8　項別超積分

　本章では、超積分が初等関数で表せない関数について、これらを級数に展開した上項別に超積分するものである。従って「7 **超積分**」で扱った超越関数 e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ は本章では扱わない。

8·1　三角関数、双曲線関数の項別超積分

　本節では「5 項別高階積分(三角関数、双曲線関数)」中の諸公式の積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続して項別超積分を得る。

公式8·1·1

　ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\quad E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

とし、$\Gamma(x)$ をガンマ関数とするとき、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ なる x と非負数 p に対して次式が成立する。

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tan x\,dx^p = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,\Gamma(2k+p)}x^{2k+p-1}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tanh x\,dx^p = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,\Gamma(2k+p)}x^{2k+p-1}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sec x\,dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|E_{2k}\right|}{\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p} \qquad \text{: 傍系超積分}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \operatorname{sech} x\,dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p} \qquad \text{: 傍系超積分}$$

導出

「5 項別高階積分(三角関数、双曲線関数)」の

公式5·1·1　$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k+n-1)!}x^{2k+n-1}$$

公式5·2·1　$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tanh x\,dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+n-1)!}x^{2k+n-1}$$

公式5·7·1　$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|E_{2k}\right|}{(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad \text{: 傍系}$$

において $m!$ をガンマ関数 $\Gamma(1+m)$ に置換し、積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。最後の式は次式を 0 から x まで超積分して得る。

$$\operatorname{sech} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

例

次に公式8･1･1による項別超積分の計算例を示す。任意の1点が適当に選ばれ、f1 は公式によるその点の関数値であり、fr は Riemann-Liouville integral によるその点の関数値である。両者一致しており、上記項別超積分が正しいことを数値的に示している。また、図中において、青は被積分関数、赤は項別超積分、緑は1階積分を示す。

Termwise super integral of tan x (1/2th order)

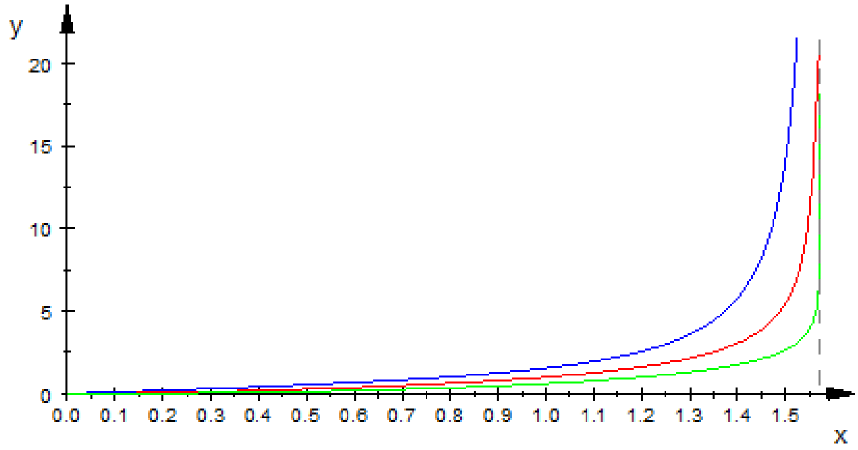
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$f1[x\_] := \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{2k}\,(2^{2k}-1)\,\mathrm{Abs}[\mathrm{BernoulliB}[2k]]}{2k\,\mathrm{Gamma}[2k+p]}\,x^{2k+p-1}$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p]}\int_0^x (x-t)^{p-1}\,\mathrm{Tan}[t]\,dt$$

N[f1[1.3]] N[fr[1.3]]

2.15197 2.15197



Termwise super integral of tanh x (1/2th order)

