5　項別高階積分(三角関数、双曲線関数)

本章では三角関数および双曲線関数のうち、2階以上の高階積分が初等関数で表せない関数について、これらを級数に展開した上項別に高階積分するものである。従って「**4･3 初等関数の高階積分**」で述べた $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ の各関数は本章では扱わない。

5･1　$\tan x$ の項別高階積分

$\tan x$ とその1階原始関数 $-\log\cos x$ の零点は共に $x=0$ であるので、後者は固定下限の直系原始関数と考えられる。よって2階以上の高階原始関数の零点も $x=0$ とする。

5･1･0　$\tan x$ の高階積分

$$\int_0^x \tan x\,dx = -\log\cos x$$

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \tan x\,dx^2 = \text{高等関数(非初等関数)}$$

5･1･1　$\tan x$ のテイラー展開の項別高階積分

公式5･1･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とするとき、$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \tan x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}x^{2k}$$

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \tan x\,dx^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x \tan x\,dx^3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)!}x^{2k+2}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+n-1)!}x^{2k+n-1}$$

導出

$\tan x$ は次のようにテイラー展開される。

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-1)!}x^{2k-1} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を0 から x まで繰り返し積分して与式 を得る。

(1)　$\tan x$ のテイラー展開の項別高階定積分

公式5･1･1に $x=\pi/2$ を与えれば次式を得る。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x \tan x\, dx^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k+1)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \tag{1.2'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\int_0^x \tan x\, dx^3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k+2)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \tag{1.3'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\, dx^4 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k+3)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3} \tag{1.4'}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\, dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k+n-1)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+n-1} \tag{1.n'}$$

(2) $\boldsymbol{\tan x}$ の1階積分のテイラー級数の和

$\tan x$の1階積分については

$$\int_0^x \tan x\, dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k} = -\log\cos x \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

であるから直ちに

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k} = -\log\cos x \qquad |x|<\frac{\pi}{2} \tag{1.t}$$

を得る。そしてこれに$x=1\,,\ 1/2\,,\ \pi/4$を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!} = -\log\cos 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!} = -\log\cos\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = -\log\cos\frac{\pi}{4}$$ これは後に5･3･1で用いられる。

5･1･2 $\boldsymbol{\tan x}$ のフーリエー展開の項別高階積分

公式5･1･2

$\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ をディリクレ･イータ関数、$\uparrow$ を天井関数とするとき、$|x|<\frac{\pi}{2}$ について成立する。

$$\int_0^x \tan x\,dx = \frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{1\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^0}{0!}$$

$$\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^2 = \frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\sin\left(2kx-\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^1}{1!}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \tan x\, dx^3 = \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^2}{2!} - \frac{\eta(3)}{2^2}\frac{x^0}{0!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\, dx^4 = \frac{1}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}\sin\left(2kx-\frac{4\pi}{2}\right) + \frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^3}{3!} - \frac{\eta(3)}{2^2}\frac{x^1}{1!}$$

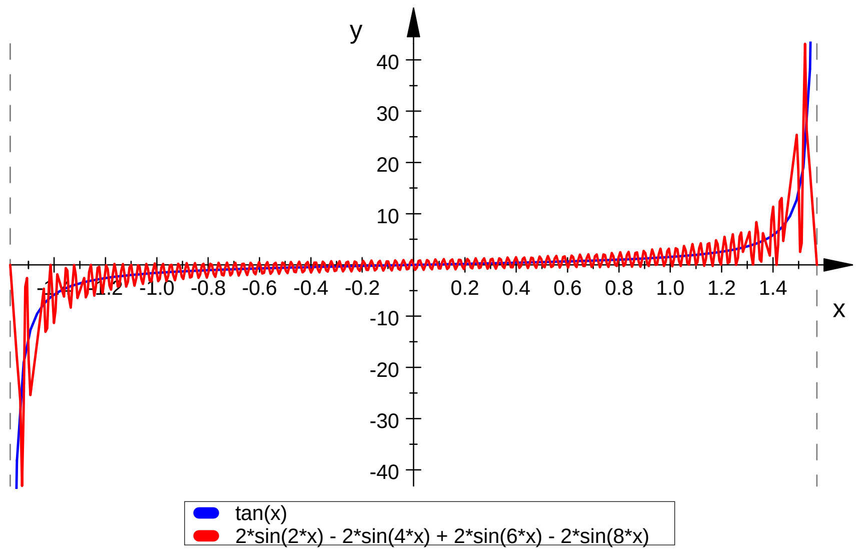
$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\, dx^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^n}\sin\left(2kx-\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^{k-1}\frac{\eta(2k-1)}{2^{2k-2}}\frac{x^{n+1-2k}}{(n+1-2k)!}$$

導出

$\tan x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$\tan x = \frac{1}{i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = i\frac{1-e^{2ix}}{1+e^{2ix}} = i\left(1-e^{2ix}\right)\left(1-e^{2ix}+e^{4ix}-e^{6ix}+-\cdots\right)$$
$$= i - i\left(2e^{2ix}-2e^{4ix}+2e^{6ix}-2e^{8ix}+-\cdots\right)$$
$$= 2(\sin 2x-\sin 4x+\sin 6x-\sin 8x+-\cdots)$$
$$-2i(\cos 2x-\cos 4x+\cos 6x-\cos 8x+-\cdots)+i \qquad (2.0)$$



$\tan x$ はこの実数部 $2(\sin 2x-\sin 4x+\sin 6x-\sin 8x+-\cdots)$の中央値の軌跡(中心線)である(図参照)。

(2.0) の右辺をどのように微積分しても虚数が実数になることも実数が虚数になることもないから $\tan x$ 及びこの高階積分の値域を実数に限定するならば、(2.0)の右辺のうち実数部のみを計算の対象にすればよい(虚数部からは偶数ゼータが得られるが長くなるので本節では割愛する)。

そこで(2.0)の両辺数部を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x \tan x\, dx = \int_0^x 2(\sin 2x-\sin 4x+\sin 6x-\sin 8x+-\cdots)dx$$

$$= -\left[\frac{\cos 2x}{1}-\frac{\cos 4x}{2}+\frac{\cos 6x}{3}-\frac{\cos 8x}{4}+-\cdots\right]_0^x$$

$$= -\left(\frac{\cos 2x}{1}-\frac{\cos 4x}{2}+\frac{\cos 6x}{3}-\frac{\cos 8x}{4}+-\cdots\right)+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots$$

i.e.

$$\int_0^x \tan x\,dx = -\frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{k^1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}$$

ここで $-\cos x = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ と表記すれば

$$\int_0^x \tan x\,dx = \frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^0}{0!}$$

を得る。これは $-\log\cos x$ を実フーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^2 = \int_0^x\left\{\frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^0}{0!}\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{2\pi}{2}\right)-\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^1}{1!}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^1}{1!}$$

次にこの両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^3 = \left[\frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^2}{2!}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2k0}{k^3}$$

$$= \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^2}{2!}-\frac{\eta(3)}{2^2}\frac{x^0}{0!}$$

以下同様に計算して与式を得る。

(1) *tan x* のフーリエ展開の項別高階定積分

公式5･1･2 の諸式に $x=\pi/2$ を与えれば次式を得る。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x \tan x\,dx^2 = \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \tag{2.2'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^3 = \frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\eta(3)}{2^2 0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0-\frac{\zeta(3)}{2^2} \tag{2.3'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^4 = \frac{\eta(1)}{2^0 3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\eta(3)}{2^2 1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \tag{2.4'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^5 = \frac{\eta(1)}{2^0 4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\eta(3)}{2^2 2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\eta(5)}{2^4 0!} + \frac{\zeta(5)}{2^4} \tag{2.5'}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^n = \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} \frac{(-1)^{k-1}\eta(2k-1)}{2^{2k-2}(n+1-2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1-2k} + \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{2.n'}$$

（2） ***tan x*** の1階積分のフーリエ級数の和

$\tan x$の1階積分については

$$\int_0^x \tan x\,dx = -\frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{k^1} + \frac{\log 2}{0!}x^0 = -\log\cos x$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{k^1} = \log(2\cos x) \qquad |x| < \frac{\pi}{2} \tag{2.f}$$

そしてこれに$x=1$, $1/2$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2k}{k^1} = \log(2\cos 1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k}{k^1} = \log\{2\cos(1/2)\}$$

5·1·3　ディリクレの奇数イータ

$\tan x$のテイラー級数とフーリエ級数の項別高階定積分を突合することにより、ディリクレの奇数イータが得られる。

公式5·1·3

B_{2k} をベルヌイ数とし、$\eta(x)$, $\zeta(x)$ をそれぞれディリ・クレイータ関数、リーマン・ゼータ関数とするとき、次式が成立する。

$$\eta(3) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)!}\pi^{2k+2} + \frac{\pi^2}{2!}\eta(1) - \zeta(3)$$

$$\eta(3) = -\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+3)!}\pi^{2k+3} - \frac{\pi^3}{3!}\eta(1)\right\}$$

$$\eta(5) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+4)!}\pi^{2k+4} - \frac{\pi^4}{4!}\eta(1) + \frac{\pi^2}{2!}\eta(3) - \zeta(5)$$

$$\eta(5) = \frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+5)!}\pi^{2k+5} - \frac{\pi^5}{5!}\eta(1) + \frac{\pi^3}{3!}\eta(3)\right\}$$

$$\eta(7) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+6)!}\pi^{2k+6} + \frac{\pi^6}{6!}\eta(1) - \frac{\pi^4}{4!}\eta(3) + \frac{\pi^2}{2!}\eta(5) - \zeta(7)$$

$$\eta(7) = -\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+7)\,!}\pi^{2k+7} - \frac{\pi^7}{7\,!}\eta(1)+\frac{\pi^5}{5\,!}\eta(3)-\frac{\pi^3}{3\,!}\eta(5)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\eta(2n+1) = (-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2n)\,!}\pi^{2k+2n}$$

$$-(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\pi^{2n-2k}}{(2n-2k)\,!}\eta(2k+1) - \zeta(2n+1)$$

$$\eta(2n+1) = \frac{(-1)^n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2n+1)\,!}\pi^{2k+2n+1}$$

$$-\frac{(-1)^n}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\pi^{2n+1-2k}}{(2n+1-2k)\,!}\eta(2k+1)$$

導出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^3 = \frac{\eta(1)}{2^0 2\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\eta(3)}{2^2 0\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 - \frac{\zeta(3)}{2^2} \tag{2.3'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \tag{1.3'}$$

より

$$\frac{\eta(1)}{2^0 2\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\eta(3)}{2^2 0\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 - \frac{\zeta(3)}{2^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}$$

$$\frac{\eta(1)}{2\,!}\pi^2 - \eta(3) - \frac{\zeta(3)}{2^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)\,!}\pi^{2k+2}$$

i.e. $\eta(3) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)\,!}\pi^{2k+2} + \frac{\pi^2}{2\,!}\eta(1) - \zeta(3)$

次に

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^4 = \frac{\eta(1)}{2^0 3\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\eta(3)}{2^2 1\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \tag{2.4'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^4 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+3)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3} \tag{1.4'}$$

より

$$\frac{\eta(1)}{2^0 3\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\eta(3)}{2^2 1\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+3)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}$$

$$\frac{\eta(1)}{3\,!}\pi^3 - \frac{\eta(3)}{1\,!}\pi^1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+3)\,!}\pi^{2k+3}$$

i.e. $\eta(3) = -\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+3)\,!}\pi^{2k+3} - \frac{\pi^{3}}{3\,!}\eta(1)\right\}$

