7　超積分

7･1　超原始関数と超積分

$\sum_{j=1}^{m} a_j$, $\prod_{k=1}^{n} b_k$, $\int_{a(n)}^{x} \cdots \int_{a(1)}^{x} f(x)\,dx^n$, etc . において $\sum$, $\prod$, $\int$, etc . は演算子であり、j , k , etc . はインデックスであり、$[1,m]$, $[1,n]$, etc . はインデックスの定義域である。これらのインデックスやその定義域は通常は自然数とその集合が使用される。しかし時にこの定義域が拡張されることがある。例えば、

$\sum_{j=1}^{m} a$ のインデックス j の定義域を自然数域 $[1,m]$から実数域 $[0,p]$に拡張したものが

$$\sum_{j=0}^{p} a = ap$$

$\prod_{k=1}^{n} b$ のインデックス k の定義域を自然数域 $[1,n]$から実数域 $[0,q]$に拡張したものが

$$\prod_{k=0}^{q} b = b^q$$

この2例からも分かるように、小数とか無理数とかは演算子のインデックスの定義域を拡張することによって得られたものである。　定義域を拡張することは一般には解析接続と呼ばれている。通常、解析接続は関数の定義域を拡張するのに用いられるけれども、上述のように演算子のインデックス関数の定義域を拡張することも可能である。

7･1･1　超原始関数

定義7･1･1

高階原始関数 $f^{<n>}(x)$ の積分演算子のインデックスを自然数区間 $[1,n]$から複素平面 $[0,p]$に解析接続して得られる関数 $f^{<p>}(x)$ を、$f(x)$ の**超原始関数**と言う。

$f^{<p>}(x)$ は超不定積分を意味することも、超積分関数を意味することもある。

例

$$(\sin x)^{<p>} = \sin\left(x - \frac{p\pi}{2}\right) + c_p(x) \qquad c_p(x) \text{ は任意の関数}$$

7･1･2　超積分

定義7･1･2

関数 f を1つの独立変数 x について $a(0)$ から $a(p)$ まで連続的に積分することを**超積分**と言い、次のように記述する。

$$\int_{a(p)}^{x} \sim \int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx^p \quad \left\{ = \int_{a(p)}^{x} \sim \int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx \sim dx \right\}$$

そして下限関数 $a(k)$ が

$a(k) = a$ $for\ \ all$ $\ k \in [0,p]$ のとき、 これを**固定下限の超積分**と呼び、

$a(k) \ne a$ $for\ some$ $k \in [0,p]$ のとき、 これを**可変下限の超積分**と呼ぶ。

例

$$\int_0^x \sim \int_0^x \sin x\, dx^p \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(2r+2+p)} x^{2r+1+p}$$

$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^x \sim \int_{\frac{0\pi}{2}}^x \sin x\, dx^p = \;\sin\left(x - \frac{p\pi}{2}\right)$$

7･1･3　超積分の基本定理

定理4･1･3の積分演算子のインデックスを自然数区間 $[1, n]$ から複素平面 $[0, p]$ に解析接続して次の定理を得る。

定理7･1･3

$f^{<r>}$　$r \in [0, p]$ は 閉区間 I 上の連続関数 且つ f の任意の r 階超原始関数とし
$a(r)$ は閉区間 $[0, p]$ 上の連続関数とするとき、$a(r), x \in I$ に対して次式が成立する。

$$\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(0)}^x f(x)\, dx^p = f^{<p>}(x) \;-\; \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}\{a(p-r)\} \int_{a(p)}^x \sim \int_{a(p-r+1)}^x dx^r \tag{1.1}$$

特に $a(r) = a \quad for\ all\ \ r \in [0, p]$ のとき

$$\int_a^x \sim \int_a^x f(x)\, dx^p = f^{<p>}(x) \;-\; \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}(a) \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} \tag{1.2}$$

積分定数関数

これらの式の $\sum_{r=0}^{p-1}$ 以下を **積分定数関数** と呼ぶことにする。p は実数であるから、$\sum_{r=0}^{p-1}$ 以下を一般的に求めるためには微積分演算子 $<r>, (s)$ に関する微積分を要し、非常に困難である。

但し $f(x) = e^x$ のときには例外的に簡単になり、(1.2) より次式を得ることができる。

$$\sum_{r=0}^{p-1} e^a \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} \;=\; e^x - \int_a^x \sim \int_a^x e^x dx^p \;=\; e^a \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} - \frac{(x-a)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)} \right\}$$

$$\left(\because \quad e^x = e^a \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} \quad , \quad \int_a^x \sim \int_a^x e^x dx^p = e^a \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)} \right)$$

7･1･4　直系と傍系

定義7･1･4

$$\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(0)}^x f(x)\, dx^p = f^{<p>}(x) \;-\; \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}\{a(p-r)\} \int_{a(p)}^x \sim \int_{a(p-r+1)}^x dx^r \tag{1.1}$$

において、

積分定数関数が0であるとき、$\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(0)}^x f(x)\, dx^p$ を **直系超積分** と言い、

これに等しい関数 を **直系超原始関数** と言う。

積分定数関数が0でないとき、$\int_{a(p)}^{x} \sim \int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx^{p}$ を **傍系超積分** と言い、

これに等しい関数 を **傍系超原始関数** と言う。

これらは(1.2) においても同様である。

直系超原始関数を簡単に言えば、**積分定数関数を無視して $f(x)$ を x について連続回積分したものが直系超原始関数** である。

例

左辺: 傍系超積分　　　右辺: 傍系超原始関数

$$\int_{p}^{x} \sim \int_{0}^{x} \sin x\,dx^{p} = \sin\left(x - \frac{p\pi}{2}\right) - \sum_{r=0}^{p-1} \sin\left\{(p-r) - \frac{(p-r)\pi}{2}\right\} \int_{p}^{x} \sim \int_{p-r+1}^{x} dx^{r}$$

$$\int_{0}^{x} \sim \int_{0}^{x} e^{x} dx^{p} = e^{x} - \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{x^{r}}{\Gamma(1+r)} - \frac{x^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}\right\} \quad \left(= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}\right)$$

左辺: 直系超積分　　　右辺: 直系超原始関数

$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi}{2}}^{x} \sin x\,dx^{p} = \sin\left(x - \frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{x} \sim \int_{-\infty}^{x} e^{x} dx^{p} = e^{x}$$

7・1・5 超積分が直系であるための必要条件

定理7・1・3 の (1.1) において、1の超積分は自由な値を取り得るから、積分定数関数が0であるためには、$f^{<r>}\{a(r)\} = 0 \quad for\ all\ \ r \in [0, p]$ であるべきことが解かる。これは重要なので定理として述べておく。

定理7・1・5

$$\int_{a(p)}^{x} \sim \int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx^{p} = f^{<p>}(x) - \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}\{a(p-r)\} \int_{a(p)}^{x} \sim \int_{a(p-r+1)}^{x} dx^{r} \tag{1.1}$$

$$\int_{a}^{x} \sim \int_{a}^{x} f(x)\,dx^{p} = f^{<p>}(x) - \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}(a) \frac{(x-a)^{r}}{\Gamma(1+r)} \tag{1.2}$$

において、これらの超積分が直系であるための必要条件はそれぞれ次のとおりである。

$$f^{<r>}\{a(r)\} = 0 \qquad for\ all\ \ r \in [0, p]$$

$$f^{<r>}(a) = 0 \qquad for\ all\ \ r \in [0, p]$$

即ち、**超積分が直系であるための必要条件は、$r = 0 \sim p$ の全ての連続階において積分下限 $a(r)$ または a が超原始関数 $f^{<r>}$ の零点であることである。**

なお、これが十分条件でないことは高階積分の場合と同じである。

Note

2005年に Sugimoto氏 に教えて頂いて知ったのであるが、このような積分は英語で 'Fractional Integral', 日本語で「分数階積分」とか「非整数階積分」とか呼ばれていて近年ヨーロッパで流行っている分野らしい。本章を書くに当りこれらの用語に従おうかとも思ったが、階数が複素数にまで拡張できるのに 'Fractional' では風呂敷が小さいので筆者が昔から使っていた超積分 (Super Integral) のままとした。

