6　項別高階積分(逆三角関数、逆双曲線関数)

　4・4 と 4・5 において逆三角関数および逆双曲線関数の直系高階原始関数は全て示された。しかしこれらはその積分下限も関数形も複雑であった。ところがこれらの関数のテイラー級数を項別積分するとシンプルな一般形を得ることができる。当然ながらこれらの多くは傍系高階積分である。しかしながら直系高階積分は有用で傍系高階積分は無用と言うものでもない。*Simple is the best*！　複雑な有限項関数より単純な無限項関数である。

6・1　$\tan^{-1}x$ の項別高階積分

公式6・1・1

$|x|<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \tan^{-1}x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1}$$

導出

$$\tan^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4・4・1 (4・4) で示されたように、この直系高階積分は次のようであった。

$$\begin{aligned}\int_0^x \cdots \int_0^x \tan^{-1}x\, dx^n = &\frac{\tan^{-1}x}{n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} \\ &+ \frac{\log(1+x^2)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} \\ &- \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}\end{aligned}$$

従って上の項別高階積分は**直系高階積分**である。
そして両者を突合することにより次の公式を得る。

公式6・1・1'

$|x| \leqq 1$ なる x について次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}x^{2k+n} = &\frac{\tan^{-1}x}{n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} \\ &+ \frac{\log(1+x^2)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} \\ &- \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}\end{aligned}$$

これに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} + - \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+3)!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}-\frac{1}{7\cdot8\cdot9}+-\cdots=\frac{1}{2}-\frac{\log 2}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+4)!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+-\cdots=\frac{5}{12}-\frac{\pi}{12}-\frac{\log 2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+5)!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+-\cdots=\frac{5}{36}-\frac{\pi}{24}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}=\frac{\pi}{4n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k{}_nC_{n-2k}+\frac{\log 2}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}$$
$$-\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\} \quad (1.n')$$

Note

これらの級数については

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)\cdots(2k+m)}=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1\frac{(1-t)^{m-1}}{1+t^2}dt$$

なる公式が知られている(岩波「数学公式Ⅱ」)が、これは Riemann-Liouville の積分を用いれば公式6・1・1 から容易に導かれる。そしてまた、次式も容易に導かれる。

$$\int_0^1\frac{(1-x)^n}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k{}_nC_{n-2k}+\frac{\log 2}{2}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}$$
$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}$$

高階グレゴリー級数

上の特殊値において注目すべきは4番目の級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+5)!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+-\cdots=\frac{5}{36}-\frac{\pi}{24}$$

である。0番目の級数がグレゴリー級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+1)!}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

であったことを思い出せば、このような級数は4周期で発生していることが解かる。以下、このような級数を求めて見る。

先ず (1.n') より

$$\frac{\pi}{4n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k{}_nC_{n-2k}-\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}$$
$$+\frac{\log 2}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}$$

特に n が4の倍数のとき $\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}=0$ であるから

$$\frac{\pi}{4n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k {}_nC_{n-2k} - \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}$$

n を $4n$ に置換すれば

$$\frac{\pi}{4(4n)!}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k {}_{4n}C_{4n-2k} - \frac{1}{(4n)!}\sum_{r=1}^{2n}(-1)^r {}_{4n}C_{4n+1-2r}\{\psi(1+4n)-\psi(2r)\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+4n+1)!}$$

これは**高階グレゴリー級数**とでも言うべきものである。$n=2,3$ のときこれは次のようになる。

$$\frac{\pi}{10080}-\frac{109}{325800}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}+-\cdots$$
$$\frac{87217}{829870272000}-\frac{\pi}{29937600}=\frac{1}{1\cdot2\cdot\ \cdots\ \cdot12\cdot13}-\frac{1}{3\cdot4\cdot\ \cdots\ \cdot14\cdot15}+-\cdots$$

6･2　$cot^{-1}x$ の項別高階積分

公式6･2･1

$0<x\leqq 1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x cot^{-1}x\,dx^n=\frac{\pi}{2}\frac{x^n}{n!}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1}$$

導出

$$cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4･4･1(4･4)で示されたように、この直系高階積分は次のようであった。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x cot^{-1}x\,dx^n=\frac{x^n}{n!}cot^{-1}x-\frac{tan^{-1}x}{n!}\sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^k{}_nC_{n-2k}\,x^{n-2k}$$

$$-\frac{log\left(1+x^2\right)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}$$

従って、上の項別高階積分は**直系高階積分**である。

6･3　$\sin^{-1}x$ の項別高階積分

公式6･3･1

$|x|<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1}$$

傍系

導出

$$\sin^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad \{\because\ (2k)! = (2k)!!\cdot(2k-1)!!\}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4･4･2'（4･4）で示されたように、この傍系高階積分は次のようであった。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}\sin^{-1}x$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

