ち、**高階積分が直系であるための必要条件は、1階から $\boldsymbol{n}$ 階までの全ての階において積分下限 $\boldsymbol{a_r}$ または $\boldsymbol{a}$ が高階原始関数 $\boldsymbol{f^{<r>}}$ の零点であることである。**

Note

これは必要条件であって十分条件ではない。例えば、

$$f^{<r>}(x)=\int_{a_r}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f(x)dx^r \qquad r=1,2,\cdots,n$$

と置けば、この高階積分が直系であろうとなかろうと必ず $f^{<r>}(a_r)=0\ \ r=1,2,\cdots,n$ になる。

$f(x)=e^x$ の場合で言えば

$$f^{<r>}(x)=\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}e^x dx^r \quad r=1,2$$

と置けば　$f^{<1>}(x)=e^x-1$, $f^{<2>}(x)=e^x-1-x$ となり、積分下限 0 はこれらの零点となる。然るにこれらを（1.2）に代入すれば

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}e^x dx^2=e^x-1-x-(e^0-1-0)\frac{x^0}{0!}-(e^0-1)\frac{x^1}{1!}=e^x-1-x$$

これは直系高階積分ではない。

4・2　Riemann-Liouville 積分と高階積分

高階積分 $\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)\,dx^n$ は　$a_k = a$, $k=1,2,\cdots n$ のとき、Riemann-Liouville 積分と呼ばれる単積分に帰着できる。

定理4・2・1（ Cauchyの重回積分の公式 ）

$f(x)$ を連続積分可能な関数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき次式が成立する。

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f(x)\,dx^n = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt \tag{2.1}$$

証明

先ず、Riemann-Liouville 積分は次のように展開される。

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1}\frac{(x-a)^r}{r!}f^{<n-r>}(a) \tag{2.2}$$

何故ならば、

$$\frac{1}{\Gamma(1)}\int_{a}^{x}(x-t)^{0}f(t)\,dt = \int_{a}^{x}f(t)\,dt = \left[f^{<1>}(t)\right]_a^x$$

$$= f^{<1>}(x) - f^{<1>}(a)$$

$$\frac{1}{\Gamma(2)}\int_{a}^{x}(x-t)^{1}f(t)\,dt = \frac{1}{1!}\left\{\left[(x-t)^1 f^{<1>}(t)\right]_a^x + \int_{a}^{x}f^{<1>}(t)\,dt\right\}$$

$$= -(x-a)^1 f^{<1>}(a) + f^{<2>}(x) - f^{<2>}(a)$$

$$\frac{1}{\Gamma(3)}\int_{a}^{x}(x-t)^{2}f(t)\,dt = \frac{1}{2!}\left\{\left[(x-t)^2 f^{<1>}(t)\right]_a^x + 2\int_{a}^{x}(x-t)^1 f^{<1>}(t)\,dt\right\}$$

$$= -\frac{1}{2!}(x-a)^2 f^{<1>}(a) + \left[(x-t)^1 f^{<2>}(t)\right]_a^x + \int_{a}^{x}f^{<2>}(t)\,dt$$

$$= -\frac{(x-a)^2}{2!}f^{<1>}(a) - \frac{(x-a)^1}{1!}f^{<2>}(a) + f^{<3>}(x) - f^{<3>}(a)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1}\frac{(x-a)^r}{r!}f^{<n-r>}(a) \tag{2.2}$$

一方、定理4・1・3 の (1.2) は次のようであった。

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f(x)\,dx^n = f^{<n>}(x) - \sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.2}$$

これらより与式を得る。

Q.E.D.

Note

この定理は固定下限の高階積分が Riemann-Liouville 積分と等しいことを示している。従って左辺の高階積分を右辺のRiemann-Liouville 数値積分積分で検証することが出来る。

この定理はまた可変下限の高階積分には Riemann-Liouville 積分が適用できないことを示して

いる。従って、$sin\,x$, $cos\,x$ 等の高階積分に Riemann-Liouville 積分は使えない。正確に言うと、使うことはできるが、無理やり使うと必ず傍系高階積分になる。

Riemann-Liouville 積分とテイラーの定理

証明中の (2.2) を次のように並べ替えて見る。

$$f^{<n>}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} + \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \tag{2.2}$$

するとこれは n 階原始関数 $f^{<n>}(x)$ の a の周りのテイラー展開であり Riemann-Liouville 積分はその剰余項であることに気付く。

実際、これから通常のテイラー展開を導出できる。$f(x)$ に係る積分演算子のインデックスを $-n$ ほどシフトすると

$$f^{<0>}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} + \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \tag{2.2$_0$}$$

まさしくこれは $f(x)$ の a の周りのテイラー展開であり、$f^{(n)}(x)$ の Riemann-Liouville 積分はベルヌーイ型と呼ばれる剰余項である。

そして積分に関する第1平均値定理によれば、$g(t)$ を $[a,b]$ 上の連続実関数とし $\phi(t)$ を (a,b) 上で符号を変えない積分可能関数とするとき、次式を満たす $\xi \in (a,b)$ が存在する。

$$\int_a^b g(t)\phi(t)\,dt = g(\xi)\int_a^b \phi(t)\,dt$$

これを (2.2$_0$) に適用すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\Big[-(x-t)^n\Big]_a^x = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)\end{aligned}$$

即ちラグランジュ型の剰余項を得る。

4･3 ベキ関数等の高階積分

公式4･3･1 ベキ関数の高階積分

$\Gamma(z)$ をゼータ関数とするとき次式が成立する。

(1) 基本式

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha dx^n = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)} x^{\alpha+n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$\int_\infty^x \cdots \int_\infty^x x^\alpha dx^n = (-1)^n \frac{\Gamma(-\alpha-n)}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha+n} \qquad (\alpha < -n)$$

(2) 線形式

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \cdots \int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^\alpha dx^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)} (ax+b)^{\alpha+n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$\int_\infty^x \cdots \int_\infty^x (ax+b)^\alpha dx^n = \left(-\frac{1}{a}\right)^n \frac{\Gamma(-\alpha-n)}{\Gamma(-\alpha)} (ax+b)^{\alpha+n} \qquad (\alpha < -n)$$

導出

$\alpha \geqq 0$ のとき、$(ax+b)^\alpha$ の高階原始関数の零点は $-b/a$ である。よって

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{1}{\alpha+1} (ax+b)^{\alpha+1}$$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^\alpha dx^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (ax+b)^{\alpha+2}$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \cdots \int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^\alpha dx^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} (ax+b)^{\alpha+n}$$

これに

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)}$$

を代入して線形式を得、さらに $a=1,\ b=0$ と置いて基本式を得る。

$\alpha < -n$ のとき、$\beta = -\alpha$ と置けば $(ax+b)^\alpha = (ax+b)^{-\beta}$ で、この高階原始関数の零点は ∞ である。よって

$$\int_\infty^x (ax+b)^{-\beta} dx = \frac{1}{a} \frac{1}{-\beta+1} (ax+b)^{-\beta+1}$$

$$\int_\infty^x \int_\infty^x (ax+b)^{-\beta} dx^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{(-\beta+1)(-\beta+2)} (ax+b)^{-\beta+2}$$

$$\vdots$$

$$\int_\infty^x \cdots \int_\infty^x (ax+b)^{-\beta} dx^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{1}{(-\beta+1)(-\beta+2)\cdots(-\beta+n)} (ax+b)^{-\beta+n}$$