7・2　Fractional Integral

7・2・1　Fractional Integral と Riemann-Liouville 積分

Fractional Integrral は200年近く前からあるようで、最も一般的なものは次式で示される。

$$ {}_aD_x^{-p}f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt \qquad (a \text{ は左辺の零点}) \tag{2.0} $$

左辺 ${}_aD_x^{-p}f(x)$ は**非整数階の原始関数**で、これは前節で定義した**超原始関数** $f^{<p>}(x)$ に同じである。記号 ${}_aD_x^{-p}$ は Riemann-Liouville operator と呼ばれている。一方、右辺の積分は **Riemann-Liouville 積分**と呼ばれており、これは前節で定義した**超積分**に相当する。

超原始関数（非整数階の原始関数）の多くは初等関数で表すことができないが、幾つかは初等関数で表すことができる。伝統的な Fractional Integral では、この初等関数で表された超原始関数を Riemann-Liouville 積分から導出する。しかしその方法は非常に難しい。以下2例を示す。

（1）　$f(x) = x^{\alpha}$ の超原始関数

$$ f(t) = t^{\alpha}\ ,\ \ g(x-t) = \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)} $$

と置けば

$$ \left(x^{\alpha}\right)^{<p>} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x t^{\alpha}(x-t)^{p-1}dt = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt $$

となり、これは畳み込み積分 $(f*g)(x)$ であることが判る。そこで $(f*g)(x)$ のラプラス変換を行うと

$$ (f*g)(x) \longrightarrow F(s)\cdot G(s) $$

$$ f(x) = x^{\alpha} \longrightarrow \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} = F(s) $$

$$ g(x) = \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p)}{s^p} = \frac{1}{s^p} = G(s) $$

$$ \therefore\ \ F(s)\cdot G(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\frac{1}{s^p} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}\frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{s^{\alpha+p+1}} $$

となり、これをラプラス逆変換すると $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}x^{a+p}$ を得る。

（2）　$f(x) = e^{x}$ の超原始関数

$$ \left(\ e^{x}\right)^{<p>} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1}e^t dt $$

となるが、右辺の不定積分は不完全ガンマ関数 $\Gamma(p,x) = \int_x^{\infty}\tau^{p-1}e^{-\tau}d\tau$ を用いて

$$ \int (x-t)^{p-1}e^t dt = e^x\Gamma(p,x-t) $$

と表される。よって

$$\left(e^{x}\right)^{<p>} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{p-1}e^{t}dt = \frac{e^{x}}{\Gamma(p)}\left[\Gamma(p,x-t)\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{e^{x}}{\Gamma(p)}\left\{\Gamma(p,x-x) - \Gamma(p,x+\infty)\right\} = \frac{e^{x}}{\Gamma(p)}\Gamma(p)$$

$$= e^{x}$$

7･2･2 Fractional Integral の短所と長所

以上2例で見たように Fractional Integral はかくも難解である。最初のベキ関数の計算は名人芸である。これが $(ax+b)^{<p>}$ であってもこのやり方で解けるものかどうか筆者には自信が無い。後の指数関数の計算は力ずくである。実はこれには数式ソフトの力を借りた。とても筆者にできた計算ではない。対数関数にも挑戦したが数式ソフトの力を借りても歯が立たなかった。p が非整数の場合、Riemann-Liouville 積分によって初等関数で表された超原始関数を得ようと言う手法は、有理数か無理数かも分からない無限小数を分数化する試みのように見える。

次に、Fractional Integral では Riemann-Liouville 積分の下限の採り方がよく分からない。これは(2.0)が任意の下底 a について成立することに起因するものであろうが、最大の原因は Fractional Integral には直系・傍系の概念がないためである。通常の積分であろうと Fractional Integral であろうと、直系原始関数を求めるのが本来であると筆者は思う。

最後に、Fractional Integral は Riemann-Liouville 積分に依拠しているため、可変下限の超積分が扱えない。具体的には、三角関数や双曲線関数の超積分が出来ない。これらを可能にするためには Riemann-Liouville 積分から離れることが不可避である。

以上、Fractional Integral の短所ばかり挙げつらったが、固定下限の超積分にはこれ以上のものはない。高階積分の連続型である超積分が単積分で表されること、数値積分できること、この長所・威力は絶大である。超積分の諸概念を補足して適切な使い方をすれば、極めて強力なツールとなる。

7･2･3 Fractional Integral と超積分

定理7･2･3

$f(x)$ を連続積分可能な関数 $\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、任意の正数 p について次式が成立する。

$$\int_{a}^{x}\sim\int_{a}^{x}f(x)dx^{p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{a}^{x}(x-t)^{p-1}f(t)dt \tag{2.1}$$

証明

4･2 の定理4･2･3の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続する。

Remark

この定理の意味するところは、固定下限の超積分と Fractional Integral とは同じものだと言うことである。

ところが超積分では初等関数で表された超原始関数を導出するのに Riemann-Liouville 積分を用いずに高階積分を用いる。即ち、先ず高階積分で高階原始関数の関数形を求め、然る後にそれを実数化するのである。超積分ではこの方法により、上の例のような難しいことをしなくて

も容易に初等関数で表された超原始関数を得ることができる。そしてその結果を数値的に検証するために Riemann-Liouville 積分が使用される。

論より証拠

定理7･2･3の正当性を示すため、次の3節中の公式をここに先取りして次のように記述する。

$$\int_0^x \sim \int_0^x x^{\alpha} dx^p = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)} x^{\alpha+p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} t^{\alpha} dt$$

$$\int_{\mp\infty}^x \sim \int_{\mp\infty}^x e^{\pm x} dx^p = (\pm 1)^p e^{\pm x} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{\mp\infty}^x (x-t)^{p-1} e^{\pm t} dt$$

$$\int_0^x \sim \int_0^x \log x\, dx^p = \frac{\log x - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} x^p = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} \log t\, dt$$

中辺が高階積分を敷衍した超積分であり、右辺が Riemann-Liouville 積分である。これらを数式ソフト(MuPAD)に入力し、任意の1点を適当に選んでその関数値を求めている。両者は一致しており、超積分と Riemann-Liouville の積分が等しいことを数値的に示している。

3/2 times integral of x^3

```
a = 3;  p = 3 / 2;
```

$$\texttt{f1[x\_] :=} \frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a + p]}} x^{a+p}$$

$$\texttt{fr[x\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[p]}} \int_0^x (x-t)^{p-1} t^a \, dt$$

N[f1[3], 10]	N[fr[3], 10]
16.08200268	16.08200268

4/3 times integral of e^x

```
p = 4 / 3;
f1[x_] := e^x
```

$$\texttt{fr[x\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[p]}} \int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1} e^t \, dt$$

N[f1[3], 10]	N[fr[3], 10]
20.08553692	20.08553692

5/4 times integral of log x

```
p = 5 / 4;
```

$$\texttt{f1[x\_] :=} \frac{\texttt{Log[x] - PolyGamma[1 + p] - EulerGamma}}{\texttt{Gamma[1 + p]}} x^p$$

$$\texttt{fr[x\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[p]}} \int_0^x (x-t)^{p-1} \texttt{Log[t]} \, dt$$

N[f1[7], 10]	N[fr[7], 10]
8.000834211	8.000834211

7·3 ベキ関数の超積分

7·3·1 ベキ関数の超積分

4·3 の公式4·3·1の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。なお、Riemann-Liouville 積分も併せて表示する。

公式7·3·1

(1) 基本式

$$\int_0^x \sim \int_0^x x^\alpha dx^p = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)} x^{\alpha+p} \qquad = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} t^\alpha dt \quad (\alpha \geqq 0)$$

$$\int_\infty^x \sim \int_\infty^x x^\alpha dx^p = (-1)^p \frac{\Gamma(-\alpha-p)}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha+p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\infty^x (x-t)^{p-1} t^\alpha dt \quad (\alpha < -p)$$

(2) 線形式

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \sim \int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^\alpha dx^p = \left(\frac{1}{a}\right)^p \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)} (ax+b)^{\alpha+p} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\frac{b}{a}}^x (x-t)^{p-1} (at+b)^\alpha dt$$

$$\int_\infty^x \sim \int_\infty^x (ax+b)^\alpha dx^p = \left(-\frac{1}{a}\right)^p \frac{\Gamma(-\alpha-p)}{\Gamma(-\alpha)} (ax+b)^{\alpha+p} \qquad (\alpha < -p)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\infty^x (x-t)^{p-1} (at+b)^\alpha dt$$

