9　高階微分

9･1　高階導関数と高階微分

9･1･1　高階導関数

定義9･1･1

$n=1,2,3,\cdots$ について、関数 $f^{(n-1)}(x)$ の導関数を $f^{(n)}(x)$ と記述し、これを関数 $f(x)$ の**高階導関数** と言う。

9･1･2　高階微分

定義9･1･2

関数 f を1つの独立変数 x について繰り返し微分することを**高階微分**と言い、次のように記述する。

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) \qquad \left\{ = \frac{d}{dx}\left(\cdots \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x) \right)\right)\cdots \right) \ \frac{d}{dx}\text{ は } n \text{ 個} \right\}$$

9･1･3　高階微分の基本定理

4･1･3（高階積分の基本定理）より次の定理を得る。

定理9･1･3

$f^{(r)}$ $r=0,1,\cdots,n$ は閉区間 I 上の連続関数 且つ f の r 階導関数とするとき、$x \in I$ について次式が成立する。

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n)}(x)$$

証明

4･1･3 の 定理4･1･3 より

$$f^{<n>}(x) = \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)dx^n + \sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a_{n-r})\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

この両辺を n 回微分すれば

$$\frac{d^n}{dx^n}f^{<n>}(x) = f^{<0>}(x) + \frac{d^n}{dx^n}\sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a_{n-r})\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

ここで右辺の積分定数多項式は $n-1$ 次であるからこれを n 回微分すれば0となる。

よって

$$\frac{d^n}{dx^n}f^{<n>}(x) = f^{<0>}(x)$$

積分演算子 $<>$ 中のインデックスを $-n$ だけスライドして微分演算子 $(\ )$ に置き換えれば与式を得る。

Remark

微分は積分の逆演算であるから積分定数と無関係であることは出来ない。実際、超微分(非整数回微分)には直系と傍系とが存在する。(後述、12･1･2 参照。) しかしこの定理は、**高階微分には直系しか存在しない**ことを保証している。

9･1･4 高階微分の基本公式

1階の微分と同じように次の公式が成立する。

$$\{c\,f(x)\}^{(n)} = c\,f^{(n)}(x) \qquad c \neq 0 \qquad \text{(定数倍公式)}$$

$$\{f(x)+g(x)\}^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \qquad \text{(和・差の公式)}$$

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, f^{(r)}(x)\, g^{(n-r)}(x) \qquad \text{(積の微分法)}$$

9·2 初等関数の高階微分

公式9·2·1 ベキ関数の高階微分

$\Gamma(z)$ をゼータ関数とするとき次式が成立する。

(1) 基本式

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n)}x^{\alpha-n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$= (-1)^{-n}\frac{\Gamma(-\alpha+n)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-n} \qquad (\alpha < 0)$$

(2) 線形式

$$\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n)}(ax+b)^{\alpha-n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$= \left(-\frac{1}{a}\right)^{-n}\frac{\Gamma(-\alpha+n)}{\Gamma(-\alpha)}(ax+b)^{\alpha-n} \qquad (\alpha < 0)$$

導出

$$\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(1)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\alpha(ax+b)^{\alpha-1}$$

$$\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(2)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-2}\alpha(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-2}$$

$$\vdots$$

$$\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\alpha(\alpha-1)\cdots\{\alpha-(n-1)\}x^{\alpha-n}$$

これに

$$\alpha(\alpha-1)\cdots\{\alpha-(n-1)\} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n)}$$

を代入して線形式を得、さらに $a=1,\ b=0$ と置いて基本式を得る。

しかしこの右辺は α が $\alpha<0$ なる整数のとき分母子が $\pm\infty$ の不定形になり値が求まらない。

そこで $\alpha<0$ のときは $\beta=-\alpha$ と置けば $(ax+b)^{\alpha}=(ax+b)^{-\beta}$ であるから

$$\left\{(ax+b)^{-\beta}\right\}^{(1)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1}-\beta(ax+b)^{-\beta-1}$$

$$\left\{(ax+b)^{-\beta}\right\}^{(2)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-2}+\beta(\beta+1)(ax+b)^{-\beta-2}$$

$$\vdots$$

$$\left\{(ax+b)^{-\beta}\right\}^{(n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}(-1)^{n}\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)(ax+b)^{-\beta-n}$$