ところが

$$\frac{1}{(-\beta+1)(-\beta+2)\cdots(-\beta+n)} = \frac{(-1)^n}{(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n)}$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma[1+\{\beta-(n+1)\}]}{\Gamma\{1+(\beta-1)\}} = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta)}$$

であるからこれを代入すれば

$$\int_\infty^x \cdots \int_\infty^x (ax+b)^{-\beta} dx^n = \left(-\frac{1}{a}\right)^n \frac{\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta)} (ax+b)^{-\beta+n}$$

そこで β を $-\alpha$ に置き換えれば線形式を得、さらに $a=1,\ b=0$ と置いて基本式を得る。

Note

$-n \leqq \alpha < 0$ のときはベキ関数の高階積分を定義しない。このときは積分下限が不規則に変化するからである。例えば次のようなことになる。

$$\int_0^x \int_1^x \int_\infty^x x^{-2} dx^3 = -x(\log x - 1) \quad , \quad \int_0^x \int_\infty^x \int_\infty^x x^{-\frac{5}{2}} dx^3 = \frac{8}{3}\sqrt{x}$$

例

x^ 5/2 の3階積分

```
a = 5 / 2; Clear t;
HI[n_] := Gamma[1 + a] / Gamma[1 + a + n] x^(a+n)
RL[n_] := 1 / Gamma[n] ∫_0^x (x - t)^(n-1) t^a dt
```

$$HI[3] \qquad \frac{8\,x^{11/2}}{693} \qquad\qquad RL[3] \qquad \frac{8\,x^{11/2}}{693}$$

x^ -3 の2階積分

```
a = -3; Clear t;
HI[n_] := (-1)^n Gamma[-a - n] / Gamma[-a] x^(a+n)
RL[n_] := 1 / Gamma[n] ∫_∞^x (x - t)^(n-1) t^a dt
```

$$HI[2] \qquad \frac{1}{2\,x} \qquad\qquad RL[2] \qquad \frac{1}{2\,x},\ \mathrm{Im}[x] \neq 0 \ || \ x > 0$$

公式4・3・2　指数関数の高階積分

(1)　基本式

$$\int_{\mp\infty}^x \cdots \int_{\mp\infty}^x e^{\pm x} dx^n \quad = (\pm 1)^n e^{\pm x}$$

(2)　線形式

$$\int_{\mp\infty}^x \cdots \int_{\mp\infty}^x e^{ax+b} dx^n \quad = \left(\frac{1}{a}\right)^n e^{ax+b} \qquad \begin{pmatrix} a>0 : - \\ a<0 : + \end{pmatrix}$$

導出

$a>0$ のとき e^{ax+b} の高階原始関数の零点は $-\infty$ であり、$a<0$ のとき e^{ax+b} の高階原始関数の零点は $+\infty$ である。よって線形式を得、さらに $a=\pm 1$, $b=0$ と置いて基本式を得る。

公式4･3･3　対数関数の高階積分

（1）　基本式

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log x \, dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

（2）　線形式

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \cdots \int_{-\frac{b}{a}}^x \log(ax+b) dx^n = \frac{1}{n!}\left(x+\frac{b}{a}\right)^n \left\{\log(ax+b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}$$

導出

$$\int_0^x x^m \log x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

であるから、

$$\int_0^x \log x \, dx = x(\log x - 1) = \frac{x^1}{1!}\log x - \frac{x^1}{1!}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{x^1}{1!}\left(\log x - \frac{1}{1}\right)$$

$$\int_0^x\int_0^x \log x \, dx^2 = \int_0^x x(\log x - 1) dx = \int_0^x x \log x \, dx - \int_0^x x \, dx$$

$$= \frac{1}{1!}\left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{2^2}\right) - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2!}\log x - \frac{x^2}{2!2} - \frac{x^2}{2!}$$

$$= \frac{x^2}{2!}\log x - \frac{x^2}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2!}\left\{\log x - \left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \log x \, dx^3 = \frac{1}{2!}\int_0^x x^2 \log x \, dx - \frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)\int_0^x x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{3^2}\right) - \frac{1}{3!}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^3$$

$$= \frac{x^3}{3!}\log x - \frac{x^3}{3!3} - \frac{1}{3!}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^3$$

$$= \frac{x^3}{3!}\log x - \frac{x^3}{3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{x^3}{3!}\left\{\log x - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right\}$$

以下帰納法により基本式を得る。線形式も $t=ax+b$ と置いて同様の計算をして得られる。

例 log x の3階積分

```
Clear t;
HI[n_] := x^n/n! (Log[x] - HarmonicNumber[n])
RL[n_] := 1/Gamma[n] ∫_0^x (x - t)^(n-1) Log[t] dt
```

```
HI[3]
```

$\frac{1}{6} x^3 \left(-\frac{11}{6} + \mathrm{Log}[x]\right)$

```
RL[3]
```

$\frac{1}{36} x^3 (-11 + 6\,\mathrm{Log}[x])$

公式4･3･4　$\sin x\,,\cos x$ の高階積分

(1)　基本式

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{2\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\sin x\,dx^n = \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{0\pi}{2}}^{x}\cos x\,dx^n = \cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)$$

(2)　線形式

$$\int_{\frac{n\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x}\cdots\int_{\frac{1\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x}\sin(ax+b)\,dx^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n\sin\left(ax+b-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x}\cdots\int_{\frac{0\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x}\cos(ax+b)\,dx^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\left(ax+b-\frac{n\pi}{2}\right)$$

導出

$f(x)=\sin x$ の直系高階原始関数とその零点は

$$f^{<1>}(x) = -\cos x = \sin\left(x-\frac{1\pi}{2}\right) \quad , \quad x=\frac{1\pi}{2}$$

$$f^{<2>}(x) = -\sin x = \sin\left(x-\frac{2\pi}{2}\right) \quad , \quad x=\frac{2\pi}{2}$$

$$f^{<3>}(x) = \cos x = \sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad x=\frac{3\pi}{2}$$

$$f^{<4>}(x) = \sin x = \sin\left(x-\frac{4\pi}{2}\right) \quad , \quad x=\frac{4\pi}{2}$$

$$\vdots$$

であるから基本式を得る。線形式も $t=ax+b$ と置いて同様の計算をして得られる。

$\cos x$ については、左辺の積分下限を $\pi/2$ 差し引き、右辺の $\sin$ を $\cos$ に変えるだけで得られる。

$\sin x\,,\cos x$ の項別高階積分

$\sin x\,,\cos x$ の高階積分の下限を共通下限 0 とすれば次のような項別高階積分を得られる。右辺に積分定数多項式を含んでいることから判るように、**これらは傍系高階積分である。**