Note

$-p \leqq \alpha < 0$ のときはベキ関数の超積分を定義しない。このときは積分下限が不規則に変化するからである。

例1 $\boldsymbol{\alpha \geqq 0}$ の場合

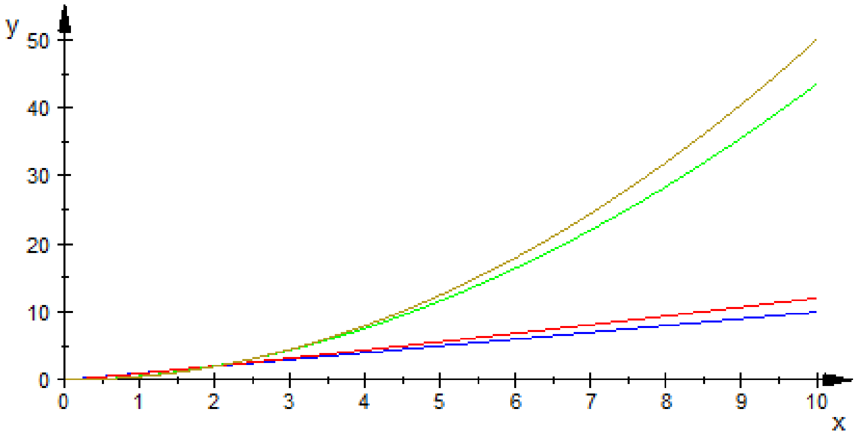
$$\left(x^1\right)^{\left\langle \frac{1}{10} \right\rangle} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1+1+\frac{1}{10}\right)} x^{1+\frac{1}{10}} = \frac{100}{11\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)} x^{\frac{11}{10}} = 0.955579\, x^{\frac{11}{10}}$$

$$\left(x^1\right)^{\left\langle \frac{9}{10} \right\rangle} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1+1+\frac{9}{10}\right)} x^{1+\frac{9}{10}} = \frac{100}{171\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} x^{\frac{19}{10}} = 0.547239\, x^{\frac{19}{10}}$$

$$\left(x^2\right)^{<e>} = \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2+e)} x^{2+e} = \frac{2}{\Gamma(3+e)} x^{2+e} = 0.026755\, x^{4.718281828}$$

$$\left(x^1\right)^{<i>} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1+i)} x^{1+i} = \frac{x^{1+i}}{(1+i)!} = (1.200176 - 0.630568\, i)\, x^{1+i}$$

x^1, $\left(x^1\right)^{<1/10>}$, $\left(x^1\right)^{<9/10>}$, $x^2/2$ を並べて図示すると次のとおりである。



例2　$\boldsymbol{\alpha < -p}$ の場合

$$\left\{\frac{1}{(5x+4)^{5/2}}\right\}^{\left\langle \frac{3}{2}\right\rangle} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(5/2\ -3/2)}{\Gamma(5/2)}(5x+4)^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{4\sqrt{5}\,i}{75\sqrt{\pi}\,(5x+4)} = -\frac{0.0672835}{5x+4}\,i$$

$$\left(x^{-2}\right)^{<1-i>} = (-1)^{1-i}\frac{\Gamma\{2-(1-i)\}}{\Gamma(2)}\,x^{-2+1-i}$$

$$= -\frac{1}{(-1)^i}\,\frac{i\,!}{x^{1+i}} = \frac{-11.524427 + 3.585646\,i}{x^{1+i}}$$

$$\left(x^{-1}\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle} = (-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(1-1/2)}{\Gamma(1)}\,x^{-1+\frac{1}{2}} = i\sqrt{\pi}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

例3　定義外(不可)

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle} = \int_0^x \sim \int_\infty^x x^{-\frac{1}{2}}\,dx^{\frac{1}{2}} \qquad (-p = \alpha < 0)$$

$$\left(x^{-1}\right)^{<2>} = \int_0^x\!\!\int_1^x x^{-1}\,dx^2 = x(\log x - 1) \qquad (-p < \alpha < 0)$$

7・3・2　ベキ関数の半積分

特に $p=1/2$ の超積分は半積分と呼ばれる。

公式7・3・2

n を非負の整数、$-1!! \equiv 1$, $(2n-1)!! \equiv 1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$

$$0!! \equiv 1,\quad 2n!! \equiv 2\times4\times6\times\cdots\times2n$$

とするとき、次式が成立する。

(1) 基本式

$$\left(x^{n}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\frac{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2(2n)!!(n+1)}x^{n+1}$$

(2) 線形式

$$\left\{(ax+b)^{n}\right\}^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\left\{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}\right\}^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2(2n)!!(n+1)}(ax+b)^{n+1}$$

導出

公式7・3・1(2)線形式より

$$\left\{(ax+b)^{n}\right\}^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(1+n+\frac{1}{2}\right)}(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\left\{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}\right\}^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left\{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}}{\Gamma\left\{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}}(ax+b)^{n+1}$$

ここで $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$ であるから

$$\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(1+n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{2^{n+1}n!}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\Gamma\left\{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}}{\Gamma\left\{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}}=\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}$$

$$=\frac{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2(2n)!!(n+1)}x^{n+1}$$

これらを上式に代入して線形式を得、$a=1, b=0$ とおいて基本式を得る。。

例1

$$\left(x^{0}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}=\frac{2\cdot 0!!}{1!!\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^1\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{2\cdot 2!!}{3!!\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(x^2\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{2\cdot 4!!}{5!!\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{5}{2}}$$

$$\left(x^3\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{2\cdot 6!!}{7!!\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{7}{2}} = \frac{32}{35\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{7}{2}}$$

例2

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{1!!\sqrt{\pi}}{2\cdot 0!!}x^1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}x^1$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{3!!\sqrt{\pi}}{2\cdot 2!!\cdot 2}x^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}x^2$$

$$\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{5!!\sqrt{\pi}}{2\cdot 4!!\cdot 3}x^3 = \frac{15\sqrt{\pi}}{48}x^3$$

$$\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{7!!\sqrt{\pi}}{2\cdot 6!!\cdot 4}x^4 = \frac{35\sqrt{\pi}}{128}x^4$$

7･3･3 整ベキ関数の半積分(Fractional Integral)

今度はRiemann-Liouvilleの積分により整ベキ関数の半積分を求めてみる。

公式7･3･3

n を自然数とするとき次式が成立する。

$$\left(x^n\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\cdot x^{n+\frac{1}{2}}$$

証明

n を自然数として $\alpha=n$, $p=1/2$ とすれば $\alpha>-p$ であるから、これらに公式7･3･1を適用して次式を得る。

$$\left(x^n\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^n\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt$$

そして「岩波数学公式Ⅰ」p96 によると

$$\int \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt = \frac{2\sqrt{x-t}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{2n-2r+1}$$

であるから

$$\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt = \left[\frac{2\sqrt{x-t}}{(-1)^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} (-x)^r \binom{n}{r} \frac{(x-t)^{n-r}}{2n-2r+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{2}{(-1)^n} x^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{x^n}{2n-2r+1}$$

$$= 2\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{2n-2r+1} \binom{n}{r} \cdot x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \qquad \left(x^n\right)^{\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{2n-2r+1} \binom{n}{r} \cdot x^{n+\frac{1}{2}}$$

を得るが、さらに一工夫

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{2n-2r+1} \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{2(n-r)+1} \binom{n}{n-r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$$

と変形すれば

$$\left(x^n\right)^{\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \cdot x^{n+\frac{1}{2}}$$