ところが

$$\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}$$

であるからこれを代入すれば

$$\left\{(ax+b)^{-\beta}\right\}^{(n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}(-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}(ax+b)^{-\beta-n}$$

そこで β を $-\alpha$ に置き換えれば線形式を得、さらに $a=1,\ b=0$ と置いて基本式を得る。

公式9･2･2 指数関数の高階微分

(1) 基本式

$$\left(e^{\pm x}\right)^{(n)}=(\pm 1)^{-n}e^{\pm x}$$

(2) 線形式

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}e^{ax+b}$$

導出

4･3 の公式4･3･2によれば

$$\int_{\mp\infty}^{x}\cdots\int_{\mp\infty}^{x}e^{\pm x}dx^n=(\pm 1)^n e^{\pm x}$$

$$\int_{\mp\infty}^{x}\cdots\int_{\mp\infty}^{x}e^{ax+b}dx^n=\left(\frac{1}{a}\right)^n e^{ax+b}\qquad\left(\begin{array}{l}a>0\ :\ -\\ a<0\ :\ +\end{array}\right)$$

であった。微分は積分の逆演算であるから、積分演算子のインデックス n を $-n$ に置き換えて与式を得る。

公式9･2･3 対数関数の高階微分

(1) 基本式

$$(\log x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}$$

(2) 線形式

$$\{\log(ax+b)\}^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(x+\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

導出

$\log x$ を逐次微分して(1)を得る。(2)についても同様である。

公式9･2･4 $\boldsymbol{\sin x,\ \cos x}$ の高階微分

(1) 基本式

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

(2) 線形式

$$\{\sin(ax+b)\}^{(n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\{cos(ax+b)\}^{(n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

導出

4･3 の公式4･3･4 の積分演算子のインデックスn を $-n$ に置き換えて与式を得る。

公式9･2･5 ***sinhx*, *coshx*** の高階微分

(1) 基本式

$$(sinh x)^{(n)} = i^{-n} sinh\left(x+\frac{n\pi i}{2}\right) = \frac{e^x - (-1)^{-n}e^{-x}}{2}$$

$$(cosh x)^{(n)} = i^{-n} cosh\left(x+\frac{n\pi i}{2}\right) = \frac{e^x + (-1)^{-n}e^{-x}}{2}$$

(2) 線形式

$$\{sinh(ax+b)\}^{(n)} = \left(\frac{i}{a}\right)^{-n} sinh\left(ax+b+\frac{n\pi i}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\left\{e^{ax+b} - (-1)^{-n}e^{-(ax+b)}\right\}$$

$$\{cosh(ax+b)\}^{(n)} = \left(\frac{i}{a}\right)^{-n} cosh\left(ax+b+\frac{n\pi i}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\left\{e^{ax+b} + (-1)^{-n}e^{-(ax+b)}\right\}$$

導出

4･3 の公式4･3･5の積分演算子のインデックスn を $-n$ に置き換えて与式を得る。

公式9･2･6 ***tanx*, *cotx*** の高階微分

↑ を天井関数とするとき、自然数n について次式が成立する。

$$(tan x)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n/2\uparrow} {}_nT_r (tan x)^{n+1-2r}$$

$$(cot x)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{n/2\uparrow} {}_nT_r (cot x)^{n+1-2r}$$

ここで ${}_nT_r$ は次のような係数である。

$$\begin{array}{cccc} {}_0T_0 & & & \\ {}_1T_0 & {}_1T_1 & & \\ {}_2T_0 & {}_2T_1 & & \\ {}_3T_0 & {}_3T_1 & {}_3T_2 & \\ {}_4T_0 & {}_4T_1 & {}_4T_2 & \\ {}_5T_0 & {}_5T_1 & {}_5T_2 & {}_5T_3 \\ {}_6T_0 & {}_6T_1 & {}_6T_2 & {}_6T_3 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ 6 & 8 & 2 & \\ 24 & 40 & 16 & \\ 120 & 240 & 136 & 16 \\ 720 & 1680 & 1232 & 272 \end{array}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