以下同様に計算して与式を得る。

5・1・4 リーマンの奇数ゼータ

公式5・1・3 に $\zeta(2n+1) = \dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\eta(2n+1)$ を適用すればリーマン・ゼータが得られる。

公式5・1・4

$$\zeta(3) = -\frac{2^{2}}{2^{3}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2)\,!}\pi^{2k+2} - \frac{\pi^{2}}{2\,!}\log 2\right\}$$

$$\zeta(3) = -\frac{2^{2}}{2^{2}-1}\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+3)\,!}\pi^{2k+3} - \frac{\pi^{3}}{3\,!}\log 2\right\}$$

$$\zeta(5) = \frac{2^{4}}{2^{5}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+4)\,!}\pi^{2k+4} - \frac{\pi^{4}}{4\,!}\log 2 + \frac{\pi^{2}}{2\,!}\frac{2^{2}-1}{2^{2}}\zeta(3)\right\}$$

$$\zeta(5) = \frac{2^{4}}{2^{4}-1}\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+5)\,!}\pi^{2k+5} - \frac{\pi^{5}}{5\,!}\log 2 + \frac{\pi^{3}}{3\,!}\frac{2^{2}-1}{2^{2}}\zeta(3)\right\}$$

$$\zeta(7) = -\frac{2^{6}}{2^{7}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+6)\,!}\pi^{2k+6} + \frac{\pi^{6}}{6\,!}\log 2\right\}$$
$$+\frac{2^{6}}{2^{7}-1}\left\{-\frac{\pi^{4}}{4\,!}\frac{2^{2}-1}{2^{2}}\zeta(3) + \frac{\pi^{2}}{2\,!}\frac{2^{4}-1}{2^{4}}\zeta(5)\right\}$$

$$\zeta(7) = -\frac{2^{6}}{2^{6}-1}\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+7)\,!}\pi^{2k+7} - \frac{\pi^{7}}{7\,!}\log 2\right\}$$
$$+\frac{2^{6}}{2^{6}-1}\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi^{5}}{5\,!}\frac{2^{2}-1}{2^{2}}\zeta(3) + \frac{\pi^{3}}{3\,!}\frac{2^{4}-1}{2^{4}}\zeta(5)\right\}$$

⋮

$$\zeta(2n+1) = (-1)^{n}\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2n)\,!}\pi^{2k+2n} - \frac{\pi^{2n}}{(2n)\,!}\log 2\right\}$$
$$-(-1)^{n}\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k}\frac{\pi^{2n-2k}}{(2n-2k)\,!}\frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}}\zeta(2k+1)$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n}}{\pi}\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+2n+1)\,!}\pi^{2k+2n+1} - \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)\,!}\log 2\right\}$$
$$-\frac{(-1)^{n}}{\pi}\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k}\frac{\pi^{2n+1-2k}}{(2n+1-2k)\,!}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\zeta(2k+1)$$

5･2 ***tanhx*** の項別高階積分

$tanh\,x$ とその1階原始関数 $log\,cosh\,x$ の零点は共に $x=0$ であるので、後者は固定下限の直系原始関数と考えられる。よって2階以上の高階原始関数の零点も $x=0$ とする。

5･2･0 ***tanhx*** の高階積分

$$\int_0^x tanh\,x\,dx = log\,cosh\,x$$

$$\int_0^x\int_0^x tanh\,x\,dx^2 = \text{高等関数(非初等関数)}$$

5･2･1 ***tanhx*** のテイラー展開の項別高階積分

公式5･2･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とするとき、$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)\,!}x^{2k}$$

$$\int_0^x\int_0^x tanh\,x\,dx^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!}x^{2k+1}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x tanh\,x\,dx^3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+2)\,!}x^{2k+2}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x tanh\,x\,dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+n-1)\,!}x^{2k+n-1}$$

導出

$tanh\,x$ は次のようにテイラー展開される。

$$tanh\,x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,!}x^{2k-1} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を0 から x まで繰り返し積分して与式 を得る。

(1) ***tanhx*** のテイラー展開の項別高階定積分

公式5･2･1に $x=1/2$ を与えれば次式を得る。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \tag{1.1'}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x tanh\,x\,dx^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \tag{1.2'}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x\int_0^x \tanh x\, dx^3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \tag{1.3'}$$

$\vdots$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \tanh x\, dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+n-1} \tag{1.n'}$$

(2) ***tanhx*** の1階積分のテイラー級数の和

$\tanh x$の1階積分については

$$\int_0^x \tanh x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)!}x^{2k} = \log\cosh x \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

であるから直ちに

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)!}x^{2k} = \log\cosh x \qquad |x|<\frac{\pi}{2} \tag{1.t}$$

を得る。そしてこれに$x=1$, $1/2$, $\pi/4$を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)!} = \log\cosh 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)!} = \log\cosh\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = \log\cosh\frac{\pi}{4}$$

これは後に5･4･1で用いられる。

5･2･2 ***tanhx*** のフーリエー展開の項別高階積分

公式5･2･2

$\eta(x)$ をディリクレイータ関数とするとき、$x>0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \tanh x\,dx = \frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^1} + \frac{x^1}{1!} - \frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^0}{0!}$$

$$\int_0^x\int_0^x \tanh x\,dx^2 = -\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^2} + \frac{x^2}{2!} - \frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^1}{1!} + \frac{\eta(2)}{2^1}\frac{x^0}{0!}$$

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^x\int_0^x \tanh x\,dx^3 = &\frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^3} + \frac{x^3}{3!}\\ &-\frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^2}{2!} + \frac{\eta(2)}{2^1}\frac{x^1}{1!} - \frac{\eta(3)}{2^2 0!}\frac{x^0}{0!}\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tanh x\,dx^n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^n} + \frac{x^n}{n!}$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\eta(k+1)}{2^k} \frac{x^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$$

導出

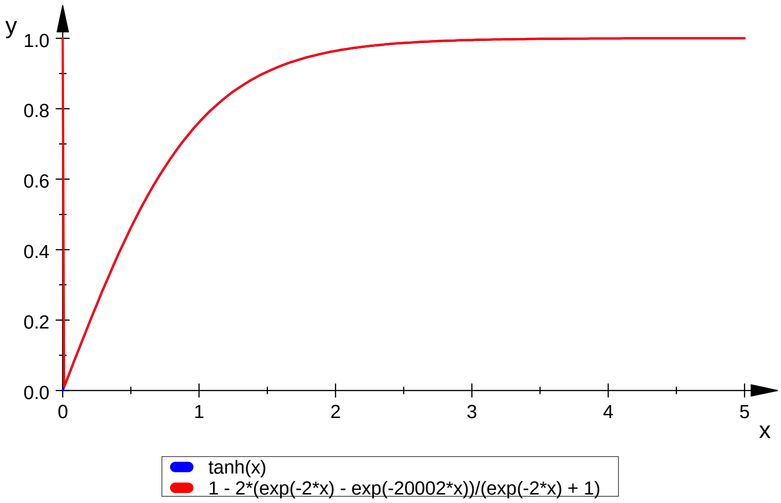
$tanh\,x$ は次のようにフーリエ展開される(図参照)。

$$tanh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \left(1-e^{-2x}\right)\left(1 - e^{-2x} + e^{-4x} - e^{-6x} +- \cdots\right)$$

$$= 1 - \left(2e^{-2x} - 2e^{-4x} + 2e^{-6x} - 2e^{-8x} +- \cdots\right) \tag{2.0}$$

$$= 1 - 2(\cos 2ix - \cos 4ix + \cos 6ix - \cos 8ix +- \cdots)$$

$$- 2i(\sin 2ix - \sin 4ix + \sin 6ix - \sin 8ix +- \cdots)$$



(2.0)の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x tanh\,x\,dx = \int_0^x \left\{1 - 2\left(e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - e^{-8x} +- \cdots\right)\right\} dx$$

$$= \left[x + \left(\frac{e^{-2x}}{1} - \frac{e^{-4x}}{2} + \frac{e^{-6x}}{3} - \frac{e^{-8x}}{4} +- \cdots \right) \right]_0^x$$

$$= x + \left(\frac{e^{-2x}}{1} - \frac{e^{-4x}}{2} + \frac{e^{-6x}}{3} - \frac{e^{-8x}}{4} +- \cdots \right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +- \cdots \right)$$

i.e.

$$\int_0^x tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{-2kx}}{k^1} + x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^1}$$

ここで $\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ と表記すれば

$$\int_0^x tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{-2kx}}{k^1} + x - \eta(1)$$

を得る。もちろんこれも $log\,cosh\,x$ のフーリエ展開である。

次にこの両辺を0から x まで積分すると

$$\int_0^x\int_0^x tanh\,x\,dx^2 = \int_0^x \left\{ \frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^1} + x - \eta(1) \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^2} + \frac{x^2}{2!} - \eta(1)\frac{x^1}{1!} \right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^2} + \frac{x^2}{2!} - \frac{\eta(1)}{2^0}\frac{x^1}{1!} + \frac{\eta(2)}{2^1}\frac{x^0}{0!}$$

以下同様に計算して与式を得る。

(1) *tanh x* のフーリエ展開の項別高階定積分

公式5･2･2 の諸式に $x = 1/2 > 0$ を与えれば次式を得る。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^1} + \frac{1}{1!}\frac{1}{2} - \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \tag{2.1'}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x tanh\,x\,dx^2 = -\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{\eta(2)}{2^1 0!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \tag{2.2'}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x\int_0^x tanh\,x\,dx^3 = \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^3} + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\eta(2)}{2^1 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{\eta(3)}{2^2 0!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \tag{2.3'}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x tanh\,x\,dx^n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^n} + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^k}\frac{\eta(k+1)}{(n-1-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \tag{2.n'}$$

(2) *tanh x* の1階積分のフーリエ級数の和

$tanh\,x$の1階積分については

$$\int_0^x tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^1} + x - log\,2 = log\,cosh\,x \qquad x>0$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^1} = log(2cosh\,x) - x \qquad x>0 \tag{2.f}$$

を得る。そしてこれに$x=1$, $1/2$, $\pi/2$を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2k}}{k^1} = log(2cosh 1) - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^1} = log\left(2cosh\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k\pi}}{k^1} = log\left(2cosh\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

5･2･3 ディリクレ・イータ関数

$tanh\,x$のテイラー級数とフーリエ級数の項別高階定積分を突合することにより、ディリクレ・イータ関数が得られる。

公式5･2･3

B_{2k}をベルヌイ数とし$\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$をディリクレ・イータ関数とするとき、次式が成立する。

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,!} - \frac{1}{2}\frac{1}{0!}$$

$$\eta(1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)\,!} + \frac{1}{2}\frac{1}{1!}$$

$$\eta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!} - \frac{1}{2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\eta(1)$$

$$\eta(3) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+2)\,!} + \frac{1}{2}\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\eta(1) + \frac{1}{1!}\eta(2)$$

$$\eta(4) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+3)\,!} - \frac{1}{2}\frac{1}{4!}$$
$$+ \frac{1}{3!}\eta(1) - \frac{1}{2!}\eta(2) + \frac{1}{1!}\eta(3)$$

$$\vdots$$

$$\eta(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^n} + (-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+n-1)\,!} - \frac{(-1)^n}{2}\frac{1}{n\,!}$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k\,!}\eta(n-k)$$