となる。

副産物

公式7･3･2 によれば

$$\left(x^n\right)^{\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}}$$

である。これは公式7･3･3 と一致しなければならないから

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}$$

とならねばならず、これより

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{3.2}$$

を得る。展開すれば

$$\frac{1}{1}\binom{0}{0} = \frac{0!!}{1!!}$$

$$\frac{1}{1}\binom{1}{0} - \frac{1}{3}\binom{1}{1} = \frac{2!!}{3!!}$$

$$\frac{1}{1}\binom{2}{0} - \frac{1}{3}\binom{2}{1} + \frac{1}{5}\binom{2}{2} = \frac{4!!}{5!!}$$

$$\vdots$$

であるが、残念ながらこれは既出であった。

余談であるが

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1k+1}\binom{n}{k}=\frac{(1n)!}{(1n+1)!}=\frac{1}{n+1} \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}\binom{n}{k}=\frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!} \qquad \text{!!! は3重階乗} \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{mk+1}\binom{n}{k}=\frac{(mn)!_m}{(mn+1)!_m} \qquad !_m \text{ は } m \text{ 重階乗} \tag{3.m}$$

となる。このことは、x^n の $1/m$ 階積分も類似の式で表せそうな予感を引き起こす。
なお、$m=3$ 以上は未出のようである。

7・3・4 整ベキ関数の分数階積分(Fractional Integral)

公式7・3・3を一般化して整ベキ関数の分数階積分を求める。先ず次の Lemma を準備する。

Lemma

m , n を自然数とするとき次式が成立する。

$$\int (x-t)^{-\frac{m-1}{m}}t^n\,dt=\frac{m(x-t)^{\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}$$

証明

$$F(t)=\frac{m(x-t)^{\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}$$

と置きこれを微分すれば

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t)&=\frac{d}{dt}\frac{m(x-t)^{\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}\\
&\quad+\frac{m(x-t)^{\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}\\
&=-\frac{(x-t)^{\frac{1}{m}-1}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}\\
&\quad-\frac{m(x-t)^{\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(n-r)(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r-1}}{m(n-r)+1}\\
&=-\frac{(x-t)^{\frac{1}{m}-1}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}\\
&\quad-\frac{(x-t)^{\frac{1}{m}-1}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}m(n-r)(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(x-t)^{\frac{1}{m}-1}}{(-1)^n} \sum_{r=0}^{n} \{1+m(n-r)\}(-x)^r \binom{n}{r} \frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1}$$

$$= \frac{(x-t)^{\frac{1}{m}-1}}{(-1)^n} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-x)^r (x-t)^{n-r} = \frac{(x-t)^{\frac{1}{m}-1}}{(-1)^n} (-t)^n$$

$$= (x-t)^{-\frac{m-1}{m}} t^n$$

これを用いて次の公式が得られる。

公式7･3･4

m , n を自然数とするとき次式が成立する。

$$\left(x^n\right)^{\left\langle \frac{1}{m} \right\rangle} = \frac{m}{\Gamma(1/m)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+1} \binom{n}{k} \cdot x^{n+\frac{1}{m}} \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+1} \binom{n}{k} = \frac{B(1+n\,,\,1/m)}{m} \qquad B(\ )\text{ はベータ関数} \tag{4.2}$$

証明

$$\left(x^{\alpha}\right)^{<p>} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)} x^{\alpha+p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} t^{\alpha} dt \qquad (\alpha \geqq 0)$$

において $\alpha=n$, $p=1/m$ と置けば

$$\left(x^n\right)^{\left\langle \frac{1}{m} \right\rangle} = \frac{1}{\Gamma(1/m)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{m-1}{m}} t^n dt$$

上記 Lemma を用いてこの定積分を計算すると

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{m-1}{m}} t^n dt = \left[\frac{m(x-t)^{\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} (-x)^r \binom{n}{r} \frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{m}{(-1)^n} x^{\frac{1}{m}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{x^n}{m(n-r)+1}$$

$$= m \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{m(n-r)+1} \binom{n}{r} \cdot x^{n+\frac{1}{m}}$$

さらに r,n は共に整数であるから

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{m(n-r)+1} \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{m(n-r)+1} \binom{n}{n-r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+1} \binom{n}{k}$$

と変形すれば

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{m-1}{m}} t^n dt = m \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+1} \binom{n}{k} \cdot x^{n+\frac{1}{m}}$$

となり、故に

$$\left(x^{n}\right)^{\left\langle\frac{1}{m}\right\rangle}=\frac{m}{\Gamma(1/m)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{mk+1}\binom{n}{k}\cdot x^{n+\frac{1}{m}} \tag{4.1}$$

次に

$$\left(x^{n}\right)^{\left\langle\frac{1}{m}\right\rangle}=\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+1/m)}x^{n+\frac{1}{m}}=\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1/m)}\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(1+n+1/m)}x^{n+\frac{1}{m}}$$

この結果は(4.1)と等しくなければならないから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{mk+1}\binom{n}{k}=\frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1/m)}{m\Gamma(1+n+1/m)}=\frac{B(1+n,\,1/m)}{m} \tag{4.2}$$

を得る。

Remark

(4.2) は (4.1) がベータ関数で表すことができ、従ってn,mを実数化できることを示唆している。実際、x^{α}のp 階超積分は次のように表すこともできる。即ち

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)}=\frac{1}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(p)}{\Gamma(1+\alpha+p)}=\frac{B(1+\alpha,\,p)}{\Gamma(p)}$$

であるから

$$\left(x^{\alpha}\right)^{<p>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)}x^{\alpha+p}=\frac{B(1+\alpha,\,p)}{\Gamma(p)}x^{\alpha+p}\qquad(\alpha\geqq 0) \tag{4.3}$$

従ってまた

$$\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}t^{\alpha}dt=B(1+\alpha,\,p)\,x^{\alpha+p}\qquad(\alpha\geqq 0) \tag{4.4}$$

例1

$$\left(x^{2}\right)^{\left\langle\frac{1}{3}\right\rangle}=\frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2+1/3)}x^{2+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\Gamma(10/3)}x^{\frac{7}{3}}\qquad=0.7199\,x^{\frac{7}{3}}$$

$$\left(x^{2}\right)^{\left\langle\frac{1}{3}\right\rangle}=\frac{3}{\Gamma(1/3)}\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^{k}}{3k+1}\binom{2}{k}\cdot x^{\frac{7}{3}}$$

$$=\frac{3}{\Gamma(1/3)}\left\{\frac{1}{1}\binom{2}{0}-\frac{1}{4}\binom{2}{1}+\frac{1}{7}\binom{2}{2}\right\}\cdot x^{\frac{7}{3}}\qquad=0.7199\,x^{\frac{7}{3}}$$

$$\left(x^{3}\right)^{\left\langle\frac{1}{4}\right\rangle}=\frac{4}{\Gamma(1/4)}\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^{k}}{4k+1}\binom{3}{k}\cdot x^{\frac{13}{4}}$$

$$=\frac{4}{\Gamma(1/4)}\left\{\frac{1}{1}\binom{3}{0}-\frac{1}{5}\binom{3}{1}+\frac{1}{9}\binom{3}{2}-\frac{1}{13}\binom{3}{3}\right\}\cdot x^{\frac{13}{4}}=0.7241\,x^{\frac{13}{4}}$$

例2

$$\frac{1}{1}\binom{2}{0}-\frac{1}{4}\binom{2}{1}+\frac{1}{7}\binom{2}{2}=\frac{B(1+2,\,1/3)}{3}\qquad=\frac{9}{14}$$

$$\frac{1}{1}\binom{9}{0}-\frac{1}{4}\binom{9}{1}+\frac{1}{7}\binom{9}{2}-+\cdots-\frac{1}{28}\binom{9}{9}=\frac{B(1+9,\,1/3)}{3}=\frac{1{,}594{,}323}{3{,}803{,}800}$$

$$\binom{3}{0}-\frac{1}{5}\binom{3}{1}+\frac{1}{9}\binom{3}{2}-\frac{1}{13}\binom{3}{3}=\frac{B(1+3,\,1/4)}{4}=\frac{128}{195}$$

7･3･5 整ベキ関数の超積分

公式7･3･4において $p=1/m$ と置けば 次の公式が得られる。

公式7･3･5

n を自然数とするとき、正数 p に対して次式が成立する。

$$\left(x^{n}\right)^{<p>}=\frac{1}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{p+k}\binom{n}{k}\cdot x^{n+p} \tag{5.1}$$

$$B(n,p)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}}{p+k}\binom{n-1}{k} \qquad B(\ )\text{はベータ関数} \tag{5.2}$$