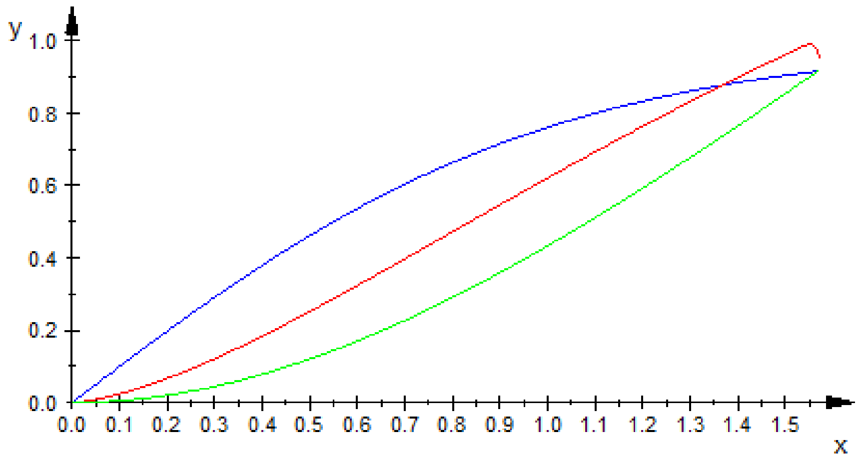
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$f1[x\_] := \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{2k}\,(2^{2k}-1)\,\mathrm{BernoulliB}[2k]}{2k\,\mathrm{Gamma}[2k+p]}\,x^{2k+p-1}$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p]}\int_0^x (x-t)^{p-1}\,\mathrm{Tanh}[t]\,dt$$

N[f1[0.4]] N[fr[0.4]]

0.183688 0.183688



Termwise super integral of sec x (1/2th order)

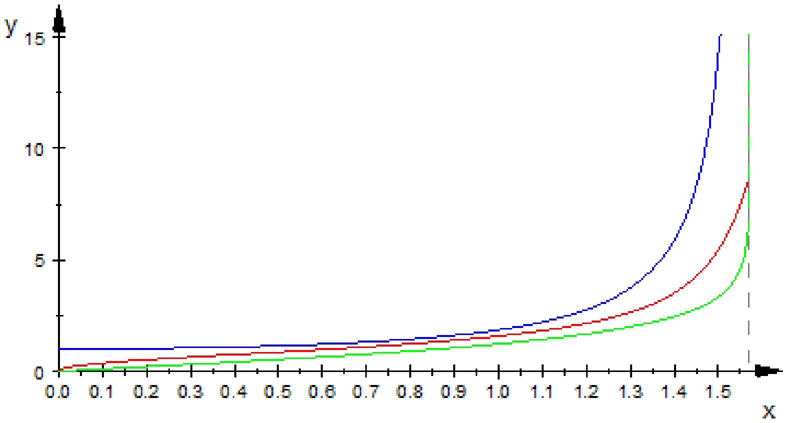
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$fl[x\_] := \sum_{k=0}^{m} \frac{\text{Abs[EulerE[2 k]]}}{\text{Gamma[2 k + p + 1]}} x^{2k+p}$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma[p]}} \int_0^x (x-t)^{p-1}\ \text{Sec[t]}\ dt$$

N[fl[0.9]]
1.38435

N[fr[0.9]]
1.38435



Termwise super integral of sech x (1/2th order)

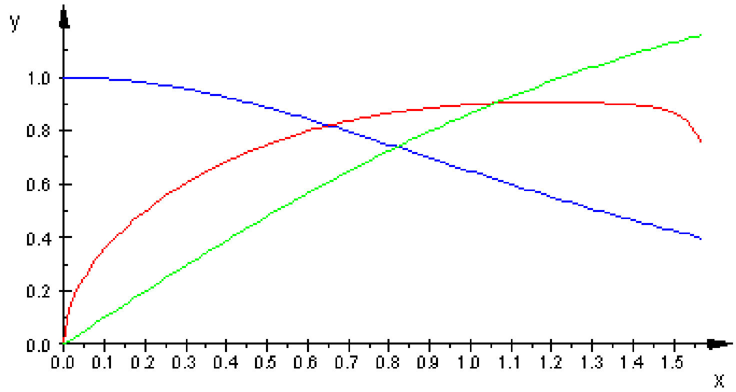
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$fl[x\_] := \sum_{k=0}^{m} \frac{\text{EulerE[2 k]}}{\text{Gamma[2 k + p + 1]}} x^{2k+p}$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma[p]}} \int_0^x (x-t)^{p-1}\ \text{Sech[t]}\ dt$$

N[fl[0.1]]
0.355876

N[fr[0.1]]
0.355876



公式8･1･2

ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\quad E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

$\Gamma(x)$ をガンマ関数とするとき、非負数 p と $\pi/2<x<\pi$ なる x に対して次式が成立する。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sim\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^{p} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,\Gamma(2k+p)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+p-1}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sim\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^{p} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|E_{2k}\right|}{\Gamma(2k+p+1)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+p}$$