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\sin x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1+n)!}x^{2k+1+n}$$

$$= \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\cos x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+n)!}x^{2k+n}$$

$$= \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cos\frac{k\pi}{2}$$

書き下せば次のとおり。これらは直系高階積分とは全く異なる。

$$\int_0^x \sin x dx = -\cos x + 1 \quad , \quad \int_0^x \cos x dx = \sin x$$

$$\int_0^x\int_0^x \sin x dx^2 = -\sin x + \frac{x^1}{1!} \quad , \quad \int_0^x\int_0^x \cos x dx^2 = -\cos x + 1$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \sin x dx^3 = \cos x + \frac{x^2}{2!} - 1 \quad , \quad \int_0^x\int_0^x\int_0^x \cos x dx^3 = -\sin x + \frac{x^1}{1!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sin x dx^4 = \sin x - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} \quad , \quad \int_0^x\cdots\int_0^x \cos x dx^4 = \cos x + \frac{x^2}{2!} - 1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

公式4·3·5　$\boldsymbol{\sinh x, \cosh x}$の高階積分

（1）　基本式

$$\int_{\frac{n\pi i}{2}}^x \cdots \int_{\frac{2\pi i}{2}}^x \int_{\frac{1\pi i}{2}}^x \sinh x dx^n = i^n \sinh\left(x - \frac{n\pi i}{2}\right) = \frac{e^x - (-1)^n e^{-x}}{2}$$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi i}{2}}^x \cdots \int_{\frac{1\pi i}{2}}^x \int_{\frac{0\pi i}{2}}^x \cosh x dx^n = i^n \cosh\left(x - \frac{n\pi i}{2}\right) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$$

（2）　線形式

$$\int_{\frac{n\pi i}{2a} - \frac{b}{a}}^x \cdots \int_{\frac{1\pi i}{2a} - \frac{b}{a}}^x \sinh(ax+b) dx^n = \left(\frac{i}{a}\right)^n \sinh\left(ax+b - \frac{n\pi i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^n \left\{e^{ax+b} - (-1)^n e^{-(ax+b)}\right\}$$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi i}{2a} - \frac{b}{a}}^x \cdots \int_{\frac{0\pi i}{2a} - \frac{b}{a}}^x \cosh(ax+b) dx^n = \left(\frac{i}{a}\right)^n \cosh\left(ax+b - \frac{n\pi i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^n \left\{e^{ax+b} + (-1)^n e^{-(ax+b)}\right\}$$

導出

$f(x) = \sinh x$ の直系高階原始関数とその零点は

$$f^{<1>}(x) = \cosh x = i \sinh\left(x - \frac{1\pi i}{2}\right) \quad , \quad x = \frac{1\pi i}{2}$$

$$f^{<2>}(x) = \sinh x = i^2 \sinh\left(x - \frac{2\pi i}{2}\right) \quad , \quad x = \frac{2\pi i}{2}$$

$$f^{<3>}(x) = \cosh x \quad = i^3 \sinh\left(x - \frac{3\pi i}{2}\right) \qquad , \quad x = \frac{3\pi i}{2}$$

$$f^{<4>}(x) = \sinh x \quad = i^4 \sinh\left(x - \frac{4\pi i}{2}\right) \qquad , \quad x = \frac{4\pi i}{2}$$

$$\vdots$$

であるから基本式を得る。線形式も $t=ax+b$ と置いて同様の計算をして得られる。$\cosh x$ については、左辺の積分下限を $\pi i/2$ 差し引き、右辺の $\sinh$ を $\cosh$ に変えるだけで得られる。

次に

$$\sinh\left(ax+b - \frac{n\pi i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{e^{ax+b-\frac{n\pi i}{2}} - e^{-\left(ax+b-\frac{n\pi i}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{n\pi i}{2}}}{2}\left\{e^{ax+b} - e^{-(ax+b-n\pi i)}\right\} = \frac{\left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{-n}}{2}\left\{e^{ax+b} - \left(e^{\pi i}\right)^n e^{-(ax+b)}\right\}$$

$$= \frac{i^{-n}}{2}\left\{e^{ax+b} - (-1)^n e^{-(ax+b)}\right\}$$

$$\cosh\left(ax+b - \frac{n\pi i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{e^{ax+b-\frac{n\pi i}{2}} + e^{-\left(ax+b-\frac{n\pi i}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{i^{-n}}{2}\left\{e^{ax+b} + (-1)^n e^{-(ax+b)}\right\}$$

であるからこれらを用いて指数表示式が得られる。

sinhx , *coshx* の項別高階積分

$\sinh x$, $\cosh x$ の高階積分の下限を共通下限 0 とすれば次のような項別高階積分を得る。右辺に積分定数多項式を含んでいることから判るように、これらは傍系高階積分である。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \sinh x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1+n)!} x^{2k+1+n}$$

$$= i^n \sinh\left(x - \frac{n\pi i}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} i^{-k} \sinh\frac{k\pi i}{2}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \cosh x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+n)!} x^{2k+n}$$

$$= i^n \cosh\left(x - \frac{n\pi i}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} i^{-k} \cosh\frac{k\pi i}{2}$$

4･4 逆三角関数の高階積分

公式4･4･1 $\boldsymbol{tan^{-1}x\,,\,cot^{-1}x}$ の高階積分

$\lfloor\ \rfloor, \lceil\ \rceil, \psi(x)$ をそれぞれ床関数、天井関数、ディ･ガンマ関数とするとき、2以上の自然数 n について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x tan^{-1}x\,dx^n = \frac{tan^{-1}x}{n!}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k{}_nC_{n-2k}\,x^{n-2k}$$
$$+\frac{log\left(1+x^2\right)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$
$$-\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x cot^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}cot^{-1}x - \frac{tan^{-1}x}{n!}\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k{}_nC_{n-2k}\,x^{n-2k}$$
$$-\frac{log\left(1+x^2\right)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$
$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}$$

証明

$$\int_0^x tan^{-1}x\,dx = x\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}log\left(1+x^2\right)$$
$$=\frac{1}{1!}{}_1C_1\,x\,tan^{-1}x - \frac{1}{2\cdot 1!}{}_1C_0\,x^0 log\left(1+x^2\right)$$