例1

$$\left(x^{2}\right)^{<e>}=\frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2+e)}x^{2+e}=\frac{2}{\Gamma(3+e)}x^{2+e}=0.026755\,x^{2+e}$$

$$\left(x^{2}\right)^{<e>}=\frac{1}{\Gamma(e)}\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^{k}}{e+k}\binom{2}{k}\cdot x^{2+e}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(e)}\left\{\frac{1}{e}\binom{2}{0}-\frac{1}{e+1}\binom{2}{1}+\frac{1}{e+2}\binom{2}{2}\right\}x^{2+e}=0.026755\,x^{2+e}$$

例2

$$B(2,e)=\frac{1}{e}\binom{1}{0}-\frac{1}{e+1}\binom{1}{1}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e+1}=0.098938\cdots$$

$$B(3,\pi)=\frac{1}{\pi}\binom{2}{0}-\frac{1}{\pi+1}\binom{2}{1}+\frac{1}{\pi+2}\binom{2}{2}=0.029896\cdots$$

7･3･6 正ベキ関数の超積分

公式7･3･5は二項式であるため、更なる一般化が可能である。

公式7･3･6

正数 p,q に対して次式が成立する。

$$\left(x^{q}\right)^{<p>}=\frac{x^{q+p}}{\Gamma(p)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{p+r}\binom{q}{r} \tag{6.1}$$

$$B(q,p)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{p+r}\binom{q-1}{r} \qquad B(\ )\text{はベータ関数} \tag{6.2}$$

7・3・7 多項式の超積分

被積分関数が多項式 $f(x)=\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}\,x^{m-k}$ の場合、特段の事情がない限り、その超原始関数の零点は次のようにするのがよい。（筆者の経験による。）

（1） $f(x)$ が1次式 $(ax+b)$ で因数分解されるとき、$-b/a$ を零点とする。
（2） $f(x)$ が1次式 $(ax+b)$ で因数分解されないとき、0 を零点とする。

例えば、$f(x)=x^2-2\pi x+\pi^2$ の $1/2$ 階超積分をする場合は

$$\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle}=\left\{(x-\pi)^2\right\}^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle}=\frac{16}{15\sqrt{\pi}}(x-\pi)^{\frac{5}{2}}$$

とするのが多くの場合正しい。
これを項別に

$$\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle}=\left(x^2\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle}-2\pi\left(x^1\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle}+\pi^2\left(x^0\right)^{\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{15}x^2-\frac{4\pi}{3}x+\pi^2\right)$$

とすると、前者とは結果が異なってくる。
言うまでも無くこの原因は、

$$\int_{\pi}^{x}\sim\int_{\pi}^{x}\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)dx^{\frac{1}{2}} \quad と \quad \int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)dx^{\frac{1}{2}}$$

の違いである。即ち、前者が直系超積分されたのに対し後者は傍系超積分されたところにある。
傍系超積分すべき先験的f理由がある場合には後者が正しいが、そうでない場合は前者が正しい。

7・4　指数関数の超積分

7・4・1　指数関数の超積分

4・3 の公式4・3・2の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。なお、Riemann-Liouville 積分も併せて表示する。

公式7・4・1

(1)　基本式

$$\int_{\mp\infty}^{x}\sim\int_{\mp\infty}^{x} e^{\pm x}dx^{p} \quad = (\pm 1)^{p}e^{\pm x} \quad = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{\mp\infty}^{x}(x-t)^{p-1}e^{\pm t}dt$$

(2)　線形式

$$\int_{\mp\infty}^{x}\sim\int_{\mp\infty}^{x} e^{ax+b}dx^{p} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p}e^{ax+b} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{\mp\infty}^{x}(x-t)^{p-1}e^{at+b}dt$$

($a>0$: - , $a<0$: +)

(3)　一般式

$$\int_{\mp\infty}^{x}\sim\int_{\mp\infty}^{x} \alpha^{ax+b}dx^{p} = \left(\frac{1}{a\log\alpha}\right)^{p}\alpha^{ax+b} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{\mp\infty}^{x}(x-t)^{p-1}\alpha^{at+b}dt$$

($a>0$: - , $a<0$: +)

一般式の導出

$c=a\log\alpha$, $d=b\log\alpha$と置けば

$$e^{cx+d} = e^{xa\log\alpha+b\log\alpha} = e^{ax\log\alpha}e^{b\log\alpha} = \left(e^{\log\alpha}\right)^{ax}\left(e^{\log\alpha}\right)^{b} = \alpha^{ax}\alpha^{b} = \alpha^{ax+b}$$

である。よってこれを(2)線形式に適用することによって直ちに(3)一般式を得る。

例

$$\left(e^{-x}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = (-1)^{\frac{1}{2}}e^{-x} \quad = i\,e^{-x}$$

$$\left(e^{3x-4}\right)^{\langle\sqrt{2}\rangle} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}e^{3x-4} \quad = 0.211469\,e^{3x-4}$$

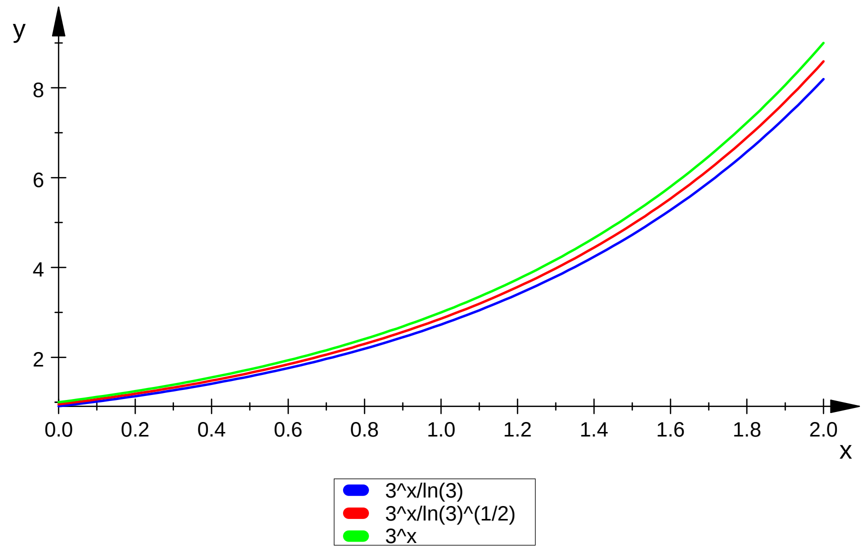
$$\left(3^{x}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \left(\frac{1}{\log 3}\right)^{1/2}3^{x} \quad = 0.954064\times 3^{x}$$

$$\left\{(-3)^{x}\right\}^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \left(\frac{1}{\log(-3)}\right)^{\frac{1}{2}}(-3)^{x}$$

$$= (0.447018 - 0.317241\,i)\times(-3)^{x}$$

$$\left(2^{x}\right)^{\langle i\rangle} = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^{i}2^{x} = (0.933582 + 0.358362\,i)\times 2^{x}$$

3^{x} , $\left(3^{x}\right)^{\langle 1/2\rangle}$, $\left(3^{x}\right)^{\langle 1\rangle}$ を並べて図示すると次のとおりである。



7･4･2　指数関数の超積分（双曲線関数表示）

指数関数の超積分はまた双曲線関数を用いて次のようにも表される。

公式7･4･2

（1）　基本式

$$\int_{\mp\infty}^{x} \sim \int_{\mp\infty}^{x} e^{\pm x} dx^{p} = i^{p}\left\{\cosh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right) \pm \sinh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)\right\}$$

$$= (\cosh x)^{\langle p\rangle} \pm (\sinh x)^{\langle p\rangle}$$

（2）　線形式

$$\int_{\mp\infty}^{x} \sim \int_{\mp\infty}^{x} e^{ax+b} dx^{p} = \left(\frac{i}{a}\right)^{p} \cosh\left\{\left(ax+b-\frac{p\pi i}{2}\right)^{p} \pm \sinh\left(ax+b-\frac{p\pi i}{2}\right)\right\}$$

$$= \{\cosh(ax+b)\}^{\langle p\rangle} \pm \{\cosh(ax+b)\}^{\langle p\rangle}$$

証明

後述、公式7･7･1より次式が成立する。

$$(\cosh x)^{\langle p\rangle} = i^{p}\cosh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{e^{x}+(-1)^{p}e^{-x}\right\}$$

$$(\sinh x)^{\langle p\rangle} = i^{p}\sinh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{e^{x}-(-1)^{p}e^{-x}\right\}$$