：傍系超積分

導出

「5 項別高階積分(三角関数、双曲線関数)」の

公式5・3・1’ $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx^{n} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k(2k+n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+n-1}$$

公式5・5・1’ $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\csc x\,dx^{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|E_{2k}\right|}{(2k+n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+n}$$

：傍系

において $m!$ をガンマ関数 $\Gamma(1+m)$ に置換し、積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

例

　次に公式8・1・2による項別超積分の計算例を示す。任意の1点が適当に選ばれ、f1 は公式によるその点の関数値であり、fr は Riemann-Liouville integral によるその点の関数値である。両者一致しており、上記項別超積分が正しいことを数値的に示している。また、図中において、青は被積分関数、赤は項別超積分、緑は1階積分を示す。

Termwise super integral of cot x (1/2th order)

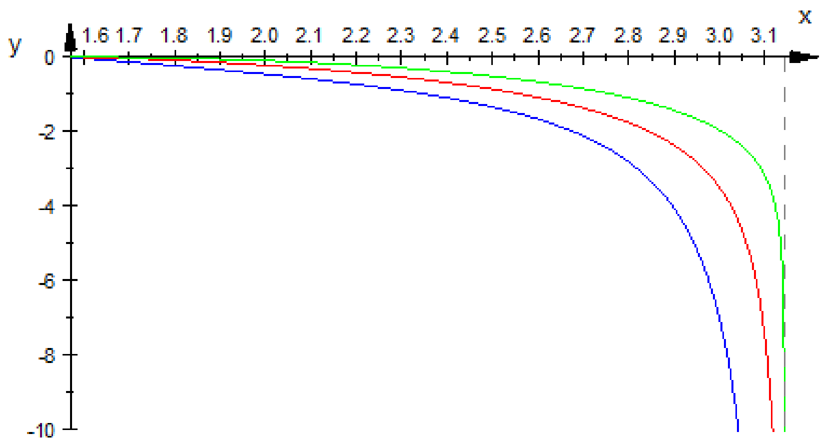
p = 1 / 2; m = 100;

$$\text{f1}[x\_] := -\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\text{Abs}[\text{BernoulliB}[2k]]}{2\,k\,\text{Gamma}[2k+p]}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+p-1}$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(x-t)^{p-1}\,\text{Cot}[t]\,dt$$

N[f1[2.8]]　　　N[fr[2.8]]

-1.75789　　　-1.75789



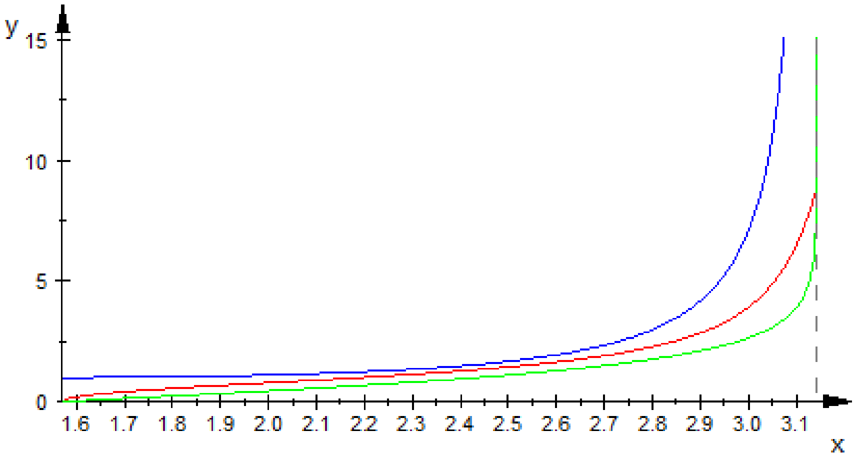
Termwise super integral of csc x (1/2th order)

```
p = 1 / 2;  m = 100;
```

$$fl[x\_] := \sum_{k=0}^{m} \frac{Abs[EulerE[2\,k]]}{Gamma[2\,k+p+1]} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2\,k+p}$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{Gamma[p]} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (x - t)^{p-1}\, Csc[t]\, dt$$

```
N[fl[1.9]]            N[fr[1.9]]
0.666801              0.666801
```



$csch\,x$ と $sech\,x$ については次なる直系項別超積分が成立する。

公式8･1･3

$p \geqq 0$, $x>0$ について次式が成立する。

$$\int_{\infty}^{x} \sim \int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx^{p} = (-1)^{p}\, 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{p}}$$

$$\int_{\infty}^{x} \sim \int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^{p} = (-1)^{p}\, 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{p}}$$