導出

$$tanh\frac{1}{2} = 1 - 2\left(e^{-1} - e^{-2} + e^{-3} - e^{-4} +- \cdots\right) \tag{2.0'}$$

$$tanh\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \tag{1.0'}$$

$$\therefore\quad 0 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,!} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^1} + \frac{1}{2} - \eta(1) \tag{2.1'}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tanh\,x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \tag{1.1'}$$

$$\therefore\quad \eta(1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k)\,!} + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{x} tanh\,x\,dx^2 = -\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{\eta(2)}{2^1 0!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \tag{2.2'}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{x} tanh\,x\,dx^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \tag{1.2'}$$

$$\therefore\quad \eta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!} - \frac{1}{2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\eta(1)$$

以下同様に計算して与式を得る。。

5･2･4 リーマン･ゼータ関数

公式5･2･3 に $\zeta(n) = \dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\eta(n)$ を適用すればリーマン･ゼータが得られる。

公式5･2･4

$$\zeta(2) = \frac{2^1}{2^1-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!} - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{log\,2}{1!}\right\}$$

$$\zeta(3) = \frac{2^2}{2^2-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+2)\,!} + \frac{1}{2\cdot 3!} - \frac{log\,2}{2!} + \frac{2^1-1}{2^1}\frac{\zeta(2)}{1!}\right\}$$

$$\zeta(4) = \frac{2^3}{2^3-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+3)\,!} - \frac{1}{2\cdot 4!} + \frac{log\,2}{3!}\right.$$

$$+\frac{2^2-1}{2^2}\frac{\zeta(3)}{1!}-\frac{2^1-1}{2^1}\frac{\zeta(2)}{2!}\Bigg\}$$

$\vdots$

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^n}+\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{j-1}\frac{2^{n-1-j}-1}{2^{n-1-j}}\frac{\zeta(n-j)}{j!}\right\}$$

$$-\frac{(-2)^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+n-1)!}-\frac{1}{2\cdot n!}+\frac{\log 2}{(n-1)!}\right\}$$

5·3 $\cot x$ の項別高階積分

$\cot x$ とその1階原始関数 $\log\sin x$ の零点は共に $x=\pi/2$ であるので、後者は固定下限の直系原始関数と考えられる。よって2階以上の高階原始関数の零点も $x=\pi/2$ とする。

5·3·0 $\cot x$ の高階積分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx = \log\sin x$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^2 = \text{高等関数（非初等関数）}$$

5·3·1 $\cot x$ のテイラー展開の項別高階積分

公式5·3·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$0<x<\pi$ 上の関数を

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+n)!}x^{2k+n}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

とするとき、次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx = f^{<0>}(x) = \log x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k(2k)!}x^{2k}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^2 = f^{<1>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^3 = f^{<2>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^4 = f^{<3>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^n = f^{<n-1>}(x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<n-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\qquad n=2,3,4,\cdots$$

但し、 $f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\ ,\ f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\log 2$

導出

$$x\cot x = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{(2k)!}x^{2k}$$

より

$$cot\,x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k\,(2k-1)\,!}x^{2k-1}$$

この両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} cot\,x\,dx = log\ x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k} - \left\{ log\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\right\}$$

となるが、ここで

$$log\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 0$$

である。何故ならば、「岩波数学公式Ⅱ」p151によれば

$$log\,x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k} = log\ sin\,x \qquad 0< x<\pi$$

であるから、これに $x=\pi/2$ を代入すれば直ちに所望の式を得るからである。

かくして

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} cot\,x\,dx = log\ x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k} = f^{<0>}(x)$$

次にこの両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} cot\,x\,dx^2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f^{<0>}(x)dx = f^{<1>}(x) - f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

更にこの両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} cot\,x\,dx^3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\left\{ f^{<1>}(x) - f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx$$

$$= f^{<2>}(x) - f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

となり、以下同様に計算して与式を得る。

公式5･3･1 は一応一般式にはなっているが、実際にこれを展開すると非常に煩雑な式となる。そこでこれに一工夫して $tan\,x$ 並の簡単な式にしたのが次の公式である。

公式5･3･1'

B_{2k} をベルヌイ数とするとき、$0< x <\pi$ なる x について次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} cot\,x\,dx^n = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+n-1}$$

導出

$$cot\,x = -tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k-1)\,!}x^{2k-1}\qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

より

$$\cot x=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k-1)\,!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}\qquad 0<x<\pi$$

この両辺を $\pi/2$ から x まで繰り返し積分して与式を得る。

(1) *cotx* のテイラー展開の項別高階定積分

公式5･3･1 の諸式に $x=0$ を与えれば次式を得る。 但し、

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n\,!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k+n)\,!}x^{2k+n}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

とする。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^2=-\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{0}f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\tag{1.2'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^3=-\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{0}f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1}f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\tag{1.3'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^4=-\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{0}f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1}f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\tag{1.4'}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^n=-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k}f^{<n-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\tag{1.n'}$$

(2) *cotx* の1階積分のテイラー級数の和

*cotx*の1階積分については

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx=\log x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k}=\log\sin x\qquad 0<x<\pi$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}x^{2k}=-\log\sin x+\log x\qquad 0<x<\pi\tag{1.t}$$

そしてこれに $x=1$, $1/2$, $\pi/4$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}=-\log\sin 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k)\,!}=-\log\sin\frac{1}{2}-\log 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \qquad = -\log\sin\frac{\pi}{4}+\log\frac{\pi}{4}$$

また、この最後の式と 5･1･1 (2) の最後の式より次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = -\log\frac{\pi}{4}$$ これは後に5･5･1で用いられる。

5･3･2 **cotx** のフーリエー展開の項別高階積分

公式5･3･2

$\eta(x)$ をディリクレイータ、↑ を天井関数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx = \frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^1}\sin\left(2kx-\frac{1\pi}{2}\right)-\frac{\eta(1)}{2^0 0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^2 = \frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left(2kx-\frac{2\pi}{2}\right)-\frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^3 = \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\eta(3)}{2^2 0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^4 = \frac{1}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin\left(2kx-\frac{4\pi}{2}\right)-\frac{\eta(1)}{2^0 3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\eta(3)}{2^2 1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}\sin\left(2kx-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^k}{2^{2k-2}}\frac{\eta(2k-1)}{(n+1-2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n+1-2k}$$

導出

$\cot x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

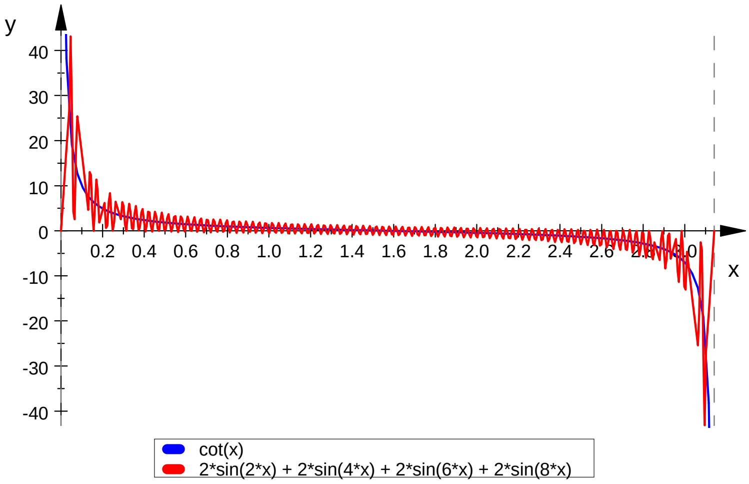
$$\cot x = i\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = -i\frac{1+e^{2ix}}{1-e^{2ix}} = -i\left(1+e^{2ix}\right)\left(1+e^{2ix}+e^{4ix}+e^{6ix}+\cdots\right)$$

$$= -i-i\left(2e^{2ix}+2e^{4ix}+2e^{6ix}+2e^{8ix}+\cdots\right)$$

$$= 2(\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\sin 8x+\cdots)$$

$$-2i(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x+\cdots)-i \tag{2.0}$$

$\cot x$ はこの実数部 $2(\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\sin 8x+\cdots)$の中央値の軌跡(中心線)である(図参照)。



(2.0)の右辺をどのように微積分しても虚数が実数になることも実数が虚数になることもないから $\cot x$ 及びこの高階積分の値域を実数に限定するならば、(2.0)の右辺のうち実数部のみを計算の対象にすればよい(虚数部からは偶数ゼータが得られるが長くなるので本節では割愛する)。

そこで(2.0)の両辺の実数部を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 2(\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x * \sin 8x + \cdots)dx$$

$$= -\left[\frac{\cos 2x}{1} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 6x}{3} + \frac{\cos 8x}{4} + \cdots \right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= -\left(\frac{\cos 2x}{1} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 6x}{3} + \frac{\cos 8x}{4} + \cdots \right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots \right)$$

i.e.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot x\,dx = \log \sin x = -\frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k^1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^1}$$

ここで $-\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ と表記することにすれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot x\,dx = \frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} \sin\left(2kx - \frac{1\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 0!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0$$

を得る。これは $\log \sin x$ を実フーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot x\,dx^2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left\{ \frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} \sin\left(2kx - \frac{1\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 0!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0 \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(2kx - \frac{2\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= \frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left(2kx-\frac{2\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1$$

次にこの両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\left\{\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left(2kx-\frac{2\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\pi}{k^3}$$

$$= \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\left(2kx-\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\eta(3)}{2^2 2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0$$

以下同様に計算して与式を得る。

(1) *cotx* のフーリエ展開の項別高階定積分

公式5･3･2 の諸式に $x=0$ を与えれば次式を得る。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^2 = \frac{\eta(1)}{2^0 1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \tag{2.2'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^3 = -\frac{\eta(1)}{2^0 2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\eta(3)}{2^2 0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 + \frac{\zeta(3)}{2^2} \tag{2.3'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^4 = \frac{\eta(1)}{2^0 3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\eta(3)}{2^2 1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \tag{2.4'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^5 = -\frac{\eta(1)}{2^0 4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{\eta(3)}{2^2 2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\eta(5)}{2^4 0!} - \frac{\zeta(5)}{2^4} \tag{2.5'}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^n = (-1)^n\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^{k-1}\eta(2k-1)}{2^{2k-2}(n+1-2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1-2k} - \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{2.n'}$$

(2) *cotx* の1階積分のフーリエ級数の和

*cotx*の1階積分については

$$\int_0^x \cot x\,dx = -\frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^1} - \log 2 = \log\sin x \qquad 0<x<\pi$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^1} = -\log(2\sin x) \qquad 0<x<\pi \tag{2.f}$$

を得る。そしてこれにx=1 , 1/2を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k}{k^1} = -\log(2\sin 1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^1} = -\log\{2\sin(1/2)\}$$

5·3·3 奇数イータと奇数ゼータ

$\cot x$のテイラー級数とフーリエ級数の項別高階定積分を突合することにより、奇数イータと奇数ゼータが得られる。

公式5·3·3

B_{2k}をベルヌイ数とし、$\eta(x)$, $\zeta(x)$をそれぞれディリクレ・イータ関数、リーマン・ゼータ関数とするとき、次式が成立する。

$$\log\pi = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+1)!}\pi^{2k}$$

$$\eta(3) = -\frac{\pi^2}{2!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+2)!}\pi^{2k+2}-\zeta(3)$$

$$\zeta(3) = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^3}{3!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+3)!}\pi^{2k+3}\right\}$$

$$\eta(5) = \frac{\pi^4}{4!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+4)!}\pi^{2k+4}+\frac{\pi^2}{2!}\zeta(3)-\zeta(5)$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^5}{5!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+5)!}\pi^{2k+5}+\frac{\pi^3}{3!}\zeta(3)\right\}$$

$$\eta(7) = -\frac{\pi^6}{6!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+6)!}\pi^{2k+6}-\frac{\pi^4}{4!}\zeta(3)+\frac{\pi^2}{2!}\zeta(5)-\zeta(7)$$

$$\zeta(7) = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^7}{7!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+7)!}\pi^{2k+7}+\frac{\pi^5}{5!}\zeta(3)-\frac{\pi^3}{3!}\zeta(5)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\eta(2n+1) = (-1)^n\left\{\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+2n)!}\pi^{2k+2n}\right\}$$
$$+(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\zeta(2k+1)-\zeta(2n+1)$$

$$\zeta(2n+1) = (-1)^n\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+2n+1)!}\pi^{2k+2n+1}\right\}$$
$$+(-1)^n\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\zeta(2k+1)$$