この2式を加減すると

$$i^{p}\left\{\cosh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)+\sinh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)\right\} = e^{x}$$

$$i^{p}\left\{\cosh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)-\sinh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)\right\} = (-1)^{p}e^{-x}$$

となり、これらを公式7･4･1の（1）に代入して基本式を得る。線形式についても同様である。

Note

従ってまた、概念上、次式が成立する。

$$\int_{\mp\infty}^{x} \sim \int_{\mp\infty}^{x} e^{\pm x} dx^{p} = \int_{\frac{(p-1)\pi i}{2a}}^{x} \sim \int_{\frac{-1\pi i}{2a}}^{x} \cosh x\, dx^{p} \pm \int_{\frac{p\pi i}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi i}{2}}^{x} \sinh x\, dx^{p}$$

実際、p が自然数 n のときには両辺は直ちに演算機能を回復して次の高階積分に帰着する。

$$\int_{\mp\infty}^{x} \cdots \int_{\mp\infty}^{x} e^{\pm x} dx^{n} = \int_{\frac{(n-1)\pi i}{2a}}^{x} \cdots \int_{\frac{0\pi i}{2a}}^{x} \cosh x\, dx^{n} \pm \int_{\frac{n\pi i}{2}}^{x} \cdots \int_{\frac{1\pi i}{2}}^{x} \sinh x\, dx^{n}$$

7·5 対数関数の超積分

4·3 の公式4·3·3の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。なお、Riemann-Liouville 積分も併せて表示する。

公式7·5·1

(1) 基本式

$$\int_0^x \sim \int_0^x \log x\, dx^p = \frac{\log x - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} x^p = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} \log t\, dt$$

(2) 線形式

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \sim \int_{-\frac{b}{a}}^x \log(ax+b)\, dx^p = \frac{\log(ax+b) - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} \left(x + \frac{b}{a}\right)^p$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\frac{b}{a}}^x (x-t)^{p-1} \log(at+b)\, dt$$

導出

「4 高階積分」の公式4·3·3は次のとおりであった。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log x\, dx^n = \frac{x^n}{n!} \left(\log x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \cdots \int_{-\frac{b}{a}}^x \log(ax+b)\, dx^n = \frac{1}{n!} \left(x + \frac{b}{a}\right)^n \left\{ \log(ax+b) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\}$$

また、「1 ガンマ関数とディガンマ関数」によれば次のとおりであった。

$$n! = \Gamma(1+n), \qquad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \psi(1+n) + \gamma$$

よってこれらを上式に代入し、積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して与式を得る。

例

$$(\log x)^{<1>} = \frac{\log x - \psi(1+1) - \gamma}{\Gamma(1+1)} x^1 = x(\log x - 1)$$

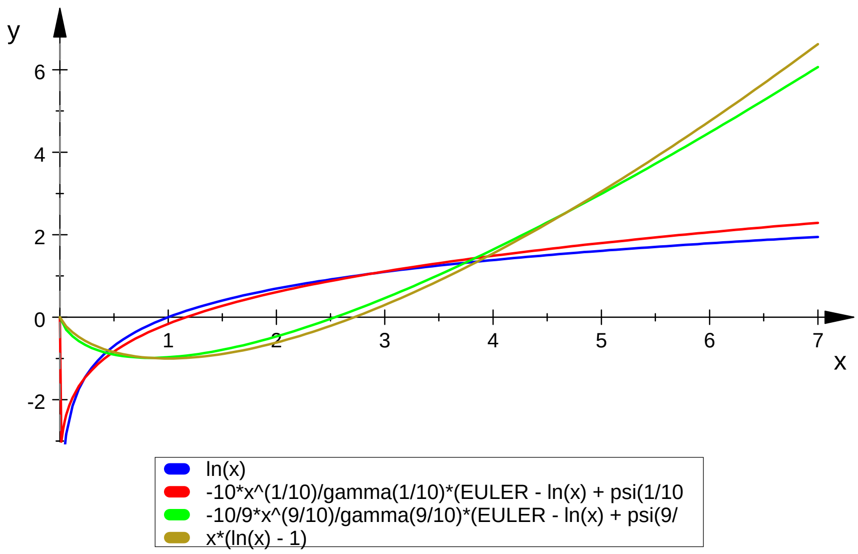
$$\{\log(3x+4)\}^{\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle} = \frac{\log(3x+4) - \psi\left(1+\frac{1}{2}\right) - \gamma}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} \left(x + \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1.1283(\log x - 0.6137)\sqrt{x+1.3333}$$

$$(\log x)^{\left\langle \frac{1}{10} \right\rangle} = \frac{\log x - \psi\left(1+\frac{1}{10}\right) - \gamma}{\Gamma\left(1+\frac{1}{10}\right)} x^{\frac{1}{10}} = 1.0511 \sqrt[10]{x} (\log x - 0.1534)$$

$$(\log x)^{\left\langle \frac{9}{10} \right\rangle} = \frac{\log x - \psi\left(1+\frac{9}{10}\right) - \gamma}{\Gamma\left(1+\frac{9}{10}\right)} x^{\frac{9}{10}} = 1.0397\, x^{\frac{9}{10}} (\log x - 0.9333)$$

$\log x$, $(\log x)^{<1/10>}$, $(\log x)^{<9/10>}$, $(\log x)^{<1>}$ を並べて図示すると次のとおりである。$(\log x)^{<1/10>}$ (赤) の零点も $x=0$ であることがうっすらと見えている。



7･6　三角関数の超積分

7･6･1　$\sin x$, $\cos x$ の超積分

4･3 の公式4･3･4の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。

公式7･6･1

(1)　基本式

$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi}{2}}^{x} \sin x\, dx^{p} = \sin\left(x-\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{(p-1)\pi}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{-1\pi}{2}}^{x} \cos x\, dx^{p} = \cos\left(x-\frac{p\pi}{2}\right)$$

(2)　線形式

$$\int_{\frac{p\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} \sin(ax+b)\, dx^{p} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p}\sin\left(ax+b-\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{(p-1)\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} \sim \int_{-\frac{1\pi}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} \cos(ax+b)\, dx^{p} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p}\cos\left(ax+b-\frac{p\pi}{2}\right)$$

例

$$(\sin x)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \sin\left(x-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left((\sin x)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}$$

$$= \left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

$$\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{<1>} = \left(\frac{1}{1}\right)^{1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{1\cdot\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$(\cos x)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \cos\left(x-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(\cos x)^{\left\langle\frac{2}{\pi}\right\rangle} = \cos\left(x-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x-1)$$

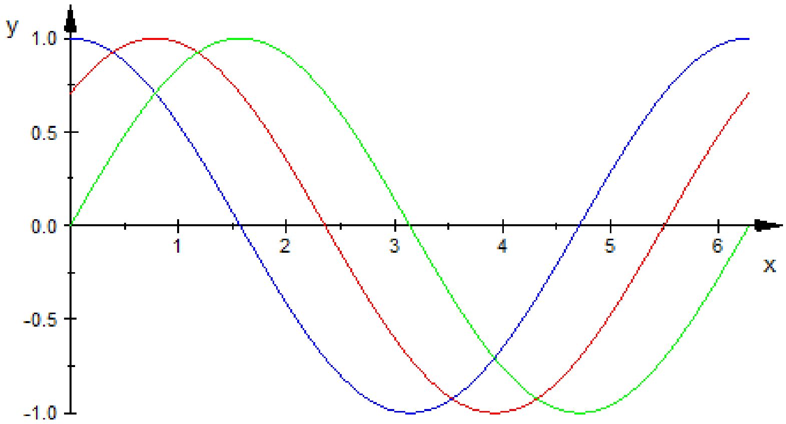
$\cos x$, $(\cos x)^{<1/2>}$, $\sin x$ を並べて図示すると次のとおり。赤が $1/2$ 階超積分を示す。超積分中最も解かり易いのが三角関数の超積分であることが図上でも明らかである。

cos x の直系超積分 (1/2階)

```
• cos1 := p-> cos(x-p*PI/2)
```

$$p \rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi\cdot p}{2}\right)$$

```
• plotfunc2d(cos(x),cosl(1/2),sin(x), x=0..2*PI)
```