導出

「5 項別高階積分(三角関数、双曲線関数)」の

公式5･6･2 $\displaystyle \int_{\infty}^{x} \cdots \int_{\infty}^{x} csch\,x\,dx^{n} = (-1)^{n}\, 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{n}}$

公式5･8･2 $\displaystyle \int_{\infty}^{x} \cdots \int_{\infty}^{x} sech\,x\,dx^{n} = (-1)^{n}\, 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^{n}}$

において積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

例

次に公式8･1･3による項別超積分の計算例を示す。任意の1点が適当に選ばれ、f1 は公式によるその点の関数値であり、fr は Riemann-Liouville integral によるその点の関数値である。

両者一致しており、上記項別超積分が正しいことを数値的に示している。

Termwise super integral of csch x (5/8th order)

```
p = 5 / 8;  m = 100;
```

$$\mathrm{fl}[x\_] := (-1)^p \, 2 \sum_{k=0}^{m} \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^p}$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p]} \int_{\infty}^{x} (x-t)^{p-1} \,\mathrm{Csch}[t] \, dt$$

```
N[fl[1.7]]                      N[fr[1.7]]
-0.142227 + 0.343366 i          -0.142227 + 0.343366 i
```

Termwise super integral of sech x (3/7th order)

```
p = 3 / 7;  m = 100;
```

$$\mathrm{fl}[x\_] := (-1)^p \, 2 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^p}$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p]} \int_{\infty}^{x} (x-t)^{p-1} \,\mathrm{Sech}[t] \, dt$$

```
N[fl[0.3]]                      N[fr[0.3]]
0.250622 + 1.09805 i            0.250622 + 1.09805 i
```

8·2 逆三角関数の項別超積分

本節では「6 項別高階積分(逆三角関数、逆双曲線関数)」の公式6·1·1～6·4·1の積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続して項別超積分を得る。従って高階積分が傍系であった場合その超積分も当然に傍系となる。

公式8·2·1

$\Gamma(x)$ をガンマ関数とするとき、 $0<x<1$ なる x と非負数 p に対して次式が成立する。

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tan^{-1}x\,dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \cot^{-1}x\,dx^p = \frac{\pi}{2}\frac{x^p}{\Gamma(1+p)} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1} \qquad \text{: 傍系超積分}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \cos^{-1}x\,dx^p = \frac{\pi}{2}\frac{x^p}{\Gamma(1+p)} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1} \qquad \text{: 傍系超積分}$$

例

次に公式8·2·1による項別超積分の計算例を示す。任意の1点が適当に選ばれ、f1 は公式によるその点の関数値であり、fr は Riemann-Liouville integral によるその点の関数値である。両者一致しており、上記項別超積分が正しいことを数値的に示している。また、図中において、青は被積分関数、赤は項別超積分、緑は1階積分を示す。

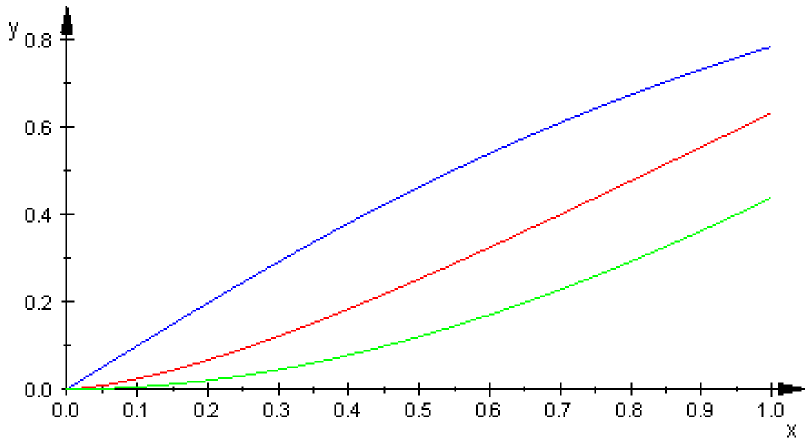
Termwise super integral of arctan x (1/2th order)

p = 1 / 2; m = 100;

$$\mathrm{f1}[x\_] := \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2k)!}{\mathrm{Gamma}[2k+p+2]}x^{2k+p+1}$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p]}\int_0^x (x-t)^{p-1}\,\mathrm{ArcTan}[t]\,dt$$