導出

フーリエ級数 (2.2') において $\eta(1)$ を $\log 2$ に置き換え、テイラー級数 (1.2') と比べれば

$$\frac{\log 2}{2^0 1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = -\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.2''}$$

$$= -\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1\left(\log\frac{\pi}{2} - 1\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}$$

これから

$$\log\pi = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+1)!}\pi^{2k}$$

次にテイラー級数の3階積分に(2.2'')を代入すれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^3 = -f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\log 2}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

この式とフーリエ級数(2.3')より

$$\frac{1}{2^2}\zeta(3) - \frac{\log 2}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\frac{\eta(3)}{0!} = -f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\log 2}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

i.e. $$\frac{1}{2^2}\zeta(3) + \frac{1}{2^2}\frac{\eta(3)}{0!} = -f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\log 2}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tag{a}$$

これより

$$\eta(3) = -2^2 f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi^2}{2!}\log 2 - \zeta(3)$$

$$= -2^2\left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\log\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}\right\}$$

$$- \frac{\pi^2}{2!}\log 2 - \zeta(3)$$

$$= -\frac{\pi^2}{2!}\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+2)!}\pi^{2k+2} - \zeta(3)$$

次にテイラー展開の4階定積分 (1.4') に (2.2'') と (a) を逐次代入すれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^4 = -f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^1\left\{\frac{1}{2^2}\zeta(3) + \frac{1}{2^2}\frac{\eta(3)}{0!}\right\}$$

この式とフーリエ級数 (2.4') より

$$\frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{2^2}\frac{\eta(3)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = -f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^1\left\{\frac{1}{2^2}\zeta(3) + \frac{1}{2^2}\frac{\eta(3)}{0!}\right\}$$

i.e. $$\frac{1}{2^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1\zeta(3) = -f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \tag{b}$$

これに$f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$を代入すれば

$$\frac{1}{2^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1\zeta(3) = -f^{<3>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\left(\log\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3} - \frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}$$

これより

$$\zeta(3) = -2^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^3}{3!}\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+3)!}\pi^{2k+3}\right\}$$

以下同様に計算して与式を得る。

5·3·4 もう1組の奇数ゼータ

上記 公式5·3·3 に$\eta(2n+1) = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}\zeta(2n+1)$を代入すればもう1組の奇数ゼータを得る。この公式は奇数ゼータの一般表式としては、恐らく最も簡明なものであろう。

公式5·3·4

$$\zeta(3) = -\frac{2^2}{2^3-1}\left\{\frac{\pi^2}{2!}\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+2)!}\pi^{2k+2}\right\}$$

$$\zeta(5) = \frac{2^4}{2^5-1}\left\{\frac{\pi^4}{4!}\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+4)!}\pi^{2k+4} + \frac{\pi^2}{2!}\zeta(3)\right\}$$

$$\zeta(7) = -\frac{2^6}{2^7-1}\left\{\frac{\pi^6}{6!}\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+6)!}\pi^{2k+6}\right\}$$

$$- \frac{2^6}{2^7-1}\left\{\frac{\pi^4}{4!}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{2!}\zeta(5)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2n+1) = (-1)^n\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\left(\log\pi - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+2n)!}\pi^{2k+2n}\right\}$$

$$+ (-1)^n\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\zeta(2k+1) \qquad n=2,3,4,\cdots$$

5･4 $\coth x$ の項別高階積分

$\coth x$ の1階原始関数 $\log\sinh x$ の零点は $\sinh^{-1}1$ (=0.8813…) であるので、2階以上の高階積分の零点も $\sinh^{-1}1$ (=0.8813…) とする。但し、$\coth x$ の零点は 0.8813… ではないから、これは**傍系高階積分**と考えられる。

5･4･0 $\coth x$ の傍系高階積分

$\rho = 2\sinh^{-1}1$ (=1.762747174…) とするとき

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx = \log\sinh x$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^2 = \text{高等関数(非初等関数)}$$

5･4･1 $\coth x$ のテイラー展開の項別高階積分

公式5･4･1

$\rho = 2\sinh^{-1}1$ (=1.7627…)とし、$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数、$x>0$ 上の関数を

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

とするとき、次式が成立する。

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx = f^{<0>}(x) = \log x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}x^{2k}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^2 = f^{<1>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^0 f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^3 = f^{<2>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^0 f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^1 f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^4 = f^{<3>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^0 f^{<3>}\left(\frac{\rho}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^1 f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2 f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^n = f^{<n-1>}(x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^k f^{<n-1-k>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

導出

$$x\coth x = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

より

$$\coth x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-1)!}x^{2k-1}$$

この両辺を$\rho/2$からxまで積分すると

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx=\log x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}x^{2k}-\left\{\log\frac{\rho}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}\right\}$$

となるが、ここで

$$\log\frac{\rho}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}=0$$

である。何故ならば、「岩波数学公式Ⅱ」p150によれば

$$\log x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}B_{2k}}{k(2k)!}x^{2k}=\log\sinh x \qquad x>0$$

であるから、これに$x=\rho/2$を代入すれば直ちに所望の式を得るからである。

かくして

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx=\log x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}x^{2k}=f^{<0>}(x)$$

次にこの両辺を$\rho/2$からxまで積分すると

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^2 \quad =\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}f^{<0>}(x)dx=f^{<1>}(x)-f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

更にこの両辺を$\rho/2$からxまで積分すると

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^3=\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\left\{f^{<1>}(x)-f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right\}dx$$

$$=f^{<2>}(x)-f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^{1}f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

となり、以下同様に計算して与式を得る。

(1) $\coth x$ のテイラー展開の項別高階定積分

公式5･4･1 の諸式に$x=0$を与えれば次式を得る。但し、

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

とする。

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^2 \quad =-\frac{1}{0!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{0}f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{1.2'}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^3 \quad =-\frac{1}{0!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{0}f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{1}f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{1.3'}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^4 = -\frac{1}{0!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^0 f^{<3>}\left(\frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^1 f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{1.4'}$$

⋮

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^n = -\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^k f^{<n-1-k>}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{1.n'}$$

(2) ***coth x*** の1階積分のテイラー級数の和

$\coth x$の1階積分については

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx = \log x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}x^{2k} = \log\sinh x \qquad 0<x<\pi$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}x^{2k} = \log\sinh x - \log x \qquad 0<x<\pi \tag{1.t}$$

そしてこれに$x=1$, $1/2$, $\pi/4$を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!} = \log\sinh 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k)!} = \log\sinh\frac{1}{2} + \log 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = \log\sinh\frac{\pi}{4} - \log\frac{\pi}{4}$$

また、この最後の式と 5·2·1 (2) の最後の式より次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = \log\coth\frac{\pi}{4} + \log\frac{\pi}{4}$$

5·4·2 ***coth x*** のフーリエ展開の項別高階積分

公式5·4·2

$\rho = 2\sinh^{-1}1\ (=1.762747174\cdots)$とするとき、$x>0$について次式が成立する。

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx = \log\sinh x = -\frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^1} + \left(x-\frac{\rho}{2}\right) + \frac{\rho}{2} - \log 2$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^2 = \frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^2} + \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\rho/2-\log 2}{1!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^3 = -\frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^3} + \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^3 + \frac{\rho/2-\log 2}{2!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2$$
$$-\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}\left(x-\frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^4 = \frac{1}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^4} + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^4 + \frac{\rho/2-\log 2}{3!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^3$$
$$-\frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3}\left(x-\frac{\rho}{2}\right) - \frac{1}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^4}$$

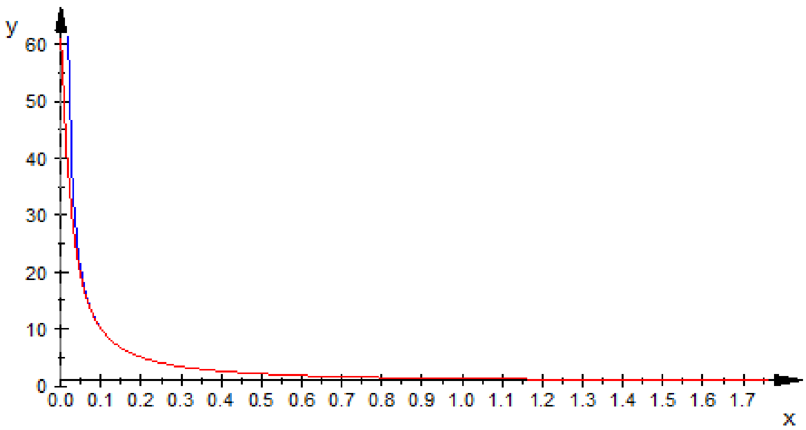
$\vdots$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^n} + \frac{1}{n!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^n + \frac{\rho/2-\log 2}{(n-1)!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^{n-1}$$
$$-\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(-1)^{n-j}}{2^{n-1-j}}\frac{1}{j!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^{n-j}}$$

導出

$\coth x$ は次のようにフーリエ展開される(図参照)。

$$\coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \left(1+e^{-2x}\right)\left(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+\cdots\right)$$
$$= 1+\left(2e^{-2x}+2e^{-4x}+2e^{-6x}+2e^{-8x}+-\cdots\right) \tag{2.0}$$
$$= 1+2(\cos 2ix+\cos 4ix+\cos 6ix+\cos 8ix+\cdots)$$
$$+2i(\sin 2ix+\sin 4ix+\sin 6ix+\sin 8ix+\cdots)$$



今、$\rho/2 = \sinh^{-1}1\ (=0.881373587\cdots)$ として(2.0)の両辺を $\rho/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\, dx = \int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\left\{2\left(e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x}+\cdots\right)+1\right\}dx$$

$$= -\left[\frac{e^{-2x}}{1} + \frac{e^{-4x}}{2} + \frac{e^{-6x}}{3} + \frac{e^{-8x}}{4} + \cdots - \left(x - \frac{\rho}{2} \right) \right]_{\frac{\rho}{2}}^{x}$$

$$= -\left\{ \frac{e^{-2x}}{1} + \frac{e^{-4x}}{2} + \frac{e^{-6x}}{3} + \frac{e^{-8x}}{4} + \cdots - \left(x - \frac{\rho}{2} \right) \right\}$$

$$+ \frac{e^{-\rho}}{1} + \frac{e^{-2\rho}}{2} + \frac{e^{-3\rho}}{3} + \frac{e^{-4\rho}}{4} + \cdots$$

i.e.