そしてこれらの係数は次のような逐次計算で得られる。

0!	計算式
1	
1! **1**	
2 0	1=0!×1
2! **2**	
3 1	2=1!×2+1×0
3! **8** **2**	
4 2 0	8=2!×3+2×1 , 2=2×1
4! **40** **16**	
5 3 1	40=3!×4+8×2 , 16=8×2+2×0
5! **240** **136** **16**	
6 4 2 0	240=4!×5+40×3 , 136=40×3+16×1 , 16=16×1
6! **1680** **1232** **272**	1680=5!×6+240×4 , 1232=240×4+136×2 , 272=136×2+16×0

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Note

タンジェント数を $T_1=1$, $T_3=2$, $T_5=16$, $T_7=272$, $T_9=7936$, … , T_{2n-1} , … とするとき、これらと上記係数との間には次の関係がある。

$$T_{2n-1} = {}_{2n-1}T_n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

公式9･2･7 *tanhx , cothx* の高階微分

$\uparrow$ を天井関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$(\tanh x)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{n/2\uparrow} (-1)^r \, {}_nT_r (\tanh x)^{n+1-2r}$$

$$(\coth x)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{n/2\uparrow} (-1)^r \, {}_nT_r (\coth x)^{n+1-2r}$$

ここで ${}_nT_r$ は 公式9･2･6 と同じ係数である。

公式9･2･8 *secx , cscx* の高階微分

$\downarrow$ を床関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$(\sec x)^{(n)} = \frac{1}{\cos x} \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} {}_nE_r (\tan x)^{n-2r}$$

$$(\csc x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin x} \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} {}_nE_r (\cot x)^{n-2r}$$

ここで ${}_nE_r$ は次のような係数である。

$$
\begin{array}{c}
{}_0E_0 \\
{}_1E_0 \\
{}_2E_0 \quad {}_2E_1 \\
{}_3E_0 \quad {}_3E_1 \\
{}_4E_0 \quad {}_4E_1 \quad {}_4E_2 \\
{}_5E_0 \quad {}_5E_1 \quad {}_5E_2 \\
{}_6E_0 \quad {}_6E_1 \quad {}_6E_2 \quad {}_6E_3 \\
{}_7E_0 \quad {}_7E_1 \quad {}_7E_2 \quad {}_7E_3 \\
\vdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
2 \quad 1 \\
6 \quad 5 \\
24 \quad 28 \quad 5 \\
120 \quad 180 \quad 61 \\
720 \quad 1320 \quad 662 \quad 61 \\
5040 \quad 10920 \quad 7266 \quad 1385 \\
\vdots
\end{array}
$$

そしてこれらの係数は次のような逐次計算で得られる。

	計算式
1!	
1	
2! **1**	$1=1!\times 1$
2 1	
3! **5**	$5=2!\times 2+1\times 1$
3 2 1	
4! **28** **5**	$28=3!\times 3+5\times 2$, $5=5\times 1$
4 3 2 1	
5! **180** **61**	$180=4!\times 4+28\times 3$, $61=28\times 2+5\times 1$
5 4 3 2 1	
6! **1320** **662** **61**	$1320=5!\times 5+180\times 4$, $662=180\times 3+61\times 2$, $61=61\times 1$
6 5 4 3 2 1	
7! **10920** **7266** **1385**	$10920=6!\times 6+1320\times 5$, $7266=1320\times 4+662\times 3$, $1385=662\times 2+61\times 1$
⋮	⋮

Note

オイラー数を $E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, $\cdots$, E_{2n} , $\cdots$ とするとき、

$$E_{2n} = (-1)^n {}_{2n}E_n \qquad n=0,1,2,\cdots$$

公式9･2･9 ***sechx* , *cschx*** の高階微分

$\downarrow$ を床関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$(\operatorname{sech} x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\cosh x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nE_r(\tanh x)^{n-2r}$$

$$(\operatorname{csch} x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sinh x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nE_r(\coth x)^{n-2r}$$