$$\int_0^x\int_0^x tan^{-1}x\,dx^2 = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)tan^{-1}x - \frac{x}{2}log\left(1+x^2\right) + \frac{x}{2}$$
$$=\frac{1}{2!}\left({}_2C_2\,x^2-{}_2C_0\right)tan^{-1}x - \frac{1}{2\cdot 2!}{}_2C_1\,x^1 log\left(1+x^2\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x}{1!}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x tan^{-1}x\,dx^3 = \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}\right)tan^{-1}x - \left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{12}\right)log\left(1+x^2\right) + \frac{5x^2}{12}$$
$$=\frac{1}{3!}\left({}_3C_3\,x^3-{}_3C_1\,x\right)tan^{-1}x$$
$$-\frac{1}{2\cdot 3!}\left({}_3C_2\,x^2-{}_3C_0\,x^0\right)log\left(1+x^2\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{2!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x tan^{-1}x\,dx^4 = \left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{24}\right)tan^{-1}x - \left(\frac{x^3}{12}-\frac{x}{12}\right)log\left(1+x^2\right) + \frac{13x^3}{72} - \frac{x}{24}$$
$$=\frac{1}{4!}\left({}_4C_4\,x^4-{}_4C_2\,x^2+{}_4C_0\right)tan^{-1}x - \frac{1}{2\cdot 4!}\left({}_4C_3\,x^3-{}_4C_1\,x^1\right)log\left(1+x^2\right)$$
$$+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{x^3}{3!} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{x}{1!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan^{-1}x\,dx^5=\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{24}\right)\tan^{-1}x-\left(\frac{x^4}{48}-\frac{x^2}{24}+\frac{1}{240}\right)\log\left(1+x^2\right)+\frac{77x^4}{1440}-\frac{3x^2}{80}$$

$$=\frac{1}{5!}\left({}_5C_5x^5-{}_5C_3x^3+{}_5C_1x\right)\tan^{-1}x-\frac{1}{2\cdot 5!}\left({}_5C_4x^4-{}_5C_2x^2+{}_5C_0x^0\right)\log\left(1+x^2\right)$$

$$+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^4}{4!}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^2}{2!}$$

以下、帰納法により与式を得る。 $\cot^{-1}x$ についても同様の計算によって与式を得る。

例 $\tan^{-1}x$ の4階積分

```
Clear [t]
```

$$\text{HI}[n\_]:=\frac{\text{ArcTan}[x]}{n!}\sum_{k=0}^{\text{Floor}\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\text{Binomial}[n,\,n-2k]\,x^{n-2k}+$$

$$\frac{\text{Log}\left[1+x^2\right]}{2\,n!}\sum_{k=1}^{\text{Ceiling}\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\text{Binomial}[n,\,n+1-2k]\,x^{n+1-2k}-$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{\text{Floor}\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\,\text{Binomial}[n,\,n+1-2r]\,(\text{PolyGamma}[1+n]-\text{PolyGamma}[2r])\,x^{n+1-2r}$$

$$\text{RL}[n\_]:=\frac{1}{\text{Gamma}[n]}\int_0^x(x-t)^{n-1}\,\text{ArcTan}[t]\,dt$$

Simplify[HI [4]] $\quad \frac{1}{72}\left(3\left(1-6x^2+x^4\right)\text{ArcTan}[x]+x\left(-3+13x^2-6\left(-1+x^2\right)\text{Log}\left[1+x^2\right]\right)\right)$

RL [4] $\quad \frac{1}{72}\left(3\left(1-6x^2+x^4\right)\text{ArcTan}[x]+x\left(-3+13x^2-6\left(-1+x^2\right)\text{Log}\left[1+x^2\right]\right)\right)$

公式4･4･2 $\sin^{-1}x,\ \cos^{-1}x$ の高階積分

$\downarrow,\uparrow$ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x \sin^{-1}x\,dx^n=\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}\sin^{-1}x$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2}$$

但し、$a_1=i\cdot 1.5088\cdots,\ a_2=0,\ a_3=-i\cdot 0.4758\cdots,\ a_4=0,\cdots$

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x \cos^{-1}x\,dx^n=\frac{x^n}{n!}\cos^{-1}x-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}\sin^{-1}x$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2}$$

但し、$a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=$ 複素数, $a_4=0,\ \cdots$

証明

$$\int_{a_1}^x \sin^{-1}x\,dx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{x^1}{0!!^2 \cdot 1!} sin^{-1}x + \frac{1 \cdot (-1)!!^2}{1!!^2} \frac{x^0}{0!} \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} sin^{-1}x\, dx^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) sin^{-1}x + \frac{3x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

$$= \left(\frac{x^2}{0!!^2 \cdot 2!} + \frac{x^0}{2!!^2 \cdot 0!} \right) sin^{-1}x + \left(\frac{1 \cdot (-1)!!^2}{1!!^2} - \frac{1 \cdot 0!!^2}{2!!^2} \right) \frac{x^1}{1!} \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} sin^{-1}x\, dx^3 = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} \right) sin^{-1}x + \left(\frac{11x^2}{36} + \frac{1}{9} \right) \sqrt{1-x^2}$$

$$= \left(\frac{x^3}{0!!^2 \cdot 3!} + \frac{x^1}{2!!^2 \cdot 1!} \right) sin^{-1}x$$

$$+ \left(\left(\frac{1 \cdot (-1)!!^2}{1!!^2} - \frac{2 \cdot 0!!^2}{2!!^2} + \frac{1 \cdot 1!!^2}{3!!^2} \right) \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot (-1)!!^2}{3!!^2} \frac{x^0}{0!} \right) \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} sin^{-1}x\, dx^4 = \left(\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{1}{64} \right) sin^{-1}x + \left(\frac{25x^3}{288} + \frac{55\,x}{576} \right) \sqrt{1-x^2}$$

$$= \left(\frac{x^4}{0!!^2 \cdot 4!} + \frac{x^2}{2!!^2 \cdot 2!} + \frac{x^0}{4!!^2 \cdot 0!} \right) sin^{-1}x$$

$$+ \left(\left(\frac{1 \cdot (-1)!!^2}{1!!^2} - \frac{3 \cdot 0!!^2}{2!!^2} + \frac{3 \cdot 1!!^2}{3!!^2} - \frac{1 \cdot 2!!^2}{4!!^2} \right) \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{1 \cdot (-1)!!^2}{3!!^2} - \frac{1 \cdot 0!!^2}{4!!^2} \right) \frac{x^1}{1!} \right)$$

$$\times \sqrt{1-x^2}$$

以下、帰納法により与式を得る。$cos^{-1}x$ についても同様の計算によって与式を得る。

Note

積分下限 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は上の公式の各階の右辺を0と置いた超越方程式の解である。

例えば $sin^{-1}x$ の場合、a_1, a_2 はそれぞれ次の超越方程式の解である。

$$x sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) sin^{-1}x + \frac{3x}{4}\sqrt{1-x^2} = 0$$

一方、この公式において積分下限を固定下限 0 とすると次のような傍系高階積分が得られる。両者の差異は積分定数多項式の有無のみである。

公式4･4･2' $sin^{-1}x$, $cos^{-1}x$ の傍系高階積分

↓ , ↑ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sin^{-1}x\, dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} \frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2 (n-2r)!} sin^{-1}x$$

$$+ \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} \sum_{s=0}^{n-2r+1} (-1)^s {}_{n-2r+1}C_s \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!} \sqrt{1-x^2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \cos^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}\cos^{-1}x - \sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}\sin^{-1}x$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