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx = -\frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k^1} + \left(x - \frac{\rho}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\rho}}{k^1}$$

ここで、次式が成立する･

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\rho}}{k^1} = \frac{\rho}{2} - \log 2 \qquad \text{(w)}$$

何故ならば

$$\log(1-x) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} \qquad -1 \leqq x < 1$$

より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k} = -\log\left(1-e^{-2x}\right) \qquad x > 0$$

一方、

$$1 = sech\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{e^{x}\left(1 - e^{-2x}\right)}{2}$$

と置けば、これより

$$\frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{e^x}{2} \Rightarrow \log \frac{1}{1-e^{-2x}} = \log \frac{e^x}{2} \Rightarrow -\log\left(1-e^{-2x}\right) = x - \log 2$$

そこで $x = sech^{-1} 1 = \dfrac{\rho}{2}$ を

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k} = -\log\left(1-e^{-2x}\right) = x - \log 2$$

に代入すれば (w) を得るからである。

かくて (w) を用いて

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx = \log \sinh x = -\frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k^1} + \left(x - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{\rho}{2} - \log 2$$

を得る。これは $\log \sinh x$ をフーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を $\rho/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^2 = \int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k^1} + \left(x - \frac{\rho}{2} \right) + \left(\frac{\rho}{2} - \log 2 \right) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k^2} + \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} - \log 2\right)\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right) \right]_{\frac{\rho}{2}}^{x}$$

$$= \frac{1}{2^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2kx}}{k^2} + \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} - \log 2\right)\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\rho}{2}\right) - \frac{1}{2^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

以下同様に計算して与式を得る。

(1) ***coth x*** のフーリエ展開の項別高階定積分

公式5･4･2 の諸式に $x=0$ を与えれば次式を得る。

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^2 = \frac{\zeta(2)}{2^1} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\log 2}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right) - \frac{1}{2^1 0!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^2} \tag{2.2'}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^3 = -\frac{\zeta(3)}{2^2} + \frac{2}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 - \frac{\log 2}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^1 1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^2} + \frac{1}{2^2 0!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^3} \tag{2.3'}$$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^4 = \frac{\zeta(4)}{2^3} - \frac{3}{4!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 + \frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 - \frac{1}{2^1 2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^2} - \frac{1}{2^2 1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^3} - \frac{1}{2^3 0!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^4} \tag{2.4'}$$

$\vdots$

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x} \coth x\, dx^n = (-1)^n\left\{\frac{\zeta(n)}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{n!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^n + \frac{\log 2}{(n-1)!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1}\right\} - (-1)^n\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{2^{n-1-r}r!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^r\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s\rho}}{s^{n-r}} \tag{2.n'}$$

(2) ***coth x*** の1階積分のフーリエ級数の和

$\coth x$の1階積分については

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\, dx = -\frac{1}{2^0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^1} + \left(x-\frac{\rho}{2}\right) + \frac{\rho}{2} - \log 2 = \log\sinh x \qquad x>0$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2kx}}{k^1} = x - \log(2\sinh x) \qquad x>0 \tag{2.f}$$

そしてこれに $x=1$, $1/2$, $\pi/2$, $\pi/4$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2k}}{k^1} = 1 - \log(2\sinh 1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k}}{k^1} = \frac{1}{2} - log\left(2sinh\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\pi}}{k^1} = \frac{\pi}{2} - log\left(2sinh\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\pi/2}}{k^1} = \frac{\pi}{4} - log\left(2sinh\frac{\pi}{4}\right)$$

5･4･3 リーマン・ゼータ関数

$coth\,x$のテイラー級数とフーリエ級数の項別高階定積分を突合することにより、リーマン・ゼータ関数が得られる。

公式5･4･3

$\rho = 2sinh^{-1}1\ (=1.7627\cdots)$、$B_{2k}$ をベルヌイ数とするとき、次式が成立する。

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2} - \left\{\frac{\rho}{1!}\left(log\rho - \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\rho^{2k+1}}{2k\,(2k+1)\,!} - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2!}\right\}$$

$$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3} + \frac{\rho^2}{2!}\left(log\rho - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\rho^{2k+2}}{2k\,(2k+2)\,!} - \frac{1}{2}\frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho}{1!}\zeta(2)$$

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^4} - \left\{\frac{\rho^3}{3!}\left(log\rho - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\rho^{2k+3}}{2k\,(2k+3)\,!} - \frac{1}{2}\frac{\rho^4}{4!}\right\} + \frac{\rho}{1!}\zeta(3) - \frac{\rho^2}{2!}\zeta(2)$$

$$\vdots$$

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^n} + \sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{j-1}\frac{\rho^j}{j\,!}\zeta(n-j) + (-1)^{n-1}\left\{\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(log\rho - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\rho^{2k+n-1}}{2k\,(2k+n-1)!} - \frac{1}{2}\frac{\rho^n}{n!}\right\}$$

導出

フーリエ級数 (2.2') とテイラー級数 (1.2') より

$$f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right) = -\frac{1}{2^1}\zeta(2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \frac{log\,2}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2} \qquad \text{(a)}$$

となりこれより

$$\zeta(2) = -2f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right) + \frac{2}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \frac{\rho\,log\,2}{1!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

$$= -2\left\{ \frac{1}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^1 \left(\log\frac{\rho}{2} - \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k\,(2k+1)\,!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+1} \right\}$$

$$+ \frac{2}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \frac{\rho\log 2}{1!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

$$= -\left\{ \frac{\rho}{1!}\left(\log\rho - \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\,\rho^{2k+1}}{2k\,(2k+1)\,!} \right\} + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

次にテイラー級数 (1.3') に (a) を代入すれば

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^3 = -f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{1.3'}$$

$$-\frac{1}{2^1}\left(\frac{\rho}{2}\right)\zeta(2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 - \frac{\log 2}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^1}\left(\frac{\rho}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

この式とフーリエ級数 (2.3') より

$$f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right) = -\frac{1}{2^1}\left(\frac{\rho}{2}\right)\zeta(2) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 - \frac{\log 2}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2^2}\zeta(3) - \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3} \tag{b}$$

そしてこれより

$$\zeta(3) = 2^2 f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right) + 2\left(\frac{\rho}{2}\right)\zeta(2) - \frac{2^2}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 + \frac{\rho^2\log 2}{2!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3}$$

$$= 2^2\left\{ \frac{1}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\left(\log\frac{\rho}{2} - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k\,(2k+2)\,!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+2} \right\}$$

$$+\rho\zeta(2) - \frac{2^2}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 + \frac{\rho^2\log 2}{2!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3}$$

$$= \frac{\rho^2}{2!}\left(\log\rho - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{2k+2}B_{2k}}{2k\,(2k+2)\,!} - \frac{1}{2}\frac{\rho^3}{3!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3} + \rho\zeta(2)$$

次にテイラー級数 (1.4') に (b)、(a) を代入すれば

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^{0}\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\rho}{2}}^{x}\coth x\,dx^4 = -f^{<3>}\left(\frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^1 f^{<2>}\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 f^{<1>}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{1.4'}$$

$$= -f^{<3>}\left(\frac{\rho}{2}\right) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^3} - \frac{1}{2\cdot 2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^2}$$

$$-\frac{1}{2\cdot 2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\zeta(2) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\zeta(3) - \frac{1}{2\cdot 3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4$$

この式とフーリエ級数 (2.4') より

$$f^{<3>}\left(\frac{\rho}{2}\right) = -\frac{1}{2\cdot 2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\zeta(2) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\zeta(3)$$

$$-\frac{1}{2^3}\zeta(4) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 - \frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 + \frac{1}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^4} \qquad \text{(c)}$$

そしてこれより

$$\zeta(4) = -2^3\left\{\frac{1}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3\left(\log\frac{\rho}{2} - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k\,(2k+3)\,!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+3}\right\}$$

$$-\frac{\log 2}{3!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 + \frac{2^3}{4!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4$$

$$+\frac{2^3}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^4} - \frac{2^3}{2\cdot 2!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\zeta(2) + \frac{2^3}{2^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\zeta(3)$$

$$= -\left\{\frac{\rho^3}{3!}\left(\log\rho - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\,\rho^{2k+3}}{2k\,(2k+3)\,!} - \frac{\rho^4}{2\cdot 4!}\right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k\rho}}{k^4} - \frac{\rho^2}{2!}\zeta(2) + \rho\zeta(3)$$

以下、帰納法により $n>2$ なる自然数 n について $\zeta(n)$ を得る。

5･5 $\csc x$ の項別高階積分

$\csc x$ の1階原始関数 $\log\tan(x/2)$ の零点は $x=\pi/2$ であるので、2階以上の高階積分の零点も $x=\pi/2$ とする。但し、$\csc x$ の零点は $\mp\infty i$ であるから、これは**傍系高階積分**と考えられる。

5･5･0 $\csc x$ の傍系高階積分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx = \log\tan\frac{x}{2} \qquad \left\{=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^2 = \text{高等関数（非初等関数）}$$

5･5･1 $\csc x$ のテイラー展開の項別高階積分

公式5･5･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$0<x<\pi$ 上の関数を

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

とするとき、次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx = f^{<0>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \log x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}x^{2k}-\log 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^2 = f^{<1>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^3 = f^{<2>}(x)-\frac{1}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^n = f^{<n-1>}(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<n-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

但し、 $f^{<0>}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\log 2$

導出

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx = f^{<0>}(x)-f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[\log x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}x^{2k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}\, x^{2k} - \left\{ \log\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \right\}$$

$$= \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}\, x^{2k} - \left\{ \log\frac{\pi}{2} - \log\frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\left\{ \because \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = -\log\frac{\pi}{4} \qquad 5\cdot3\cdot1\ (2) \right\}$$

$$= \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)\,!}\, x^{2k} - \log 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \csc x\, dx^2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left\{ f^{<0>}(x) - f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} dx$$

$$= \left[f^{<1>}(x) - \frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{1} f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= f^{<1>}(x) - f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{1} f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

以下同様に計算して与式を得る。

公式5・5・1 は一応一般式にはなっているが、実際にこれを展開すると非常に煩雑な式となる。そこでこれに一工夫して $\sec x$ 並の簡単な式にしたのが次の公式である。。

公式5・5・1’

E_{2k} をオイラー数 とするとき、$0< x <\pi$ なる x に対して次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \csc x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k+n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+n}$$

導出

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \sec\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)\,!} x^{2k} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

より

$$\csc x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)\,!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \qquad 0< x <\pi$$

この両辺を $\pi/2$ から x まで繰り返し積分して与式を得る。

(1) **$\csc x$ のテイラー展開の項別高階定積分**

公式5・5・1 の諸式に $x=0$ を与えれば次式を得る。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^2 = -\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.2')$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^3 = -\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<2>}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.3')$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^n = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<n-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.n')$$

但し、 $f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right) = log\,2$

(2) ***cscx*** の1階積分のテイラー級数の和

$csc\,x$の1階積分については

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx = log\,x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}x^{2k} - log\,2 = log\,tan\frac{x}{2} \qquad 0<x<\pi$$

であるからこれより

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!}x^{2k} = log\,tan\frac{x}{2} - log\frac{x}{2} \qquad 0<x<\pi \qquad (1.t)$$

そしてこれに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k)!} = log\,tan\frac{1}{2} + log\,2$$

5･5･2 ***cscx*** のフーリエー展開の項別高階積分

公式5･5･2

$\beta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ をディリクレ･ベータ関数、↓を床関数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}sin\left\{(2k+1)x-\frac{1\pi}{2}\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}sin\left\{(2k+1)x-\frac{2\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \csc x\, dx^3 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left\{(2k+1)x - \frac{3\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \csc x\, dx^4 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\sin\left\{(2k+1)x - \frac{4\pi}{2}\right\}$$

$$+ \frac{2\beta(2)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2\beta(4)}{0!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \csc x\, dx^5 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\sin\left\{(2k+1)x - \frac{5\pi}{2}\right\}$$

$$+ \frac{2\beta(2)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{2\beta(4)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \csc x\, dx^n = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^n}\sin\left\{(2k+1)x - \frac{n\pi}{2}\right\}$$