7･6･2　$\sin x$, $\cos x$ の項別超積分

　$\sin x$, $\cos x$ の超積分の下限を共通下限 0 とすれば次のような項別超積分が得られる。右辺に積分定数関数を含んでいることから判るように、**これらは傍系超積分である。**

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sin x\, dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2+p)}x^{2k+1+p} = \sin\left(x-\frac{p\pi}{2}\right) + C(p,x)$$

$$C(p,x) = \sum_{k=1}^{p}\frac{x^{p-k}}{\Gamma(1+p-k)}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \cos x\, dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+1+p)}x^{2k+p} = \cos\left(x-\frac{p\pi}{2}\right) + C(p,x)$$

$$C(p,x) = \sum_{k=1}^{p}\frac{x^{p-k}}{\Gamma(1+p-k)}\cos\frac{k\pi}{2}$$

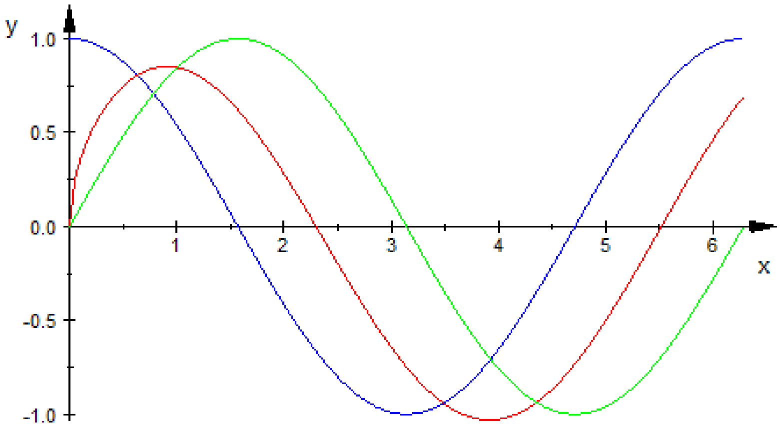
　$\cos x$ の 1/2 階項別超積分を $\cos x$, $\sin x$ と並べて図示すると次のとおりである。赤が 1/2階傍系超積分を示す。

cos x の傍系超積分 (1/2階)

```
• cosc := p-> sum((-1)^k/gamma(2*k+1+p)*x^(2*k+p), k=0..50)
```

$$p \to \sum_{k=0}^{50}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2\cdot k+1+p)}\cdot x^{2\cdot k+p}$$

```
• plotfunc2d(cos(x),cosc(1/2),sin(x), x=0..2*PI)
```



　この図を上の図と比べると、項別超積分は原点付近で不自然に曲がっている。$\sin x$ についても同様であるから、これらの項別超積分は直系超積分の漸近展開と見られる。

7・7 双曲線関数の超積分

7・7・1 $\boldsymbol{sinh\,x\,,\,cosh\,x}$ の超積分

4・3 の公式4・3・5の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。

公式7・7・1

(1) 基本式

$$\int_{\frac{p\pi i}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi i}{2}}^{x} sinh\,x\,dx^p = i^p sinh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right) = \frac{e^x-(-1)^p e^{-x}}{2}$$

$$\int_{\frac{(p-1)\pi i}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{-1\pi i}{2}}^{x} cosh\,x\,dx^p = i^p cosh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right) = \frac{e^x+(-1)^p e^{-x}}{2}$$

(2) 線形式

$$\int_{\frac{p\pi i}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi i}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} sinh(ax+b)\,dx^p = \left(\frac{i}{a}\right)^p sinh\left(ax+b-\frac{p\pi i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^p\left\{e^{ax+b}-(-1)^p e^{-(ax+b)}\right\}$$

$$\int_{\frac{(p-1)\pi i}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} \sim \int_{\frac{-1\pi i}{2a}-\frac{b}{a}}^{x} cosh(ax+b)\,dx^p = \left(\frac{i}{a}\right)^p cosh\left(ax+b-\frac{p\pi i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^p\left\{e^{ax+b}+(-1)^p e^{-(ax+b)}\right\}$$

例1

$$(sinh\,x\,)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = i^{\frac{1}{2}} sinh\left(x-\frac{1}{2}\frac{\pi i}{2}\right) = i^{\frac{1}{2}} sinh\left(x-\frac{\pi i}{4}\right)$$

$$\left((sinh\,x\,)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle} = \left(i^{\frac{1}{2}} sinh\left(x-\frac{\pi i}{4}\right)\right)^{\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle}$$

$$= i^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{1}\right)^{\frac{1}{2}} sinh\left(x-\frac{\pi i}{4}-\frac{1}{2}\frac{\pi i}{2}\right)$$

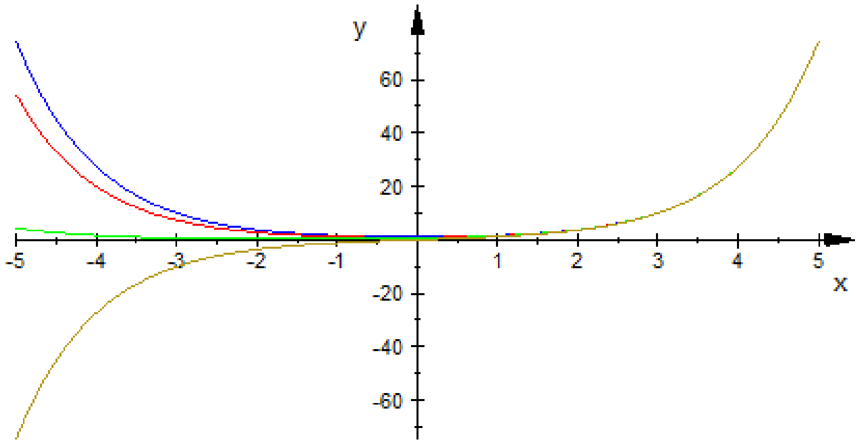
$$= i\,sinh\left(x-\frac{\pi i}{2}\right) = cosh\,x$$

$$\left\{cosh\left(x+\frac{\pi i}{2}\right)\right\}^{<1>} = \left(\frac{i}{1}\right)^1 cosh\left(x+\frac{\pi i}{2}-\frac{1\cdot\pi i}{2}\right) = i\,cosh\,x$$

$$(cosh\,x)^{\left\langle\frac{i}{10}\right\rangle} = i^{\frac{i}{10}} cosh\left(x+\frac{\pi}{20}\right) = 0.854635\times cosh\left(x+\frac{\pi}{20}\right)$$

$$(\cosh x)^{\langle \frac{9i}{10} \rangle} = i^{\frac{9i}{10}} \cosh\left(x+\frac{9\pi}{20}\right) = 0.243237 \times \cosh\left(x+\frac{9\pi}{20}\right)$$

超積分中最も解かり難いのが双曲線関数の超積分である。積分階数 p が整数または純虚数以外のときは超原始関数が複素関数となるからである。そこで、それらの中で実領域に表示できる $\cosh x$, $(\cosh x)^{\langle \frac{i}{10} \rangle}$, $(\cosh x)^{\langle \frac{9i}{10} \rangle}$, $\sinh x$ を並べて図示すると次のとおりである。



正領域では4本の曲線が全て重なっている。負領域では $(\cosh x)^{\langle \frac{i}{10} \rangle}$ が $\cosh x$ に近いのは当然と思えるが、$(\cosh x)^{\langle \frac{9i}{10} \rangle}$ は何故か $\sinh x$ とは大きくかけ離れている。