ここで ${}_nE_r$ は 公式9･2･8 と同じ係数である。

9･3 逆三角関数の高階微分

公式9･3･1 $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ の高階微分

↑ を天井関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{\left(x^2+1\right)^n} \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} (-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\, x^{n+1-2r}$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\left(x^2+1\right)^n} \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} (-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\, x^{n+1-2r}$$

導出

$\tan^{-1}x$ を順次微分すると次のようになる。

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(2)} = -\frac{1!\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{1!\,{}_2C_1\, x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(3)} = \frac{2!\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{2!\left({}_3C_2\, x^2 - {}_3C_0\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(4)} = -\frac{3!\left(4x^3-4x\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = -\frac{3!\left({}_4C_3\, x^3 - {}_4C_1\, x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(5)} = \frac{4!\left(5x^4-10x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^5} = \frac{4!\left({}_6C_4\, x^4 - {}_5C_2\, x^2 + {}_5C_0\right)}{\left(x^2+1\right)^5}$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(6)} = -\frac{5!\left(6x^5-20x^3+6x\right)}{\left(x^2+1\right)^6} = -\frac{5!\left({}_6C_5\, x^5 - {}_6C_3\, x^3 + {}_6C_1\, x\right)}{\left(x^2+1\right)^6}$$

$$\vdots$$

以下、帰納法により与式を得る。

cf.

「岩波数学公式Ⅰ」p39,40 によれば、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = (n-1)!\cos^n\left(\tan^{-1}x\right)\sin\left(n\left(\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n (n-1)!\,\sin^n\left(\cot^{-1}x\right)\sin\left(n\cot^{-1}x\right)$$

従って、公式9･3･1 と併せて次の等式を得る。

$$\sum_{k=1}^{n/2\uparrow} (-1)^k {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} = -\left(x^2+1\right)^n \sin^n\left(\cot^{-1}x\right)\sin\left(n\cot^{-1}x\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n/2\uparrow} (-1)^k {}_nC_{n+1-2k} = -2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

例

$$-{}_5C_4\, x^4 + {}_5C_2\, x^2 - {}_5C_0\, x^0 = -\left(x^2+1\right)^5 \sin^5\left(\cot^{-1}x\right)\sin\left(5\cot^{-1}x\right)$$

$$-{}_5C_4 + {}_5C_2 - {}_5C_0 \qquad = -2^{\frac{5}{2}} \sin\frac{5\pi}{4} = 4$$

公式9･3･2 **$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ の高階微分**

↓ を床関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} \binom{n-1}{n-1-2r} \frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(1-x^2\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\cos^{-1}x\right)^{(n)} = -\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} \binom{n-1}{n-1-2r} \frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(1-x^2\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

証明

$\sin^{-1}x$ を順次微分すると次のようになる。

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(1)} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(2)} = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(3)} = \frac{3x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(4)} = \frac{15x^3}{\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{9x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(5)} = \frac{105x^4}{\left(x^2+1\right)^{\frac{9}{2}}} + \frac{90x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{9}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(6)} = \frac{945x^5}{\left(x^2+1\right)^{\frac{11}{2}}} + \frac{1050x^3}{\left(x^2+1\right)^{\frac{9}{2}}} + \frac{225x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\vdots$$

これらの係数は二項係数と二重階乗を用いて次のように表される。

1	${}_0C_0(-1)!!\,(-1)!!$		
2	${}_1C_1(-1)!!\,1!!$		
3	${}_2C_2(-1)!!\,3!!$	${}_2C_0 1!!\,1!!$	
4	${}_3C_3(-1)!!\,5!!$	${}_3C_1 1!!\,3!!$	
5	${}_4C_4(-1)!!\,7!!$	${}_4C_2 1!!\,5!!$	${}_4C_0 3!!\,3!!$
6	${}_5C_5(-1)!!\,9!!$	${}_5C_3 1!!\,7!!$	${}_5C_1 3!!\,5!!$