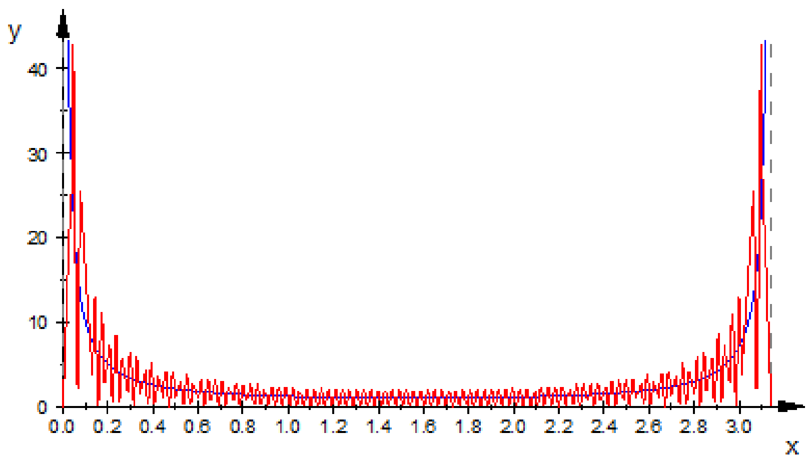
$$+ \sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^{k-1}\frac{2\beta(2k)}{(n-2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-2k}$$

導出

$\csc x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$\csc x = \frac{2i}{e^{ix}-e^{-ix}} = -\frac{2ie^{ix}}{1-e^{2ix}} = -2ie^{ix}\left(1+e^{2ix}+e^{4ix}+e^{6ix}+\cdots\right)$$
$$= -2i\left(e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}+e^{7ix}+\cdots\right)$$
$$= 2(\sin x+\sin 3x+\sin 5x++\cdots) - 2i(\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots) \tag{2.0}$$

$\csc x$ はこの実数部 $2(\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x+\cdots)$ の中央値の軌跡(中心線)である(図参照)。



(2.0) の右辺をどのように微積分しても虚数が実数になることも実数が虚数になることもないから $csc\,x$ 及びこの高階積分の値域を実数に限定するならば、(2.0)の右辺のうち実数部のみを計算の対象にすればよい(虚数部からは奇数ベータが得られるが長くなるので本節では割愛する)。

そこで(2.0)の両辺の実数部を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 2(sin\,x + sin\,3x + sin\,5x + sin\,7x + \cdots)dx$$

$$= -2\left[\frac{cos\,1x}{1} + \frac{cos\,3x}{3} + \frac{cos\,5x}{5} + \frac{cos\,7x}{7} + \cdots\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= -2\left(\frac{cos\,1x}{1} + \frac{cos\,3x}{3} + \frac{cos\,5x}{5} + \frac{cos\,8x}{7} + \cdots\right)$$

i.e.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{cos\{(2k+1)x\}}{2k+1}$$

ここで $-cos\,x = sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ であるからこれを用いて

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}sin\left\{(2k+1)x - \frac{1\pi}{2}\right\}$$

を得る。これは $log\,tan\frac{x}{2}$ を実フーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\left\{2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}sin\left\{(2k+1)x - \frac{1\pi}{2}\right\}\right\}dx$$

$$= \left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}sin\left\{(2k+1)x - \frac{2\pi}{2}\right\}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}sin\left\{(2k+1)x - \frac{2\pi}{2}\right\} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

ここで $\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ と表記すれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}sin\left\{(2k+1)x - \frac{2\pi}{2}\right\} + 2\beta(2)$$

次にこの両辺を $\pi/2$ から x まで積分すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} csc\,x\,dx^3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\left\{2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}sin\left\{(2k+1)x - \frac{2\pi}{2}\right\} + 2\beta(2)\right\}dx$$

$$= \left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left\{(2k+1)x-\frac{3\pi}{2}\right\} + 2\beta(2)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left\{(2k+1)x-\frac{3\pi}{2}\right\} + 2\beta(2)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

以下同様に計算して与式を得る。

(1) $\csc x$ のフーリエ展開の項別高階定積分

公式5･5･2 の諸式に $x=0$ を与えれば次式を得る。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^2 = \frac{2\beta(2)}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 \tag{2.2'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^3 = -\frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{2^3-1}{2^2}\zeta(3) \tag{2.3'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^4 = \frac{2\beta(2)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2\beta(4)}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 \tag{2.4'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^5 = -\frac{2\beta(2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{2\beta(4)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{2^5-1}{2^4}\zeta(5) \tag{2.5'}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^n = (-1)^n\sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^{k-1}\frac{2\beta(2k)}{(n-2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2k}$$
$$-\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\zeta(n) \tag{2.n'}$$

導出

$$\sin\left\{(2k+1)\cdot 0-\frac{n\pi}{2}\right\} = 0 \qquad for\ \ n=2,4,6,\cdots$$

$$\sin\left\{(2k+1)\cdot 0-\frac{n\pi}{2}\right\} = \pm 1 \qquad for\ \ n=3,5,7,\cdots$$

であるから、公式5･5･2 に $x=0$ を与えこれらを代入すれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\left\{(2k+1)\cdot 0-\frac{2\pi}{2}\right\} + 2\beta(2) = 2\beta(2)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^3 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left\{(2k+1)\cdot 0-\frac{3\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{1!}\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} - \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{2^3-1}{2^2}\zeta(3) - \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1$$

以下同様にして与式を得る。

(2) $\csc x$ の1階積分のフーリエ級数の和

$\csc x$の1階積分については

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2k+1)x\}}{2k+1} = \log\tan\frac{x}{2} \qquad 0<x<\pi$$

であるからこれより

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2k+1)x\}}{2k+1} = -\frac{1}{2}\log\tan\frac{x}{2} \qquad 0<x<\pi \tag{2.f}$$

そしてこれに$x=1$を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)}{2k+1} = -\frac{1}{2}\log\tan\frac{1}{2}$$

5･5･3 ディリクレの偶数ベータ

$\csc x$のテイラー級数とフーリエ級数の項別高階定積分を突合することにより、ディリクレの偶数ベータが得られる。奇数ベータついてはオイラー数による一般式が知られているが、偶数ベータについては知られていない。次の公式は少々煩雑なベルヌイ級数でこれを示したものである。

公式5･5･3

B_{2k} をベルヌイ数 、$\beta(x)$ をディリクレベータ関数、$\zeta(x)$ をリーマンゼータ関数、$0<x<\pi$ 上の関数 $f^{<n>}(x)$ を

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2^{2k}-2)|B_{2k}|}{2k(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

とするとき、次式が成立する。

$$\beta(2) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi\log 2}{2}-f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\beta(2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} f^{<2-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2^3-1}{2^2}\frac{\zeta(3)}{\pi}$$

$$\beta(4) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<3-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\beta(2)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\beta(4) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} f^{<4-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\beta(2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{2^5-1}{2^4}\frac{\zeta(5)}{\pi}$$

$$\beta(6) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<5-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\beta(4)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\beta(2)}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$\beta(6) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} f^{<6-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\beta(4)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\beta(2)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$+\frac{2^7-1}{2^6}\frac{\zeta(7)}{\pi}$$

$\vdots$

$$\beta(2n)=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<2n-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\beta(2n-2k)}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

$$\beta(2n)=-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} f^{<2n-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\beta(2n-2k)}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$
$$+\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n}}\frac{\zeta(2n+1)}{\pi}$$

導出

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^2=-\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 f^{<0>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.2'}$$
$$=-\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^2=\frac{2\beta(2)}{0!} \tag{2.2'}$$

$$\therefore\quad \beta(2)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi\log 2}{2}-f^{<1>}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^3=-\sum_{k=0}^{3-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<3-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.3'}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^3=\frac{2^3-1}{2^2}\zeta(3)-\frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \tag{2.3'}$$

$$\therefore\quad \beta(2)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} f^{<3-1-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2^3-1}{2^2}\frac{\zeta(3)}{\pi}$$

以下同様の計算により与式を得る。。

5•5•4 リーマンの奇数ゼータ

公式5•5•3 の半分の式から逆にリーマンの奇数ゼータが求まる。次の公式は奇数ゼータと偶数ベータの関係を少々煩雑な式で示したものである。

公式5•5•4

B_{2k} をベルヌイ数 、$\beta(x)$ をディリクレベータ、$\zeta(x)$ をリーマンゼータ、関数 $f^{<n>}(x)$ を

$$f^{<n>}(x)=\frac{x^n}{n!}\left(\log x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+n)!}x^{2k+n}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

とするとき、次式が成立する。

$$\zeta(3) = \frac{2^3}{2^3-1}\frac{\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{2^2}{2^3-1}\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<2-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\zeta(5) = \frac{2^5}{2^5-1}\left\{\frac{\beta(4)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{\beta(2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right\}$$

$$+ \frac{2^4}{2^5-1}\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<4-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\zeta(7) = \frac{2^7}{2^7-1}\left\{\frac{\beta(6)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{\beta(4)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\beta(2)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\right\}$$

$$- \frac{2^6}{2^7-1}\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<6-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\beta(2n-2k)}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}$$

$$+ (-1)^n\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}-1}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k f^{<2n-k>}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

5･6　$csch\,x$ の項別高階積分

$csch\,x$ およびその1階原始関数 $\log\tanh(x/2)$ の零点は共に $x=\pm\infty$ であるので、後者は固定下限の直系原始関数と考えられる。一方、$csch\,x$ のフーリエ展開は $x>0$ について知られている。よって2階以上の高階原始関数の零点は $x=\infty$ とする。

5･6･0　$csch\,x$ の高階積分

$$\int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx \quad = \log\tanh\frac{x}{2}$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx^2 = \text{高等関数(非初等関数)}$$

5･6･1　$csch\,x$ のテイラー展開の項別高階積分

$csch\,x$ のテイラー展開は次式が知られている。

$$csch\,x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,!}\,x^{2k-1} \qquad 0<x<\pi$$

しかし、これは $x=\infty$ を下限としては積分できない。

5･6･2　$csch\,x$ のフーリエー展開の項別高階積分

公式5･6･2

$x>0$ について次式が成立する。

$$\int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx \qquad = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{2k+1}$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx^2 \quad = \quad 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^2}$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx^3 = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^3}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx^n = (-1)^n 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^n}$$

導出

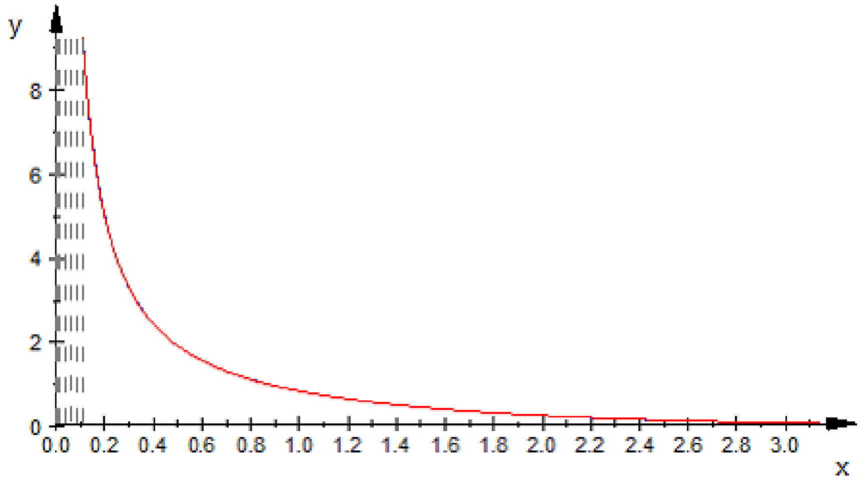
$csch\,x$ は次のようにフーリエ展開される。

$$csch\,x = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}} \;=\; \frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2e^{-x}\left(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+\cdots\right)$$

$$= 2\left(e^{-1x}+e^{-3x}+e^{-5x}+e^{-7x}+\cdots\right) \tag{2.0}$$

$$= 2(\cosh 1x+\cosh 3x+\cosh 5x+\cdots) - 2(\sinh 1x+\sinh 3x+\sinh 5x+\cdots)$$

$$= 2(\cosh ix+\cosh 3ix+\cosh 5ix+\cdots) - 2i(\sinh ix+\sinh 3ix+\sinh 5ix+\cdots)$$