N[f1[0.8]] 0.477246　　N[fr[0.8]] 0.477246



Termwise super integral of arccot x (1/2th order)

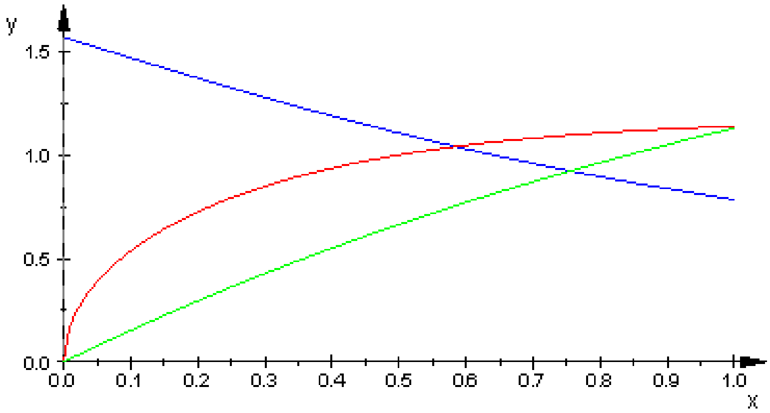
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$\text{f1}[x\_] := \frac{\pi}{2}\ \frac{x^{p}}{\text{Gamma}[1+p]} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k}\ \frac{(2\,k)\,!}{\text{Gamma}[2\,k+p+2]}\ x^{2\,k+p+1}$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_{0}^{x} (x-t)^{p-1}\ \text{ArcCot}[t]\ dt$$

N[f1[0.73]] N[fr[0.73]]

1.09114 1.09114



Termwise super integral of arcsin x (1/2th order)

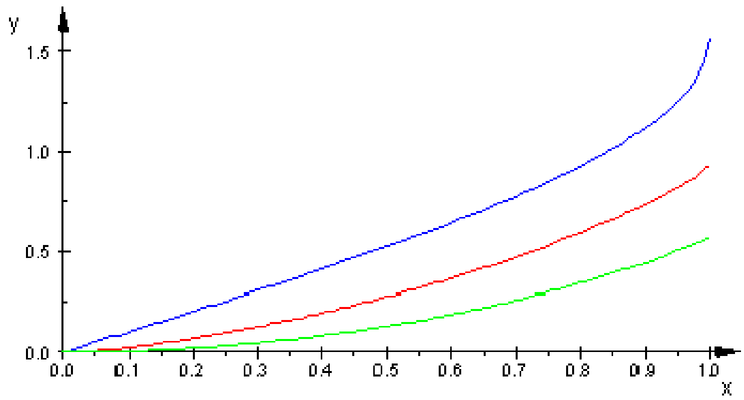
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$\text{f1}[x\_] := \sum_{k=0}^{m} \frac{((2\,k-1)\,!!)^{2}}{\text{Gamma}[2\,k+p+2]}\ x^{2\,k+p+1}$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_{0}^{x} (x-t)^{p-1}\ \text{ArcSin}[t]\ dt$$

N[f1[0.7]] N[fr[0.7]]

0.471235 0.471235 + 0. i



Termwise super integral of arccos x (1/2th order)

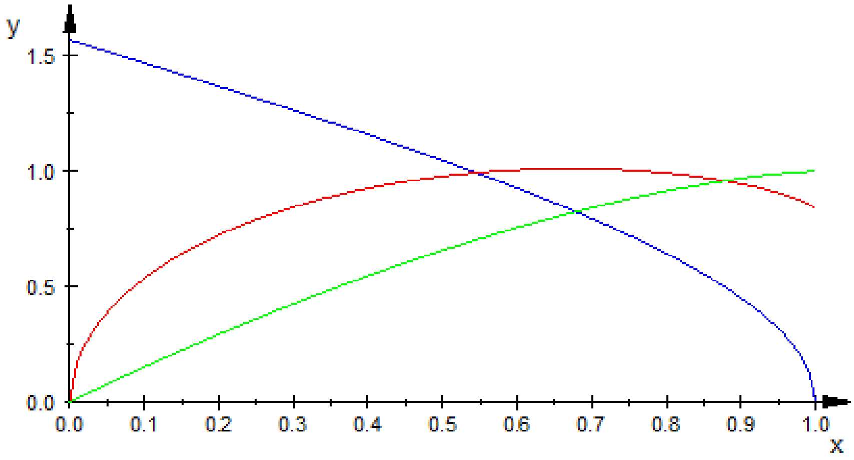
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$\text{f1}[x\_] := \frac{\pi}{2}\ \frac{x^{p}}{\text{Gamma}[1+p]} - \sum_{k=0}^{m} \frac{((2\,k-1)\,!!)^{2}}{\text{Gamma}[2\,k+p+2]}\ x^{2\,k+p+1}$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_{0}^{x} (x-t)^{p-1}\ \text{ArcCos}[t]\ dt$$

```
N[fl[0.3]]
0.84589
```

```
N[fr[0.3]]
0.84589 + 0. i
```