$\vdots$

これらを上式に代入すると

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(1)} = \frac{{}_0C_0\,(-1)!!\,(-1)!!\,x^0}{\left(x^2+1\right)^{1-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(2)} = \frac{{}_1C_1\,(-1)!!\,1!!\,x^1}{\left(x^2+1\right)^{2-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(3)} = \frac{{}_2C_2\,(-1)!!\,3!!\,x^2}{\left(x^2+1\right)^{3-\frac{1}{2}}} + \frac{{}_2C_0\,1!!\,1!!\,x^0}{\left(x^2+1\right)^{2-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(4)} = \frac{{}_3C_3\,(-1)!!\,5!!\,x^3}{\left(x^2+1\right)^{4-\frac{1}{2}}} + \frac{{}_3C_1\,1!!\,3!!\,x^1}{\left(x^2+1\right)^{3-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(5)} = \frac{{}_4C_4\,(-1)!!\,7!!\,x^4}{\left(x^2+1\right)^{5-\frac{1}{2}}} + \frac{{}_4C_2\,1!!\,5!!\,x^2}{\left(x^2+1\right)^{4-\frac{1}{2}}} + \frac{{}_4C_0\,3!!\,3!!\,x^0}{\left(x^2+1\right)^{3-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(6)} = \frac{{}_5C_5\,(-1)!!\,9!!\,x^5}{\left(x^2+1\right)^{6-\frac{1}{2}}} + \frac{{}_5C_3\,1!!\,7!!\,x^3}{\left(x^2+1\right)^{5-\frac{1}{2}}} + \frac{{}_5C_1\,3!!\,5!!\,x^1}{\left(x^2+1\right)^{4-\frac{1}{2}}}$$

$\vdots$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n-1}{n-1-2r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(1-x^2\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

そしてこの符号を反転して$\left(\cos^{-1}x\right)^{(n)}$を得る。

例　$\sin^{-1}x$ の9階微分

重回微分

- `g := diff(arcsin(x),x,x,x,x,x,x,x,x,x)`

$$\frac{396900\cdot x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{11}{2}}}+\frac{2182950\cdot x^4}{\left(1-x^2\right)^{\frac{13}{2}}}+\frac{3783780\cdot x^6}{\left(1-x^2\right)^{\frac{15}{2}}}+\frac{2027025\cdot x^8}{\left(1-x^2\right)^{\frac{17}{2}}}+\frac{11025}{\left(1-x^2\right)^{\frac{9}{2}}}$$

公式

- `f := n-> sum(binomial(n-1,n-1-2*r)`
  `*(2*r-1)!!*(2*n-3-2*r)!!*x^(n-1-2*r)`
  `/(1-x^2)^(n-r-1/2), r=0..floor(n/2))`

$$n\to\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{\binom{n-1}{n-1-2\cdot r}\cdot 2\cdot r-1!!\cdot 2\cdot n-3-2\cdot r!!\cdot x^{n-1-2\cdot r}}{\left(1-x^2\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

- `f(9)`

$$\frac{396900\cdot x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{11}{2}}}+\frac{2182950\cdot x^4}{\left(1-x^2\right)^{\frac{13}{2}}}+\frac{3783780\cdot x^6}{\left(1-x^2\right)^{\frac{15}{2}}}+\frac{2027025\cdot x^8}{\left(1-x^2\right)^{\frac{17}{2}}}+\frac{11025}{\left(1-x^2\right)^{\frac{9}{2}}}$$

公式9･3･2は右辺をさらに部分分数分解して次のように表すこともできる。

公式9･3･2'

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-2r-3)!!}{(1+x)^r(1-x)^{n-1-r}}$$

$$\left(\cos^{-1}x\right)^{(n)} = -\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-2r-3)!!}{(1+x)^r(1-x)^{n-1-r}}$$

例えば、

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(3)} = \frac{3x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{2x^2+1}{(1+x)^2(1-x)^2}$$

この整関数を次のように部分分数分解する

$$\frac{2x^2+1}{(1+x)^2(1-x)^2} = \frac{B_0}{(1-x)^2} + \frac{B_1}{(1+x)^1(1-x)^1} + \frac{B_2}{(1+x)^2}$$