(2.0) の両辺を ∞ から x まで積分すると

$$\int_{\infty}^{x} \operatorname{csch} x\, dx = \int_{\infty}^{x} 2\left(e^{-1x}+e^{-3x}+e^{-5x}+e^{-7x}+\cdots\right) dx$$

$$= -2\left[\frac{e^{-x}}{1}+\frac{e^{-3x}}{3}+\frac{e^{-5x}}{5}+\frac{e^{-7x}}{7}+\cdots\right]_{\infty}^{x}$$

i.e.

$$\int_{\infty}^{x} \operatorname{csch} x\, dx = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{2k+1}$$

を得る。これは $\log\tanh\dfrac{x}{2}$ を実フーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を ∞ から x まで積分すると

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} \operatorname{csch} x\, dx^{2} = \int_{\infty}^{x}\left\{-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{2k+1}\right\} dx = \left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{2}}\right]_{\infty}^{x}$$

i.e.

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} \operatorname{csch} x\, dx^{2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{2}}$$

以下同様の計算より与式を得る。

5･6･3 ディリクレ･ラムダ関数

公式5･6･2 の諸式に $x=0$ を与えることにより、直ちにディリクレ･ラムダ関数が得られる。

公式5･6･3

$\lambda(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n}}$ を ディリクレ･ラムダ関数とするとき

$$\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x} \operatorname{csch} x\, dx^{2} = 2\lambda(2)$$

$$\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} \operatorname{csch} x\, dx^{3} = -2\lambda(3)$$

$$\vdots$$

$$\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} csch\, x\, dx^n = (-1)^n 2\lambda(n)$$

5･6･4 リーマン･ゼータ関数

公式5･6･3 に $\zeta(n) = \dfrac{2^n}{2^n - 1}\lambda(n)$ を適用すればリーマン･ゼータが得られる。

公式5･6･4

$$\zeta(n) = (-1)^n \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} csch\, x\, dx^n$$

5･7　*secx* の項別高階積分

$secx$ の1階原始関数 $\dfrac{1}{2}log\dfrac{1+sinx}{1-sinx}$ の零点は $x=0$ であるので、2階以上の高階積分の零点も $x=0$ とする。但し、$secx$ の零点は $\mp\infty i$ であるから、これは**傍系高階積分**と考えられる。

5･7･0　*secx* の傍系高階積分

$$\int_0^x secx\,dx = \frac{1}{2}log\frac{1+sinx}{1-sinx}$$

$$\int_0^x\int_0^x secx\,dx^2 = \text{高等関数（非初等関数）}$$

5･7･1　*secx* のテイラー展開の項別高階積分

公式5･7･1

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ \cdots$ をオイラー数 とするとき、$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x secx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\int_0^x\int_0^x secx\,dx^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2)!}x^{2k+2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x secx\,dx^3 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+3)!}x^{2k+3}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x secx\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+n)!}x^{2k+n}$$

導出

$secx$ は次のようにテイラー展開される。

$$secx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k)!}x^{2k} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を0 から x まで繰り返し積分して与式 を得る。

(1)　*secx* のテイラー展開の項別高階定積分

公式5･7･1の諸式に $x=\pi/2$ を与えれば次式を得る。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x secx\,dx^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \tag{1.2'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\int_0^x secx\,dx^3 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3} \tag{1.3'}$$

$\vdots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+n} \qquad (1.n')$$

(2) ***secx*** の1階積分のテイラー級数の和

$\sec x$の1階積分については

$$\int_0^x \sec x\, dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

であるから直ちに

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \qquad |x|<\frac{\pi}{2} \qquad (1.t)$$

を得る。

そしてこれに$x=1$を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin 1}{1-\sin 1}$$

(参考) オイラー数、タンジェント数、ベルヌイ数

オイラー数は

$$\operatorname{sech} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k}{k!}x^k \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

と定義される。$E_{2n-1}=0 \quad n=1,2,3,\cdots$ である。

オイラー数とタンジェント数とベルヌイ数 を並べて書けば次のとおりである。

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\quad E_6=-61,\quad E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\cdots$$

$$T_1=1,\ T_3=2,\ T_5=16,\quad T_7=272,\quad T_9=7936,\ T_{11}=353792,\cdots$$

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\cdots$$

杉本氏によればオイラー数とタンジェント数の間には

$$E_{2n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k-1}T_{2k-1}+1 \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (1)$$

なる関係がある。(http://cosmos.art.coocan.jp/gf/gf17.htm)。

タンジェント数とベルヌイ数との間には

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{2n}B_{2n} \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (2)$$

なる関係があるから、オイラー数とベルヌイ数の間には

$$E_{2n} = 1-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)}{2k}B_{2k}\binom{2n}{2k-1} \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (3)$$

なる関係があることになる。実際、例えば次のようになる。

$$E_6 = 1 - \left\{ \frac{2^2(2^2-1)}{2} B_2 \binom{2\cdot 3}{1} + \frac{2^4(2^4-1)}{4} B_4 \binom{2\cdot 3}{3} + \frac{2^6(2^6-1)}{6} B_6 \binom{2\cdot 3}{5} \right\}$$

$$= 1 - \left\{ \frac{4\cdot 3}{2}\frac{1}{6}\binom{6}{1} - \frac{16\cdot 15}{4}\frac{1}{30}\binom{6}{3} + \frac{64\cdot 63}{6}\frac{1}{42}\binom{6}{5} \right\} = -61$$

逆にベルヌイ数とオイラー数の間には、西村氏により次の公式が示されている。

(http://kumamoto.s12.xrea.com/plan/zeta.pdf)

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} E_{2k} \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{4}$$

これも試してみると

$$B_6 = \frac{2\cdot 3}{2^{2\cdot 3}(2^{2\cdot 3}-1)} \left\{ \binom{2\cdot 3-1}{0} E_0 + \binom{2\cdot 3-1}{2} E_2 + \binom{2\cdot 3-1}{4} E_4 \right\}$$

$$= \frac{2\cdot 3}{64\cdot 63} \left\{ \binom{5}{0} 1 - \binom{5}{2} 1 + \binom{5}{4} 5 \right\} = \frac{1}{42}$$

と確認される。なお、西村氏はこれにより偶数ゼータをオイラー数で表記しておられる。

5・7・2 $sec\,x$ のフーリエ展開の項別高階積分

公式5・7・2

E_{2k} をオイラー数、$\beta(x)$ をディリクレ・ベータ関数、↓を床関数とするとき、$|x| < \pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x sec\,x\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} cos\left\{ (2k+1)x - \frac{1\pi}{2} \right\}$$

$$\int_0^x\int_0^x sec\,x\,dx^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} cos\left\{ (2k+1)x - \frac{2\pi}{2} \right\} + \frac{2\beta(2)}{0!}x^0$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x sec\,x\,dx^3 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} cos\left\{ (2k+1)x - \frac{3\pi}{2} \right\} + \frac{2\beta(2)}{1!}x^1$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sec\,x\,dx^4 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^4} cos\left\{ (2k+1)x - \frac{4\pi}{2} \right\}$$
$$+ \frac{2\beta(2)}{2!}x^2 - \frac{2\beta(4)}{0!}x^0$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sec\,x\,dx^5 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} cos\left\{ (2k+1)x - \frac{5\pi}{2} \right\}$$
$$+ \frac{2\beta(2)}{3!}x^3 - \frac{2\beta(4)}{1!}x^1$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sec\,x\,dx^n = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} cos\left\{ (2k+1)x - \frac{n\pi}{2} \right\}$$

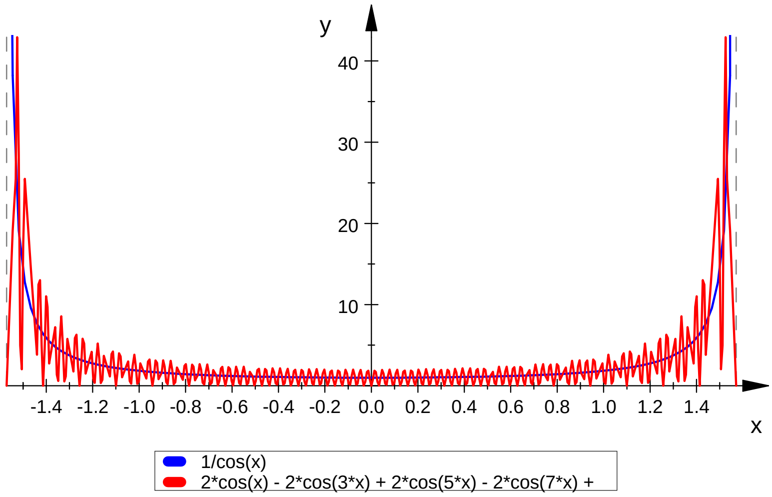
$$+\sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^{k-1}\frac{2\beta(2k)}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

導出

$sec\,x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$sec\,x=\frac{2}{e^{ix}+e^{-ix}}=\frac{2e^{ix}}{1+e^{2ix}}=2\left(e^{ix}-e^{3ix}+e^{5ix}-e^{7ix}+-\cdots\right)$$
$$=2(\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\cos 7x+-\cdots)$$
$$+2i(\sin x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 7x+-\cdots) \tag{2.0}$$

$sec\,x$ はこの実数部 $2(\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\cos 7x+-\cdots)$ の中央値の軌跡(中心線)である(図参照)。



(2.0)の右辺をどのように微積分しても虚数が実数になることも実数が虚数になることもないから $sec\,x$ 及びこの高階積分の値域を実数に限定するならば、(2.0)の右辺のうち実数部のみを計算の対象にすればよい(虚数部からは奇数ベータが得られるが長くなるので本節では割愛する)。

そこで(2.0)の両辺の実数部を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x sec\,x\,dx=\int_0^x 2(\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\cos 7x+-\cdots)dx$$
$$=2\left[\frac{\sin 1x}{1}-\frac{\sin 3x}{2}+\frac{\sin 5x}{3}-\frac{\sin 8x}{4}+-\cdots\right]_0^x$$
$$=2\left(\frac{\sin 1x}{1}-\frac{\sin 3x}{2}+\frac{\sin 5x}{3}-\frac{\sin 8x}{4}+-\cdots\right)$$

i.e.

$$\int_0^x sec\,x\,dx=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\sin\{(2k+1)x\}$$

ここで　$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$　であるから

$$\int_0^x \sec x\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{1\pi}{2}\right\}$$

を得る。これは $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ を実フーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \sec x\,dx^2 = \int_0^x\left\{2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{1\pi}{2}\right\}\right\}dx$$

$$= \left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{2\pi}{2}\right\}\right]_0^x$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{2\pi}{2}\right\} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos(-\pi)$$