例　$\cos^{-1}x$ の傍系4階積分

```
Clear [t]
```

$$\mathrm{CI}[n\_] := \frac{x^n}{n!}\mathrm{ArcCos}[x] - \sum_{r=1}^{\mathrm{Floor}[\frac{n}{2}]}\frac{x^{n-2r}}{((2r)!!)^2(n-2r)!}\mathrm{ArcSin}[x] - \sum_{r=1}^{\mathrm{Ceiling}[\frac{n}{2}]}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s\,\mathrm{Binomial}[n-2r+1,s]\frac{((s-1)!!)^2}{((s+2r-1)!!)^2}\times\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2} + \sum_{r=1}^{\mathrm{Ceiling}[\frac{n}{2}]}\frac{x^{n-2r+1}}{((2r-1)!!)^2(n-2r+1)!}$$

$$\mathrm{RL}[n\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[n]}\int_0^x (x-t)^{n-1}\mathrm{ArcCos}[t]\,dt$$

Expand [CI [3]] $\quad \frac{1}{9}+\frac{x^2}{2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{9}-\frac{11}{36}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{ArcCos}[x]-\frac{1}{4}x\,\mathrm{ArcSin}[x]$

Expand [RL [3]] $\quad \frac{1}{9}+\frac{x^2}{2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{9}-\frac{11}{36}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{ArcCos}[x]-\frac{1}{4}x\,\mathrm{ArcSin}[x]$

公式4･4･3　$\sec^{-1}x, \csc^{-1}x$ の高階積分

↓ ,↑ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、2以上の自然数 n について次式が成立する。

$$\int_1^x\cdots\int_1^x \sec^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}\sec^{-1}x$$

$$-\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{x^2-1}$$

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x \csc^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}\csc^{-1}x$$

$$+\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{x^2-1}$$

但し、$a_1 , a_2 , \cdots , a_n$ は全て複素数。

証明

$$\int_1^x sec^{-1}x\,dx = x\,sec^{-1}x - log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$= \frac{x^1}{1!}sec^{-1}x - \frac{(-1)!!}{0!!1!}\frac{x^0}{0!}log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\int_1^x\int_1^x sec^{-1}x\,dx^2 = \frac{x^2}{2}sec^{-1}x - x\,log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2}{2!}sec^{-1}x - \frac{(-1)!!}{0!!1!}\frac{x^1}{1!}log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{x^0}{0!}\frac{(-1)!!^2}{2\cdot 1!!^2}\sqrt{x^2-1}$$

$$\int_1^x\int_1^x\int_1^x sec^{-1}x\,dx^3 = \frac{x^3}{6}sec^{-1}x - \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{12}\right)log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{5x}{12}\sqrt{x^2-1}$$

$$= \frac{x^3}{3!}sec^{-1}x - \left(\frac{(-1)!!}{0!!1!}\frac{x^2}{2!}+\frac{1!!}{2!!3!}\frac{x^0}{0!}\right)log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$+ \frac{x^1}{1!}\left(\frac{(-1)!!^2}{2\cdot 1!!^2}-\frac{0!!^2}{3\cdot 2!!^2}\right)\sqrt{x^2-1}$$

$$\int_1^x\cdots\int_1^x sec^{-1}x\,dx^4=\frac{x^4}{24}sec^{-1}x - \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x}{12}\right)log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\left(\frac{13x^2}{72}+\frac{1}{36}\right)\sqrt{x^2-1}$$

$$= \frac{x^4}{4!}sec^{-1}x - \left(\frac{(-1)!!}{0!!1!}\frac{x^3}{3!}+\frac{1!!}{2!!3!}\frac{x^1}{1!}\right)log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$+\left(\frac{x^2}{2!}\left(\frac{(-1)!!^2}{2\cdot 1!!^2}-\frac{2\cdot 0!!^2}{3\cdot 2!!^2}+\frac{1!!^2}{4\cdot 3!!^2}\right)+\frac{x^0}{0!}\frac{(-1)!!^2}{4\cdot 3!!^2}\right)\sqrt{x^2-1}$$

以下、帰納法により与式を得る。$csc^{-1}x$ についても同様の計算によって与式を得る。

例　$\boldsymbol{sec^{-1}x}$ の5階積分

Higher integral of arcsec x

```
• HI := n-> x^n/n!*arcsec(x) - ln(x+sqrt(x^2-1))
              * sum((2*r-1)!!/((2*r)!!*(2*r+1)!)
              *(x^(n-2*r-1)/(n-2*r-1)!), r=0..floor((n-1)/2))
          + sqrt(x^2-1) * sum(sum((-1)^s*binomial(n-2*r,s)/(2*r+
              *((s-1)!!^2/(s+2*r-1)!!^2), s=0..n-2*r)
              *(x^(n-2*r)/(n-2*r)!), r=1..floor(n/2))
```

$$n \to \frac{x^n}{n!}\cdot \mathrm{arcsec}(x) - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{2\cdot r-1!!}{2\cdot r!!\cdot(2\cdot r+1)!}\cdot\frac{x^{n-2\cdot r-1}}{(n-2\cdot r-1)!}\right)$$

$$+\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\sum_{r=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\sum_{s=0}^{n-2\cdot r}\frac{(-1)^s\cdot\binom{n-2\cdot r}{s}}{2\cdot r+s}\cdot\frac{s-1!!^2}{s+2\cdot r-1!!^2}\right)\cdot\frac{x^{n-2\cdot r}}{(n-2\cdot r)!}\right)$$

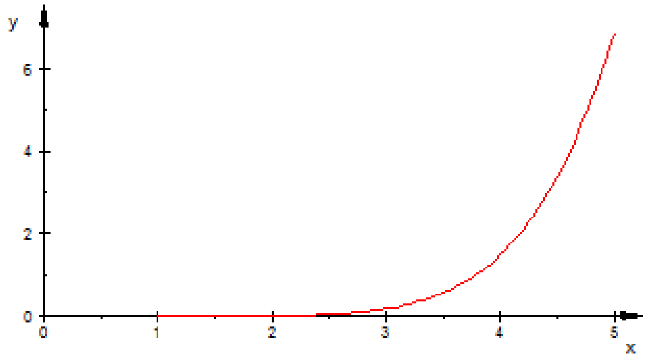
Riemann-Liouville Integral

```
• RL := n-> 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*arcsec(t),t=1..x)
```

$$n \to \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int_1^x (x-t)^{n-1} \cdot \operatorname{arcsec}(t)\,\mathrm{d}t$$

Blue: Riemann-Liouville Integral , Red: Higer Integral

```
• plotfunc2d(RL(5),HI(5), x=0..5)
```



両辺は完全に重なっているので青(Riemann-Liouville積分)は見ることが出来ない。

一方、この公式において積分下限を固定下限 1 とすると次のような傍系高階積分が得られる。両者の差異は積分定数多項式の有無のみである。

公式4･4･3' $csc^{-1}x$ の傍系高階積分

$\downarrow,\uparrow$ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、2以上の自然数 n について次式が成立する。

$$\int_1^x \cdots \int_1^x csc^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}csc^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!} \frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!} log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} \sum_{s=0}^{n-2r} (-1)^s \frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s} \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2\cdot n!}\sum_{r=0}^{n-1} {}_nC_r (x-1)^r$$