8･3 逆双曲線関数の項別超積分

本節では「6 項別高階積分(逆三角関数、逆双曲線関数)」の公式6･5･1～6･8･1の積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続して項別超積分を得る。従って高階積分が傍系であった場合その超積分も当然に傍系となる。

公式8･3･1

$\Gamma(x)$ をガンマ関数、$\psi(x)$ をディ･ガンマ関数、γ をオイラーの定数とするとき、 $0<x<1$ なる x と非負数 p に対して次式が成立する。

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tanh^{-1}x\,dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sinh^{-1}x\,dx^p = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}$$ 傍系

$$\int_0^x\sim\int_0^x \mathrm{sech}^{-1}x\,dx^p = \frac{x^p}{\Gamma(1+p)}\left\{\log\frac{2}{x}+\psi(1+p)+\gamma\right\} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p}$$ 傍系

$$\int_0^x\sim\int_0^x \mathrm{csch}^{-1}x\,dx^p = \frac{x^p}{\Gamma(1+p)}\left\{\log\frac{2}{x}+\psi(1+p)+\gamma\right\} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p}$$ 傍系

例

次に公式8･3･1による項別超積分の計算例を示す。任意の1点が適当に選ばれ、f1 は公式によるその点の関数値であり、fr は Riemann-Liouville integral によるその点の関数値をである。両者一致しており、上記項別超積分が正しいことを数値的に示している。また、図中において、青は被積分関数、赤は項別超積分、緑は1階積分を示す。

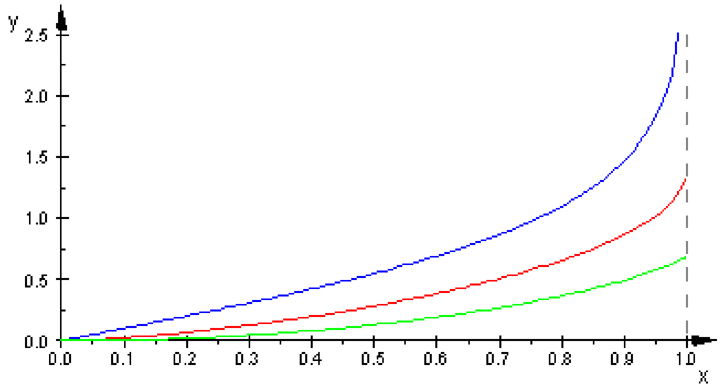
Termwise super integral of arctanh x (1/2th order)

```
p = 1 / 2 ;  m = 100 ;
```

$$\mathrm{f1}[x\_] := \sum_{k=0}^{m}\frac{(2k)!}{\mathrm{Gamma}[2k+p+2]}x^{2k+p+1}$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p]}\int_0^x (x-t)^{p-1}\,\mathrm{ArcTanh}[t]\,dt$$

```
N[f1[0.7]]            N[fr[0.7]]
0.507089              0.507089 + 0. i
```



Termwise super integral of arcsinh x (1/2th order)