ここで $\beta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ と表記すれば

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \sec x\,dx^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{2\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{0!}x^0$$

次にこの両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x \sec x\,dx^3 = \int_0^x\left\{2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{2\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{0!}x^0\right\}dx$$

$$= \left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{3\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{1!}x^1\right]_0^x$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{3\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{1!}x^1$$

以下同様に計算して与式を得る。

(1) $\boldsymbol{\sec x}$ のフーリエ展開の項別高階定積分

公式5･7･2 の諸式に $x=\pi/2$ を与えれば次式を得る。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^x \sec x\,dx^2 = \frac{2\beta(2)}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 \tag{2.2'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x \sec x\,dx^3 = \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{2^3-1}{2^2}\zeta(3) \tag{2.3'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x \sec x\,dx^4 = \frac{2\beta(2)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2\beta(4)}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 \tag{2.4'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x \sec x\,dx^5 = \frac{2\beta(2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{2\beta(4)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{2^5-1}{2^4}\zeta(5) \tag{2.5'}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^n = \sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^{k-1}\frac{2\beta(2k)}{(n-2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2k} + \sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\zeta(n)$$

(2.n')

導出

$$\cos\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right\} = 0 \qquad for\quad n=2,4,6,\cdots$$

$$\cos\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right\} = \pm(-1)^{k+1} \qquad for\quad \begin{matrix} n=1,3,5,\cdots \\ k=0,1,2,\ldots \end{matrix}$$

であるから、公式5･7･2 に $x=\pi/2$ を与えた上これらを代入すれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x \sec x\,dx^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2}\right\} + 2\beta(2) = 2\beta(2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\int_0^x \sec x\,dx^3 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\cos\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right\} + \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} + \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$= -\frac{2^3-1}{2^2}\zeta(3) + \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1$$

以下同様にして与式を得る。

(2) *sec x* の1階積分のフーリエ級数の和

*secx*の1階積分については

$$\int_0^x \sec x\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\{(2k+1)x\}}{2k+1} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

であるからこれより

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\{(2k+1)x\}}{2k+1} = \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \qquad |x|<\frac{\pi}{2} \tag{2.f}$$

そしてこれに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)}{2k+1} = \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin 1}{1-\sin 1}$$

5･7･3 ディリクレの偶数ベータ

*secx*のテイラー級数とフーリエ級数の項別高階定積分を突合することにより、ディリクレの偶数ベータが得られる。奇数ベータについてはオイラー数による一般式が知られているが偶数ベータにについては知られていない。次の公式は簡明なオイラー級数でこれを表示したものであり、本章最大の成果である。

公式5･7･3

E_{2k} をオイラー数とし、$\beta(x)$, $\zeta(x)$ をそれぞれディリクレベータ関数、リーマンゼータ関数とするとき、次式が成立する。

$$\beta(2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}$$

$$\beta(2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} + \frac{2^3-1}{2^2}\frac{\zeta(3)}{\pi}$$

$$\beta(4) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+4)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+4} + \frac{\beta(2)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}$$

$$\beta(4) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+4} + \frac{\beta(2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2} + \frac{2^5-1}{2^4}\frac{\zeta(5)}{\pi}$$

$$\beta(6) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+6)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+6} + \frac{\beta(4)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2} - \frac{\beta(2)}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4}$$

$$\beta(6) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+7)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+6} + \frac{\beta(4)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2} - \frac{\beta(2)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4} + \frac{2^7-1}{2^6}\frac{\zeta(7)}{\pi}$$

$$\vdots$$

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\beta(2n-2k)}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\beta(2n-2k)}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} + \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n}}\frac{\zeta(2n+1)}{\pi}$$

導出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x} sec\,x\,dx^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \tag{1.2'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x} sec\,x\,dx^2 = \frac{2\beta(2)}{0!} \tag{2.2'}$$

$$\therefore\ \beta(2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\int_0^{x} sec\,x\,dx^3 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3} \tag{1.3'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\int_0^{x} sec\,x\,dx^3 = -\frac{2^3-1}{2^2}\zeta(3) + \frac{2\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1} \tag{2.3'}$$

$$\therefore \quad \beta(2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+3)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} + \frac{2^3-1}{2^2}\frac{\zeta(3)}{\pi}$$

以下同様の計算により与式を得る。

***cf*.**

杉岡氏は、氏のテイラーシステムにより、ディリクレの偶数ベータを有限個の奇数ゼータと無限個の偶数ゼータで表示しておられる（ http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page128.htm ）。

氏の計算された $\beta(4)$, $\beta(6)$を示すと次のとおりである。

$$\beta(4) = \frac{2^2-1}{2^2}\zeta(3)\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1$$

$$-\frac{\pi^3}{2^2}\left\{\frac{\log 2}{2^1\cdot 3!} - \frac{2^2-1}{2^2}\zeta(2)\frac{1!}{2^2\,5!} - \frac{2^4-1}{2^4}\zeta(4)\frac{3!}{2^4\,7!} - \frac{2^6-1}{2^6}\zeta(6)\frac{5!}{2^6\,9!} - \cdots\right\}$$

$$\beta(6) = \frac{2^4-1}{2^4}\zeta(5)\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{2^2-1}{2^2}\zeta(3)\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$+\frac{\pi^5}{2^4}\left\{\frac{\log 2}{2^1\cdot 5!} - \frac{2^2-1}{2^2}\zeta(2)\frac{1!}{2^2\,7!} - \frac{2^4-1}{2^4}\zeta(4)\frac{3!}{2^4\,9!} - \frac{2^6-1}{2^6}\zeta(6)\frac{5!}{2^6\,11!} - \cdots\right\}$$

5･7･4 リーマンの奇数ゼータ

公式5･7･3 の半分の式から逆にリーマンの奇数ゼータが求まる。次の公式は奇数ゼータと偶数ベータの関係を極めて簡明な式で示したものである。

公式5･7･4

E_{2k} をオイラー数とし、$\beta(x)$, $\zeta(x)$ をそれぞれディリクレベータ関数、リーマンゼータ関数とするとき、次式が成立する。

$$\zeta(3) = \frac{2^3}{2^3-1}\frac{\beta(2)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{2^2}{2^3-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+3)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}$$

$$\zeta(5) = \frac{2^5}{2^5-1}\left\{\frac{\beta(4)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{\beta(2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right\}$$

$$+\frac{2^4}{2^5-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+5)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+5}$$

$$\zeta(7) = \frac{2^7}{2^7-1}\left\{\frac{\beta(6)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{\beta(4)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\beta(2)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\right\}$$

$$-\frac{2^6}{2^7-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+7)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+7}$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\beta(2n-2k)}{(2k+1)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}$$

$$+(-1)^n\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2n+1)\,!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2n+1}$$

5･8 $\boldsymbol{sech\,x}$ の項別高階積分

$sech\,x$ およびその1階原始関数 $2tan^{-1}\left(e^{x}\right)-\pi$ の零点は共に $x=\infty$ であるので、後者は固定下限の直系原始関数と考えられる。よって2階以上の高階原始関数の零点は $x=\infty$ とする。

5･8･0 $\boldsymbol{sech\,x}$ の高階積分

$$\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx = 2tan^{-1}\left(e^{x}\right) - \pi$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^{2} = \text{高等関数(非初等関数)}$$

5･8･1 $\boldsymbol{sech\,x}$ のテイラー展開の項別高階積分

E_{2k} をオイラー数とするとき、$sech\,x$ のテイラー展開は次式が知られている。

$$sech\,x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

しかし、これは $x=\infty$ を下限としては積分できない。

5･8･2 $\boldsymbol{sech\,x}$ のフーリエ展開の項別高階積分

公式5･8･2

$x>0$ について次式が成立する。

$$\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx = -2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{e^{-(2k+1)x}}{2k+1}$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^{2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{2}}$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^{3} = -2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{3}}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^{n} = (-1)^{n}2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{n}}$$

導出

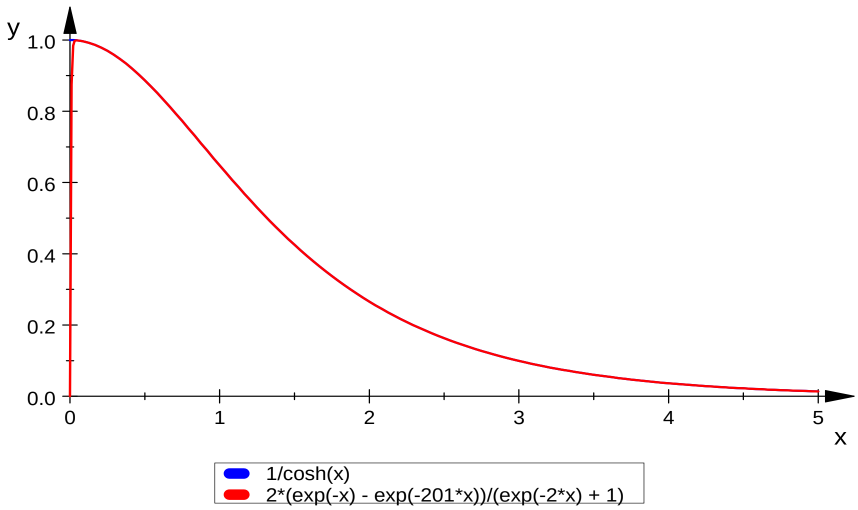
$sech\,x$ は次のようにフーリエ展開される(図参照)。

$$sech\,x = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 2e^{-x}\left(1 - e^{-2x} + e^{-4x} - e^{-6x} +- \cdots\right)$$

$$= 2\left(e^{-1x} - e^{-3x} + e^{-5x} - e^{-7x} +- \cdots\right) \tag{2.0}$$

$$= 2(cos\,1ix - cos\,3ix + cos\,5ix - cos\,7ix +- \cdots)$$

$$+ 2i(sin\,1ix - sin\,3ix + sin\,5ix - sin\,7ix +- \cdots)$$



(2.0) の両辺を ∞ から x まで積分すると

$$\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx = \int_{\infty}^{x} 2\left(e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - e^{-7x} + - \cdots\right)dx$$

$$= -2\left[\frac{e^{-x}}{1} - \frac{e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-5x}}{5} - \frac{e^{-7x}}{7} + - \cdots\right]_{\infty}^{x}$$

i.e.

$$\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx = -2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)x}}{2k+1}$$

を得る。これは $2tan^{-1}\left(e^x\right) - \pi$ を実フーリエ展開した結果に一致する。

次にこの両辺を ∞ から x まで積分すると

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^2 = \left[2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^2}\right]_{\infty}^{x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^2}$$

以下同様に計算して与式を得る。

5・8・3 ディリクレ・ベータ関数

公式5・8・2 の諸式に $x=0$ を与えることにより、直ちにディリクレ・ベータ関数が得られる。

公式5・8・3

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$$ を ディリクレ・ベータ関数とするとき

$$\int_{\infty}^{0} sech\,x\,dx = -2\beta(1)$$

$$\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^2 = 2\beta(2)$$

$$\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^3 = -2\beta(3)$$

$$\vdots$$

$$\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} sech\, x\, dx^n = (-1)^n 2\beta(n)$$

Note

$$\beta(1) = \frac{1}{1^1} - \frac{1}{3^1} + \frac{1}{5^1} - \frac{1}{7^1} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$$ ： マーダヴァの級数

$$\beta(2) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + - \cdots = 0.9159655941\cdots$$ ： カタラン定数

2006.10.05
2012.05.29 Updated

K. Kono

宇宙人の数学