4·5 逆双曲線関数の高階積分

公式4·5·1 $\tanh^{-1}x$, $\coth^{-1}x$ の高階積分

$\downarrow, \uparrow, \psi(x)$ をそれぞれ床関数、天井関数、ディ·ガンマ関数とするとき、2以上の自然数 n について次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \tanh^{-1}x\, dx^n = \frac{\tanh^{-1}x}{n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} + \frac{\log(1-x^2)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow} {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} - \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \coth^{-1}x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\coth^{-1}x + \frac{\tanh^{-1}x}{n!}\sum_{k=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} + \frac{\log(1-x^2)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow} {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} - \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r} \qquad |x|<1$$

証明

$\tanh^{-1}x$ を4階まで積分すると次のようになる。

$$\int_0^x \tanh^{-1}x\, dx = x\tanh^{-1}x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)$$

$$\int_0^x\int_0^x \tanh^{-1}x\, dx^2 = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\tanh^{-1}x + \frac{x}{2}\log(1-x^2) - \frac{x}{2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \tanh^{-1}x\, dx^3 = \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}\right)\tanh^{-1}x + \left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{12}\right)\log(1-x^2) - \frac{5x^2}{12}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \tanh^{-1}x\, dx^4 = \left(\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{24}\right)\tanh^{-1}x + \left(\frac{x^3}{12}+\frac{x}{12}\right)\log(1-x^2) - \frac{13x^3}{72} - \frac{x}{24}$$

これらの係数の絶対値は 公式4·4·1 の絶対値と全て一致している。よって公式4·4·1の符号を変えることによって簡単にこれらの係数が得られる。$\coth^{-1}x$ についても同様である。

例 $\coth^{-1}x$ の3階積分

```
Clear [t]

HI[n_] := x^n/n! ArcCoth[x] + ArcTanh[x]/n! Sum[Binomial[n, n - 2 k] x^(n-2 k), {k, 1, Floor[n/2]}] +
    Log[1 - x^2]/(2 n!) Sum[Binomial[n, n + 1 - 2 k] x^(n+1-2 k), {k, 1, Ceiling[n/2]}] -
```

```
1/n! Sum[Binomial[n, n + 1 - 2 r] (PolyGamma[1 + n] - PolyGamma[2 r]) x^(n+1-2 r), {r, 1, Floor[n/2]}]

RL[n_] := 1/Gamma[n] ∫_0^x (x - t)^(n-1) ArcCoth[t] dt

Simplify[HI[3]]   1/12 (-5 x^2 + 2 x^3 ArcCoth[x] + 6 x ArcTanh[x] + (1 + 3 x^2) Log[1 - x^2])

RL[3]   1/12 (-5 x^2 + 2 x^3 ArcCoth[x] + 6 x ArcTanh[x] + (1 + 3 x^2) Log[1 - x]
             + Log[1 + x] + 3 x^2 Log[1 + x])
```

公式4･5･2　$sinh^{-1}x$, $cosh^{-1}x$ の高階積分

↓ ,↑ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} sinh^{-1}x\,dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^r x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}sinh^{-1}x$$
$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^{r+s}{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1+x^2}$$

但し、$a_1 = 1.5088\cdots$, $a_2 = 0$, $a_3 = -0.4758\cdots$, $a_4 = 0$, $\cdots$

$$\int_{1}^{x}\cdots\int_{1}^{x} cosh^{-1}x\,dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}cosh^{-1}x$$
$$-\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^{s}{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{x^2-1}$$

証明

$sinh^{-1}x$ を4階まで積分すると次のようになる。

$$\int_{a_1}^{x} sinh^{-1}x\,dx = x\,sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$$

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} sinh^{-1}x\,dx^2 = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)sinh^{-1}x - \frac{3x}{4}\sqrt{1+x^2}$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} sinh^{-1}x\,dx^3 = \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x}{4}\right)sinh^{-1}x - \left(\frac{11x^2}{36}-\frac{1}{9}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} sinh^{-1}x\,dx^4 = \left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{64}\right)sinh^{-1}x - \left(\frac{25x^3}{288}-\frac{55\,x}{576}\right)\sqrt{1+x^2}$$

これらの係数の絶対値は 公式4･4･2 の絶対値と全て一致している。よって公式4･4･2の符号を変えることによって簡単にこれらの係数が得られる。$cosh^{-1}x$ についても同様である。

例　$cosh^{-1}x$ の4階積分

```
Clear[t]
```

$$HI[n\_] := \sum_{r=0}^{Floor[\frac{n}{2}]} \frac{x^{n-2r}}{((2r)!!)^2 (n-2r)!} ArcCosh[x] - \sum_{r=1}^{Ceiling[\frac{n}{2}]} \sum_{s=0}^{n-2r+1} (-1)^s Binomial[n-2r+1, s] \frac{((s-1)!!)^2}{((s+2r-1)!!)^2} \times \frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!} \sqrt{x^2-1}$$

$$RL[n\_] := \frac{1}{Gamma[n]} \int_1^x (x-t)^{n-1} ArcCosh[t] \, dt$$

Simplify[HI[4]] $\quad \frac{1}{576} \left(-5 x \sqrt{-1+x^2} \left(11+10x^2\right)+3\left(3+24x^2+8x^4\right) ArcCosh[x]\right)$

RL[4] $\quad \frac{1}{576} \left(-5 \sqrt{-1+x}\, x \sqrt{1+x} \left(11+10x^2\right)+3\left(3+24x^2+8x^4\right) ArcCosh[x]\right)$

一方、この公式において積分下限を固定下限 0 とすると次のような傍系高階積分が得られる。両者の差異は積分定数多項式の有無のみである。

公式4･5･2' $\boldsymbol{sinh^{-1}x}$ の傍系高階積分

$$\int_0^x \cdots \int_0^x sinh^{-1}x \, dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} \frac{(-1)^r x^{n-2r}}{(2r)!!^2 (n-2r)!} sinh^{-1}x$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} \sum_{s=0}^{n-2r+1} (-1)^{r+s} {}_{n-2r+1}C_s \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!} \sqrt{1+x^2}$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} \frac{(-1)^{r-1} x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2 (n-2r+1)!}$$

公式4･5･3 $\boldsymbol{sech^{-1}x, csch^{-1}x}$ の高階積分

$\downarrow, \uparrow$ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、2以上の自然数 n について次式が成立する。

$$\int_{a_n}^x \cdots \int_{a_1}^x sech^{-1}x \, dx^n = \frac{x^n}{n!} sech^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!} \frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!} sin^{-1}x$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} \sum_{s=0}^{n-2r} (-1)^s \frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s} \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!} \sqrt{1-x^2}$$

但し、$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$、$a_2, a_4, a_6, \cdots$ は複素数。

$$\int_{a_n}^x \cdots \int_{a_1}^x csch^{-1}x \, dx^n = \frac{x^n}{n!} csch^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} \frac{(-1)^r (2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!} \frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!} sinh^{-1}x$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} \sum_{s=0}^{n-2r} (-1)^{r+s} \frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s} \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!} \sqrt{x^2+1}$$