従って上の項別高階積分は**傍系高階積分**である。
そして両者を突合することにより次の公式を得る。

公式6･3･1'

$|x|\leqq 1$ なる x について次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}\sin^{-1}x$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

これに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+2)!} = \frac{\pi}{2}-1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+3)!} = \frac{3\pi}{8}-1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+4)!} = \frac{5\pi}{24} - \frac{11}{18}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!} = \frac{{}_{2n-1}C_{n-1}}{(2n)!!}\pi - \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} \frac{1}{(2k-1)!!^2(n-2k+1)!} \tag{1.n'}$$

2重階乗級数による円周率の計算

(1.n') はこれを使って円周率を求めることが出来る。即ち、

$$\pi = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!^2}{(2j+n+1)!} + \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} \frac{1}{(2k-1)!!^2(n-2k+1)!} \right\} \frac{(2n)!!}{{}_{2n-1}C_{n-1}}$$

計算式

有効桁数を cn , c=0.85~1.00 とするとき

$$\pi(cn) = \left[\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} \left\{ \frac{(2k-1)!!^2}{(2k+n+1)!} + \frac{1}{(2k-1)!!^2(n-2k+1)!} \right\} \right] \frac{(2n)!!}{{}_{2n-1}C_{n-1}}$$

この式において有効桁数 cn を得る計算項数は約 $n/2$ である。そして十分大きな n を採れば c=1 とすることができる。

次の例は n=1,700, c=0.9 として1530桁の有効数字を得ている。所要計算項数は851項であった。

例　$\pi(1530)$

```
• n:=1700: DIGITS:=floor(0.9*n): MAXDEPTH:=1000:
• f := sum((2*k-1)!!^2/(2*k+n+1)!+1/((2*k-1)!!^2*(n-2*k+1)!)
                                                  , k=1..ceil(n/2)):
• pi := (1/(n+1)!+f)*(2*n)!!/binomial(2*n-1,n-1):
• float(pi)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620\
8998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117\
4502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867\
8316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631\
5588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941\
5116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518\
8575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986\
0943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342\
7577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561\
1212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173\
2816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752\
8865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519\
5778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886\
5936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131515574\
8572424541506959508295331168617278558890750983817546374649393192550604009277016\
7113900984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977\
4726847104047534646208046684259069491293313677028989152104752162056966024058038\
1501935112533824300355876402474964732639141992726042699227967823547816360093417\
2164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295\
532116534498720275596023648067
```

6・4　$\boldsymbol{cos^{-1}x}$ の項別高階積分

公式6・4・1

$|x|<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x \!\!\cdots\! \int_0^x cos^{-1}x\, dx^n = \frac{\pi}{2}\frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} \qquad \text{傍系}$$

導出

$$cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\;(2k+1)}x^{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\;(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad \{\because \quad (2k)! = (2k)!!\cdot(2k-1)!!\}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4・4・2'（4・4）で示されたように、この傍系高階積分は次のようであった。

$$\int_0^x \!\!\cdots\! \int_0^x cos^{-1}x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}cos^{-1}x - \sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}sin^{-1}x$$

$$- \sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

従って上の項別高階積分は**傍系高階積分**である。

6·5 $\tanh^{-1}x$ の項別高階積分

公式6·5·1

$|x|<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \tanh^{-1}x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!} x^{2k+n+1}$$

導出

$$\tanh^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4·5·1 (4·5) で示されたように、この直系高階積分は次のようであった。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \tanh^{-1}x\,dx^n = \frac{\tanh^{-1}x}{n!} \sum_{k=0}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} + \frac{\log\left(1-x^2\right)}{2\cdot n!} \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} - \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n+1-2r} \{\psi(1+n)-\psi(2r)\} x^{n+1-2r}$$

従って上の項別高階積分は**直系高階積分**である。

そして両者を突合することにより次の公式を得る。

公式6·5·1'

$|x| \leqq 1$ なる x について次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!} x^{2k+n+1} = \frac{\tanh^{-1}x}{n!} \sum_{k=0}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} + \frac{\log\left(1-x^2\right)}{2\cdot n!} \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} - \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n+1-2r} \{\psi(1+n)-\psi(2r)\} x^{n+1-2r}$$

そしてこれに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \log 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+3)!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9} + \cdots = \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+4)!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots = \frac{2}{3}\log 2 - \frac{5}{12}$$

$\vdots$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}=\frac{2^{n-1}}{n!}\log 2-\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}{}_{n}C_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}$$