ヘビサイドの目隠し法を用いて

$$\frac{2x^2+1}{(1+x)^2} = B_0 + \frac{B_1(1-x)^1}{(1+x)^1} + \frac{B_2(1-x)^2}{(1+x)^2} \tag{1}$$

$$\frac{2x^2+1}{(1+x)^1(1-x)^1} = \frac{B_0(1+x)^1}{(1-x)^1} + B_1 + \frac{B_2(1-x)^1}{(1+x)^1} \tag{2}$$

$$\frac{2x^2+1}{(1-x)^2} = \frac{B_0(1+x)^2}{(1-x)^2} + \frac{B_1(1+x)^1}{(1-x)^1} + B_2 \tag{3}$$

(1), (2), (3) に$x=1,\ 0,\ -1$をそれぞれ与えれば

$$\frac{3}{2^2} = B_0 \ ,\quad 1 = B_0 + B_1 + B_2 \ ,\quad \frac{3}{2^2} = B_2$$

となり、これらより $B_1 = -\frac{2}{2^2}$ 、よって

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(3)} = \frac{1}{2^2\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{3}{(1-x)^2} - \frac{2}{(1+x)^1(1-x)^1} + \frac{3}{(1+x)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^2\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(-1)!!\,3!!}{(1+x)^0(1-x)^2} - \frac{2\cdot 1!!\,1!!}{(1+x)^1(1-x)^1} + \frac{3!!\,(-1)!!}{(1+x)^2(1-x)^0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^2\sqrt{1-x^2}}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r\binom{2}{r}\frac{(2r-1)!!\,(2\cdot 3-2r-3)!!}{(1+x)^r(1-x)^{3-1-r}}$$

公式9･3･3 **$\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$** の高階微分

自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\sec^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\sum_{r=1}^{n}\frac{{}_nA_r}{x^{n-1+2r}\left(1-x^{-2}\right)^{r-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\csc^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=1}^{n} \frac{{}_nA_r}{x^{n-1+2r}\left(1-x^{-2}\right)^{r-\frac{1}{2}}}$$

ここで ${}_nA_r \quad r=1,2,\cdots,n$ は次のような係数である。

$$\begin{matrix} {}_1A_1 \\ {}_2A_1 \ {}_2A_2 \\ {}_3A_1 \ {}_3A_2 \ {}_3A_3 \\ {}_4A_1 \ {}_4A_2 \ {}_4A_3 \ {}_4A_4 \\ {}_5A_1 \ {}_5A_2 \ {}_5A_3 \ {}_5A_4 \ {}_5A_5 \\ {}_6A_1 \ {}_6A_2 \ {}_6A_3 \ {}_6A_4 \ {}_6A_5 \ {}_6A_6 \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \quad 1 \\ 6 \quad 7 \quad 3 \\ 24 \quad 48 \quad 45 \quad 15 \\ 120 \quad 360 \quad 549 \quad 390 \quad 105 \\ 720 \quad 3000 \quad 6570 \quad 7425 \quad 4200 \quad 945 \\ \vdots \end{matrix}$$

そしてこれらの係数は次のような逐次計算で得られる。

$$\begin{matrix} 2! \quad 1!! \\ 1,5 \\ 3! \quad 7 \quad 3!! \\ 1,6 \quad 3,8 \\ 4! \quad 48 \quad 45 \quad 5!! \\ 1,7 \quad 3,9 \quad 5,11 \\ 5! \quad 360 \quad 549 \quad 390 \quad 7!! \\ 1,8 \quad 3,10 \quad 5,12 \quad 7,14 \\ 6! \quad 3000 \quad 6570 \quad 7425 \quad 4200 \quad 9!! \\ \vdots \end{matrix}$$

$7=2!\cdot 1+1!!\cdot 5$

$48=3!\cdot 1+7\cdot 6,\ 45=7\cdot 3+3!!\cdot 8$

$360=4!\cdot 1+48\cdot 7,\ 549=48\cdot 3+45\cdot 9,$
$390=45\cdot 5+5!!\cdot 11$

$3000=5!\cdot 1+360\cdot 8,\ 6570=360\cdot 3+549\cdot 10,$
$7425=549\cdot 5+390\cdot 12,\ 4200=390\cdot 7+7!!\cdot 14$