但し、$a_1 = 0$, $a_2 = 0.6079\cdots$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1.5539$, $\cdots$

証明

$sech^{-1}x$ を4階まで積分すると次のようになる。

$$\int_{a_1}^{x} sech^{-1}x\,dx = x\,sech^{-1}x + sin^{-1}x$$

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} sech^{-1}x\,dx^2 = \frac{x^2}{2}sech^{-1}x + x\,sin^{-1}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} sech^{-1}x\,dx^3 = \frac{x^3}{6}sech^{-1}x + \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{12}\right)sin^{-1}x + \frac{5x}{12}\sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} sech^{-1}x\,dx^4 = \frac{x^4}{24}sech^{-1}x + \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x}{12}\right)sin^{-1}x + \left(\frac{13x^2}{72}+\frac{1}{36}\right)\sqrt{1-x^2}$$

これらの係数の絶対値は 公式4･4･3 の絶対値と全て一致している。よって公式4･4･3の符号を変えることによって簡単にこれらの係数が得られる。$csch^{-1}x$ についても同様である。

一方、この公式において積分下限を固定下限 0 とすると次のような傍系高階積分が得られる。両者の差異は積分定数多項式の有無のみである。

公式4･5･3’ $sech^{-1}x$, $csch^{-1}x$ の傍系高階積分

$\downarrow, \uparrow$ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、2以上の自然数 n について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sech^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}sech^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}sin^{-1}x$$
$$+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{1-x^2}$$
$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{1}{2r(2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x csch^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}csch^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(-1)^r(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}sinh^{-1}x$$
$$+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^{r+s}\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{x^2+1}$$
$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^r}{2r(2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}$$

例　$sech^{-1}x$ の傍系4階積分

Collateral higher integral of arcsech

```
• CI := n-> x^n/n!*arcsech(x)
          + arcsin(x)*sum((2*r-1)!!/((2*r)!!*(2*r+1)!)
                     *(x^(n-2*r-1)/(n-2*r-1)!), r=0..floor((n-1)/2
          + sqrt(1-x^2)*sum(sum((-1)^s*binomial(n-2*r,s)/(2*r+s)
                     *((s-1)!!^2/(s+2*r-1)!!^2), s=0..n-2*r)
                     *(x^(n-2*r)/(n-2*r)!), r=1..floor(n/2))
          - sum(1/(2*r*(2*r-1)!!^2)*(x^(n-2*r)/(n-2*r)!),
                                     r=1..floor(n/2))
```

$$n \to \frac{x^n}{n!} \cdot \operatorname{arcsech}(x) + \arcsin(x) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{2 \cdot r - 1!!}{2 \cdot r!! \cdot (2 \cdot r + 1)!} \cdot \frac{x^{n-2 \cdot r-1}}{(n-2 \cdot r-1)!} \right)$$

$$+ \sqrt{1-x^2} \cdot \left(\sum_{r=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\sum_{s=0}^{n-2 \cdot r} \frac{(-1)^s \cdot \binom{n-2 \cdot r}{s}}{2 \cdot r + s} \cdot \frac{s-1!!^2}{s+2 \cdot r-1!!^2} \right) \cdot \frac{x^{n-2 \cdot r}}{(n-2 \cdot r)!} \right) - \left(\sum_{r=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2 \cdot r \cdot 2 \cdot r - 1!!^2} \cdot \frac{x^{n-2 \cdot r}}{(n-2 \cdot r)!} \right)$$

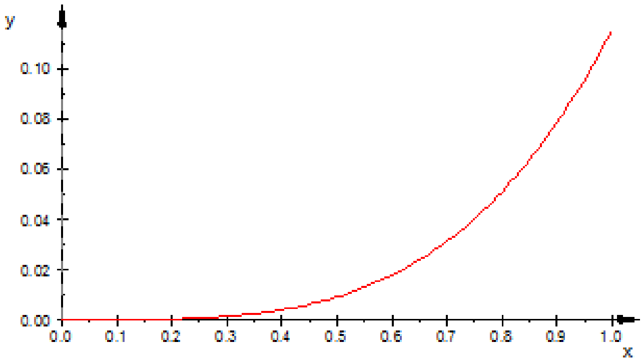
Riemann-Liouville Integral

```
• RL := n-> 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*arcsech(t),t=0.000001..x)
```

$$n \to \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int_{0.000001}^{x} (x-t)^{n-1} \cdot \operatorname{arcsech}(t) \, dt$$

Blue: Riemann-Liouville Integral , Red: Collateral higer integral

```
• plotfunc2d(RL(4),CI(4), x=0..1)
```



両辺は完全に重なっているので青(Riemann-Liouville積分)は見ることが出来ない。この結果はまた 公式4･5･3 が正しいことも示している。

4･6　項別高階積分と高階原始関数のテイラー級数

4･6･1　固定下限の項別高階積分の定理

定理4･6･1

$f^{<r>}$ $r=0,1,\cdots,n$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とし、$f^{<r+1>}$ を $f^{<r>}$ の任意の原始関数とする。このとき、もし関数 $f(x)$ が a の周りでテイラー展開可能ならば、$x\in[a,b]$ に対して次式が成立する。

$$f^{<n>}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}+\sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!} \tag{1.1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.2}$$

証明

定理4･1･3 により次式が成立した。

$$f^{<n>}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}+\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^n$$

他方、もし関数 $f(x)$ が a の周りでテイラー展開可能ならば、

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}$$

これは次のように項別高階積分できる。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}$$

そこでこれを上式に代入すれば

$$f^{<n>}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}+\sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!} \tag{1.1}$$

ところが、

$$\sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}=\sum_{r=n}^{\infty}f^{(r-n)}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}=\sum_{r=n}^{\infty}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}$$

これを用いれば(1.1)は

$$f^{<n>}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}+\sum_{r=n}^{\infty}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.2}$$

となる。

Remark

(1.1) は、$f^{<n>}(x)$ が $f(x)$ の項別高階積分と積分定数多項式から成ることを示している。

(1.2) は、これらが $f^{<n>}(x)$ のテイラー級数を構成していることを示している。

結論

(1) $f(x)$ の固定下限の項別高階積分は一般に傍系高階積分になる。

(2) $f(x)$ の a を下限とする項別高階積分が直系高階積分になるのは次の場合である。

$$f^{<r>}(a)=0 \quad for\ \ r=1,2,\cdots,n \qquad \& \qquad f^{(s)}(a)\neq 0,\pm\infty \quad for\ at\ least\ one\ \ s\geqq 0$$

例1　$f(x)=e^x$ の項別高階積分

$f^{<n>}(x)$ を e^x の直系高階原始関数とする。すると $a\neq -\infty$ について

$$f^{<n>}(x)=e^x \quad , \quad f^{<n-r>}(a)=e^a \quad , \quad f^{(n)}(a)=e^a$$

であるから、これらを定理に代入すれば

$$\left(e^x\right)^{<n>} = \sum_{r=0}^{n-1} e^a\frac{(x-a)^r}{r\,!} + \sum_{r=0}^{\infty} e^a\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)\,!} = \sum_{r=0}^{\infty} e^a\frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