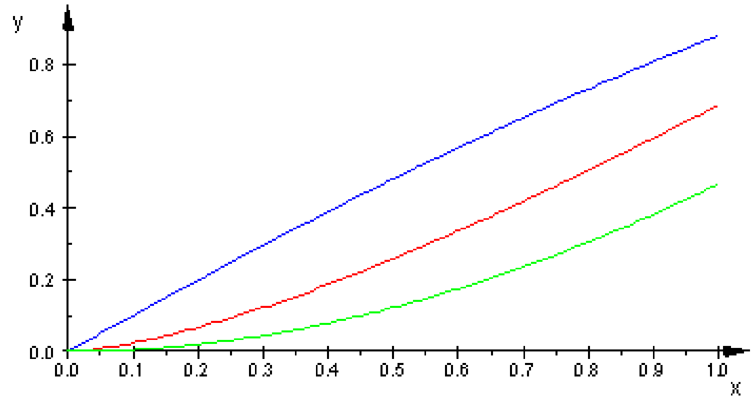
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$\text{f1}[x\_] := \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \frac{((2k-1)!!)^{2}}{\text{Gamma}[2k+p+2]} x^{2k+p+1}$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_0^x (x-t)^{p-1}\, \text{ArcSinh}[t]\, dt$$

N[f1[0.88]] N[fr[0.88]]

0.577282 0.577282



Termwise super integral of arcsech x (1/2th order)

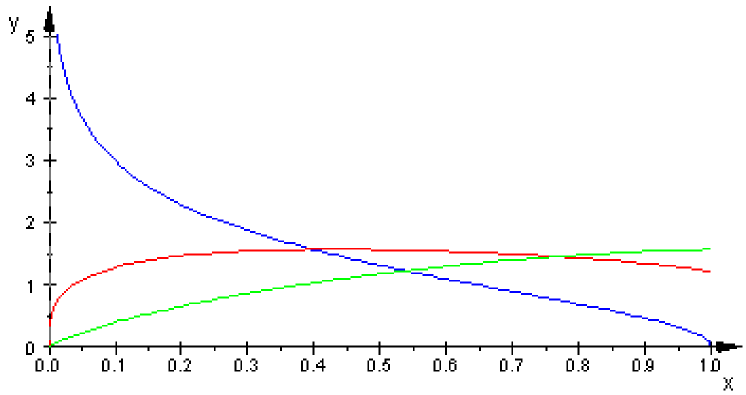
p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$\text{f1}[x\_] := \frac{x^{p}}{\text{Gamma}[1+p]} \left(\text{Log}\left[\frac{2}{x}\right] + \text{PolyGamma}[1+p] + \text{EulerGamma}\right) - \sum_{k=1}^{m} \frac{((2k-1)!!)^{2}}{2k\,\text{Gamma}[2k+p+1]} x^{2k+p}$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_0^x (x-t)^{p-1}\, \text{ArcSech}[t]\, dt$$

N[f1[0.03]] N[fr[0.03]]

0.940714 0.940714



Termwise super integral of arccsch x (1/2th order)

p = 1 / 2 ; m = 100 ;

$$\text{f1}[x\_] := \frac{x^{p}}{\text{Gamma}[1+p]} \left(\text{Log}\left[\frac{2}{x}\right] + \text{PolyGamma}[1+p] + \text{EulerGamma}\right) - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \frac{((2k-1)!!)^{2}}{2k\,\text{Gamma}[2k+p+1]} x^{2k+p}$$

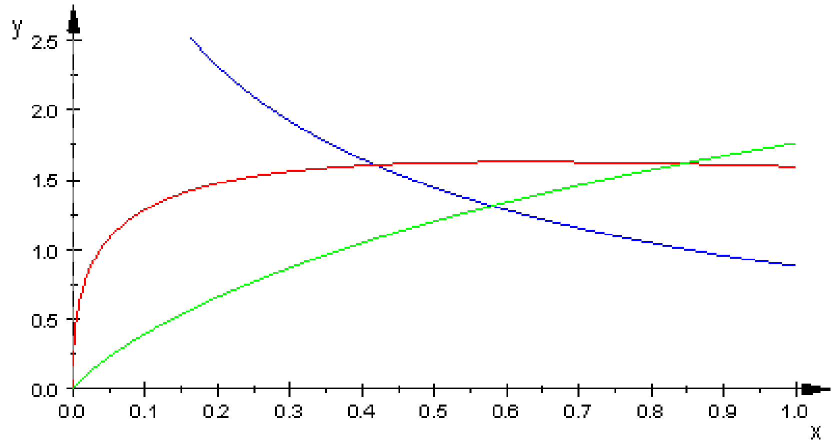
$$fr[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[p]} \int_0^x (x - t)^{p-1} \text{ArcCsch}[t] \, dt$$

N[f1[0.6]]

1.62696

N[fr[0.6]]

1.62696



2006 10.15

2012 06.10 Renewal

K. Kono

宇宙人の数学