例2

$$(\sinh x)^{\langle \frac{1}{2} \rangle} = \frac{e^x - (-1)^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{2} = \frac{e^x - i\, e^{-x}}{2}$$

$$\left((\sinh x)^{\langle \frac{1}{2} \rangle}\right)^{\langle \frac{1}{2} \rangle} = \left(\frac{e^x - i\, e^{-x}}{2}\right)^{\langle \frac{1}{2} \rangle} = \frac{e^x}{2} - \frac{i}{2} \times \left(e^{-x}\right)^{\langle \frac{1}{2} \rangle}$$

$$= \frac{e^x}{2} - \frac{i}{2} \times i\, e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\left\{\cosh\left(x+\frac{\pi i}{2}\right)\right\}^{<1>} = \frac{1^{-1}}{2}\left\{e^{x+\frac{\pi i}{2}} + (-1)^1 e^{-\left(x+\frac{\pi i}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi i}{2}} e^x - e^{-\frac{\pi i}{2}} e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(i\, e^x - \frac{1}{i} e^{-x}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = i \cosh x$$

$$(\sinh x)^{\langle \frac{i}{\pi} \rangle} = \frac{e^x - (-1)^{\frac{i}{\pi}} e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \left(e^{\pi i}\right)^{\frac{i}{\pi}} e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-1-x}}{2}$$

Note

双曲線関数の超積分は可変下限の積分であり、指数関数の超積分は固定下限の積分である。従って例えば $\sinh x$ の p 階超積分は概念上は次のようになる。

$$(\sinh x)^{<p>}=\int_{\frac{p\pi i}{2}}^{x}\sim\int_{\frac{0\pi i}{2}}^{x}\sinh x\,dx^{p}=\int_{\frac{p\pi i}{2}}^{x}\sim\int_{\frac{0\pi i}{2}}^{x}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}dx^{p}$$

然るに、例ではそのようなことは忘却して $-\infty$, ∞ を下限として e^{x} , e^{-x} の項別超積分を行い、結果 *all right* となっている。これはまことに便利かつ面白いことである。

7・7・2 *sinhx , coshx* の項別超積分

sinhx , *coshx* の超積分の下限を共通下限 0 とすれば次のような項別超積分が得られる。右辺に積分定数関数を含んでいることから判るように、**これらは傍系超積分である。**

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\sinh x\,dx^{p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1+p}}{\Gamma(2k+2+p)}=i^{p}\sinh\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)+C(p,x)$$

$$C(p,x)=\sum_{k=1}^{p}\frac{x^{p-k}}{\Gamma(1+p-k)}\sinh\frac{k\pi i}{2}$$

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\cosh x\,dx^{p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+p}}{\Gamma(2k+1+p)}=i^{p}\,cohs\left(x-\frac{p\pi i}{2}\right)+C(p,x)$$

$$C(p,x)=\sum_{k=1}^{p}\frac{x^{p-k}}{\Gamma(1+p-k)}\cosh\frac{k\pi i}{2}$$

coshx の直系と傍系の1．2階積分の $x=1$, $x=8$ における値をそれぞれ計算すると次のようになる。

cosh x の直系超積分

```
• coshl := p-> I^p*cosh(x-p*PI/2*I)
```

$$p\rightarrow i^{p}\cdot\cosh\left(x-i\cdot\frac{\pi\cdot p}{2}\right)$$

cosh x の傍系超積分

```
• coshc := p-> sum(x^(2*k+p)/gamma(2*k+1+p), k=0..50)
```

$$p\rightarrow\sum_{k=0}^{50}\frac{x^{2\cdot k+p}}{\Gamma(2\cdot k+1+p)}$$

x = 1

```
• float(subs(coshl(1.2), x=1)); float(subs(coshc(1.2), x=1))
```

$$1.210330554-0.1081170551\cdot i$$

$$1.042561641$$

x = 8

```
• float(subs(coshl(1.2), x=8)); float(subs(coshc(1.2), x=8))
```

$$1490.478858-0.00009858999269\cdot i$$

$$1490.436428$$

x が小さいところでは両者の差は大きいが x が大きいところでは両者は殆ど一致している。*sinhx* についても同様であるから、これらの項別超積分は直系超積分の漸近展開と見られる。

7・8　逆三角関数等の超積分

7・8・1　$tan^{-1}x, cot^{-1}x$ の超積分

4・3 の公式4・3・6の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。

公式7・8・1

$\Gamma(x),\ \psi(x)$ をそれぞれガンマ関数、ディ・ガンマ関数とするとき、$|x| \geqq 1$ に対して次式が成立する。

$$\int_0^x\!\!\sim\!\!\int_0^x tan^{-1}x\,dx^p = \frac{tan^{-1}x}{\Gamma(1+p)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{p-2k}x^{p-2k}$$
$$+\frac{log(1+x^2)}{2\Gamma(1+p)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{p+1-2k}x^{p+1-2k}$$
$$-\frac{1}{\Gamma(1+p)}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{p}{p+1-2r}\{\psi(1+p)-\psi(2r)\}x^{p+1-2r}$$

$$\int_0^x\!\!\sim\!\!\int_0^x cot^{-1}x\,dx^p = \frac{x^p}{\Gamma(1+p)}cot^{-1}x - \frac{tan^{-1}x}{\Gamma(1+p)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{p-2k}x^{p-2k}$$
$$-\frac{log(1+x^2)}{2\Gamma(1+p)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{p+1-2k}x^{p+1-2k}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+p)}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{p}{p+1-2r}\{\psi(1+p)-\psi(2r)\}x^{p+1-2r}$$

例　$cot^{-1}x$ の 5/2 階積分

```
p = 5 / 2;  m = 100;
```

$$\text{f1[x\_]} := \frac{x^p\ \text{ArcCot[x]}}{\text{Gamma[1 + p]}} - \frac{\text{ArcTan[x]}}{\text{Gamma[1 + p]}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\ \text{Binomial[p, p - 2 k]}\ x^{p-2k}$$
$$-\frac{\text{Log}[1 + x^2]}{\text{2 Gamma[1 + p]}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\ \text{Binomial[p, p + 1 - 2 k]}\ x^{p+1-2k}$$
$$+\frac{1}{\text{Gamma[1 + p]}}\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\ \text{Binomial[p, p + 1 - 2 r]}$$
$$\times(\text{PolyGamma[1 + p] - PolyGamma[2 r]})\ x^{p+1-2r}$$

$$\text{fr[x\_]} := \frac{1}{\text{Gamma[p]}}\int_0^x (x-t)^{p-1}\ \text{ArcCot[t] dt}$$

```
N[f1[1.1]]          N[fr[1.1]]
0.489079            0.489079  + 0. i
```

7・8・2　$tanh^{-1}x$ の超積分

4・3 の公式4・3・7の積分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。

公式7･8･2

$\Gamma(x)$, $\psi(x)$ をそれぞれガンマ関数、ディ･ガンマ関数とするとき、$|x| \geqq 1$ に対して次式が成立する。

$$\int_0^x \sim \int_0^x \tanh^{-1}x\, dx^p = \frac{\tanh^{-1}x}{\Gamma(1+p)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{p-2k} x^{p-2k}$$
$$+ \frac{\log(1-x^2)}{2\Gamma(1+p)} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{p+1-2k} x^{p+1-2k}$$
$$- \frac{1}{\Gamma(1+p)} \sum_{r=1}^{\infty} \binom{p}{p+1-2r} \{\psi(1+p)-\psi(2r)\} x^{p+1-2r}$$

例　$\tanh^{-1}x$ の 3/2 階積分

```
p = 3 / 2;  m = 100;
```

$$\text{fl}[\text{x\_}] := \frac{\text{ArcTanh}[x]}{\text{Gamma}[1+p]} \sum_{k=0}^{m} \text{Binomial}[p, p-2k]\, x^{p-2k}$$
$$+ \frac{\text{Log}[1-x^2]}{2\,\text{Gamma}[1+p]} \sum_{k=1}^{m} \text{Binomial}[p, p+1-2k]\, x^{p+1-2k}$$
$$- \frac{1}{\text{Gamma}[1+p]} \sum_{r=1}^{m} \text{Binomial}[p, p+1-2r] \times (\text{PolyGamma}[1+p] - \text{PolyGamma}[2r])\, x^{p+1-2r}$$

$$\text{fr}[\text{x\_}] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_0^x (x-t)^{p-1}\, \text{ArcTanh}[t]\, dt$$

```
N[fl[1.1]]                          N[fr[1.1]]
0.510394 - 0.0373666 i              0.510394 - 0.0373666 i
```

2010.07.07 本節追加

K. Kono

宇宙人の数学