Note

これらの級数については

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)\cdots(2k+m)}=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1\frac{(1-t)^{m-1}}{1-t^2}dt$$

なる公式が知られている(岩波「数学公式Ⅱ」)が、これは Riemann-Liouville の積分を用いれば公式6・5・1 から容易に導かれる。そしてまた、次式も容易に導かれる。

$$\int_0^1\frac{(1-x)^n}{1-x^2}dx=2^{n-1}\log 2-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}{}_{n}C_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}$$

6・6　$\boldsymbol{sinh^{-1}x}$ の項別高階積分

公式6・6・1

$|x|<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sinh^{-1}x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} \qquad \text{傍系}$$

導出

$$sinh^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad \{\because\ (2k)! = (2k)!!\cdot(2k-1)!!\}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4・5・2'（4・5）で示されたように、この傍系高階積分は次のようであった。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sinh^{-1}x\,dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^r x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}sinh^{-1}x$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^{r+s}{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1+x^2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^{r-1}x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

従って上の項別高階積分は**傍系高階積分**である。

そして両者を突合することにより次の公式を得る。

公式6・6・1'

$|x|\leqq 1$ なる x について次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^r x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}sinh^{-1}x$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^{r+s}{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1+x^2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^{r-1}x^{n-2r+1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

これに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+2)!} = sinh^{-1}1 - \sqrt{2} + 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+3)!} = \frac{1}{4}sinh^{-1}1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} + 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+4)!} = -\frac{1}{12}\sinh^{-1}1 - \frac{7\sqrt{2}}{36} + \frac{7}{18}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^r}{(2r)!!^2(n-2r)!}\sinh^{-1}1$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^{r+s}{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{\sqrt{2}}{(n-2r+1)!}$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)!!^2(n-2r+1)!}$$

6·7 $sech^{-1}x$ の項別高階積分

公式6·7·1

$0<x<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sech^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log\frac{2}{x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad \text{傍系}$$

導出

$$sech^{-1}x = \log\frac{2}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\;2k}x^{2k} = \log\frac{2}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\;2k\,(2k)!}x^{2k}$$

$$= \log\frac{2}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k)!}x^{2k} \qquad \{\because\ (2k)! = (2k)!!\cdot(2k-1)!!\}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

公式4·5·3'（4·5）で示されたように、この傍系高階積分は次のようであった。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x sech^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}sech^{-1}x+\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}\sin^{-1}x$$
$$+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{1-x^2}$$
$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{1}{2r(2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}$$

従って上の項別高階積分は**傍系高階積分**である。
そして両者を突合することにより次の公式を得る。

公式6·7·1'

$0<x\leqq 1$ なる x について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k(2k+n)!}x^{2k+n} = \frac{x^n}{n!}\left(\log\frac{2}{x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{1}{2r(2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}$$
$$-\frac{x^n}{n!}sech^{-1}x-\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}\sin^{-1}x$$
$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{1-x^2}$$

これに $x=1$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k(2k+1)!} = \frac{1}{1!}(\log 2+1)-\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k(2k+2)!} = \frac{1}{2!}\left(\log 2+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k+3)!}=\frac{1}{3!}\left(\log 2+\frac{11}{6}\right)+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k+n)!}=\frac{1}{n!}\left(\log 2+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{1}{2r(2r-1)!!^2}\frac{1}{(n-2r)!}$$

$$-\frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{1}{(n-2r-1)!}$$

6·8　$csch^{-1}x$ の項別高階積分

公式6·8·1
　$0<x<1$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x csch^{-1}x\,dx^n=\frac{x^n}{n!}\left(\log\frac{2}{x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k+n)!}x^{2k+n}\qquad\text{傍系}$$

導出

$$\begin{aligned}
csch^{-1}x &= \log\frac{2}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\;2k}x^{2k}\\
&=\log\frac{2}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\;2k\,(2k)!}x^{2k}\\
&=\log\frac{2}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k)!}x^{2k}\qquad\{\because\ (2k)!=(2k)!!\cdot(2k-1)!!\}
\end{aligned}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

　公式4·5·3'（4·5）で示されたように、この傍系高階積分は次のようであった。

$$\begin{aligned}
\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x csch^{-1}x\,dx^n &= \frac{x^n}{n!}csch^{-1}x+\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(-1)^r(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}\sinh^{-1}x\\
&+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^{r+s}\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{x^2+1}\\
&-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^r}{2r(2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}
\end{aligned}$$

従って上の項別高階積分は**傍系高階積分**である。

2011.02.15

K. Kono

宇宙人の数学