この式の第1項(積分定数多項式)は $a\neq -\infty$ のとき0ではない。

他方、$f(x)=e^x$ は a の周りで次のようにテイラー展開される。

$$e^x = \sum_{r=0}^{\infty} e^a\frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

これを a から x まで n 回項別積分すると

$$\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^n = \sum_{r=0}^{\infty} e^a\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)\,!}$$

この項別高階積分は $\left(e^x\right)^{<n>}$ のテイラー展開の一部であり、従って傍系高階積分である。

例2　$f(x)=\tan^{-1}x$ の項別高階積分

$f^{<n>}(x)$ を $\tan^{-1}x$ の直系高階原始関数とする。すると 公式4･4･1 より $a=0$ はこれらの零点であるから、$f^{<n-r>}(0)=0 \quad for\ \ r=0,2,\cdots,n-1$

従って積分定数多項式は次のように0になる。

$$\sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(0)\frac{(x-0)^r}{r\,!} = 0 \tag{w1}$$

他方、公式9･2･7(後述 9･2)より

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{\left(x^2+1\right)^n}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$

これより

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}\,0^{n+1-2k}$$

n が偶数のとき、$n+1-2k\neq 0 \quad k=1,\cdots,n/2\uparrow$ であるから $f^{(n)}(0)=0$

n が奇数のとき、

$$\begin{aligned}f^{(2r+1)}(0) &= (-1)^{2r+1}(2r)!\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^k{}_{2r+1}C_{2r+2-2k}\,0^{2r+2-2k}\\ &= (-1)^{2r+1}(2r)!\left\{\sum_{k=1}^{r}(-1)^k{}_{2r+1}C_{2r+2-2k}\,0^{2r+2-2k} + (-1)^{r+1}{}_{2r+1}C_0\,0^0\right\}\end{aligned}$$

$$= (-1)^r (2r)!$$

よって $tan^{-1}x$ は 0 の周りで次のようにテイラー展開される。

$$tan^{-1}x = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2r)!}{(2r+1)!} x^{2r+1}$$

そして次の項別積分を得る。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x tan^{-1}x\, dx^n = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2r)!}{(n+2r+1)!} x^{n+2r+1} \tag{w2}$$

(w1) , (w2) を定理に代入すれば

$$\left(tan^{-1}x\right)^{<n>} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2r)!}{(n+2r+1)!} x^{n+2r+1}$$

項別高階積分(w2)は $\left(tan^{-1}x\right)^{<n>}$ のテイラー展開の全部であり、従って直系高階積分である。

4・6・2 $\boldsymbol{log\,x}$ の高階原始関数のテイラー展開

$log\,x$ の高階原始関数は既に前節で得られているが、これを1の周りでテイラー展開して両者を比べると面白い結果が得られる。

公式4・6・2

調和数を $H_k = \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s} = \psi(1+k)+\gamma$ と表すとき、次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x log\,x\,dx^n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}(x-1)^{n+r}}{r(r+1)\cdots(r+n)} - \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n-1} {}_nC_r H_{n-r}(x-1)^r \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)\cdots(r+n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r {}_nC_r H_{n-r} \tag{2.2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r(r+1)\cdots(r+n)} = \frac{2^n}{n!}\left(log\,2 - H_n\right) + \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n-1} {}_nC_r H_{n-r} \tag{2.3}$$

証明

$f(x)=log\,x$ の直系高階原始関数は 公式4・3・3 より

$$(log\,x)^{<r>} = \frac{x^r}{r!}\left(log\,x - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) \qquad r=1,2,\cdots,n$$

また、この高階導関数は公式9・2・3(後述 9・2)より

$$(log\,x)^{(r)} = (-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^r} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらを 定理4・6・1(1.1) に代入すれば、

$$\frac{x^n}{n!}\left(log\,x - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}\frac{a^{n-r}}{(n-r)!}\left(log\,a - \sum_{s=1}^{n-r}\frac{1}{s}\right)\frac{(x-a)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{a^r}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}$$

右辺に $a=1$, $H_k=\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s}$ を代入すれば

$$\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}(x-1)^{n+r}}{r(r+1)\cdots(r+n)}-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_rH_{n-r}(x-1)^r \tag{2.1}$$

$x=0$, $x=2$ を各々これに代入すれば

$$\frac{0^n}{n!}\left(\log 0-\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}(-1)^{n+r}}{r(r+1)\cdots(r+n)}-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_rH_{n-r}(-1)^r$$

$$\frac{2^n}{n!}\left(\log 2-\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}1^{n+r}}{r(r+1)\cdots(r+n)}-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_rH_{n-r}1^r$$

これらより (2.2),(2.3) を得る。

例　$n=3$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots$$

$$=\frac{(-1)^2}{3!}\left\{\binom{3}{0}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\binom{3}{1}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\binom{3}{2}\right\}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+-\cdots$$

$$=\frac{2^3}{3!}\left\{\log 2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right\}+\frac{1}{3!}\left\{\binom{3}{0}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\binom{3}{1}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\binom{3}{2}\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\log 2-\frac{8}{9}$$

副産物

(2.2),(2.3) については次の公式が知られている

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+n)}=\frac{1}{n\cdot n!} \tag{2.2'}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r(r+1)\cdots(r+n)}=\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{1+t}dt \tag{2.3'}$$

(2.2),(2.2') 及び (2.3),(2.3') よりそれぞれ次式を得る。

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_nC_rH_{n-r}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\qquad\{H_r=\psi(1+r)+\gamma\} \tag{2.4}$$

$$\int_0^1\frac{(1-x)^n}{1+x}dx=2^n(\log 2-H_n)+\sum_{r=1}^{n}{}_nC_rH_r\qquad\{H_r=\psi(1+r)+\gamma\} \tag{2.5}$$

(2.5) は更に一般化でき、正数 p について次式が成立する。

$$\int_0^1\frac{(1-x)^p}{1+x}dx=2^p\{\log 2-\psi(1+p)-\gamma\}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{p}{r}\{\psi(1+r)+\gamma\} \tag{2.5'}$$

例1

$\sum(-1)^r{}_nC_rH_{n-r}$

$$\text{fl}[n\_] := \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \,\text{Binomial}[n, r]\, \text{HarmonicNumber}[n - r]$$

$$\text{fr}[n\_] := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

fl[6] $-\frac{1}{6}$ fr[6] $-\frac{1}{6}$

例2

ある定積分

$$\text{fl}[p\_] := \int_0^1 \frac{(1 - x)^p}{1 + x}\, dx$$

$$\text{fr}[p\_] := 2^p\,(\text{Log}[2] - \text{PolyGamma}[1 + p] - \text{EulerGamma}) + \sum_{r=1}^{700} \text{Binomial}[p, r]\,(\text{PolyGamma}[1 + r] + \text{EulerGamma})$$

N[fl[3 / 2]] N[fr[3 / 2]]

0.319135 0.319135

2012.05.02 リニューアル

K.Kono

宇宙人の数学