$\vdots$

導出

$\sec^{-1}x$ を順次微分すると次のようになる。

$$\left(\sec^{-1}x\right)^{(1)} = \frac{1}{x^2\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sec^{-1}x\right)^{(2)} = -\frac{2}{x^3\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^5\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\sec^{-1}x\right)^{(3)} = \frac{6}{x^4\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{7}{x^6\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{x^8\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\sec^{-1}x\right)^{(4)} = -\frac{24}{x^5\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{48}{x^7\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{45}{x^9\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15}{x^{11}\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$\vdots$

これらの係数は公式中のようなアルゴリズムで計算できる。よって帰納法により与式を得る。

Note

これらの係数は未出であり、その直接計算法も未知である。しかし、これらは次のような性質を持つ。

$$
\begin{array}{rl}
1 & = 0! \\
2 - 1 & = 1! \\
6 - 7 + 3 & = 2! \\
24 - 48 + 45 - 15 & = 3! \\
120 - 360 + 549 - 390 + 105 & = 4! \\
720 - 3000 + 6570 - 7425 + 4200 - 945 & = 5! \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

9･4　逆双曲線関数の高階微分

公式9･4･1　$\tanh^{-1}x,\ \coth^{-1}x$ の高階微分

$\uparrow$ を天井関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\tanh^{-1}x\right)^{(n)} = \left(\coth^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{\left(x^2-1\right)^n} \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} {}_nC_{n+1-2r}\, x^{n+1-2r}$$

導出

$\tanh^{-1}x$ を順次微分すると、これらの係数は $\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)}$（公式9･3･1）の係数のと同じになる。よって与式を得る。

公式9･4･2　$\sinh^{-1}x,\ \cosh^{-1}x$ の高階微分

$\downarrow$ を床関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\sinh^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} (-1)^r \binom{n-1}{n-1-2r} \frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(x^2+1\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\cosh^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} (-1)^r \binom{n-1}{n-1-2r} \frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(x^2-1\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

証明

$\sinh^{-1}x$ を順次微分すると、これらの係数は $\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)}$（公式9･3･2）の係数と同じになる。よって与式を得る。

公式9･4･2は右辺をさらに部分分数分解して次のように表すこともできる。

公式9･4･2'

$$\left(\sinh^{-1}x\right)^{(n)} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} (2r-1)!!\,(2n-2r-3)!!\,(1+ix)^{-\frac{1}{2}-r}(1-ix)^{\frac{1}{2}+r-n}$$

$$\left(\cosh^{-1}x\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (2r-1)!!\,(2n-2r-3)!!\,(x+1)^{-\frac{1}{2}-r}(x-1)^{\frac{1}{2}+r-n}$$

例　$\sinh^{-1}x$ の5階微分

重回微分

```
• g := diff(arcsinh(x),x,x,x,x,x):simplify(%)
```

$$\frac{24\cdot x^4 - 72\cdot x^2 + 9}{\left(x^2+1\right)^{\frac{9}{2}}}$$

公式

```
• asinh := n-> (I/2)^(n-1)*
              sum((-1)^r*binomial(n-1,r)*(2*r-1)!!*(2*n-2*r-3)!!
                  *(1+I*x)^(-1/2-r)*(1-I*x)^(1/2+r-n), r=0..n-1)
```

$$n \rightarrow \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot \binom{n-1}{r} \cdot 2 \cdot r - 1!! \cdot 2 \cdot n - 2 \cdot r - 3!! \cdot (1 + i \cdot x)^{-\frac{1}{2}-r} \cdot (1 - i \cdot x)^{\frac{1}{2}+r-n}\right)$$

- asinh(5):simplify(%)

$$\frac{24 \cdot x^4 - 72 \cdot x^2 + 9}{(1 - i \cdot x)^{\frac{9}{2}} \cdot (i \cdot x + 1)^{\frac{9}{2}}}$$

公式9･4･3　$\boldsymbol{sech^{-1}x,\ csch^{-1}x}$ の高階微分

自然数 n について次式が成立する。

$$\left(sech^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r {}_nA_r}{x^{n-1+2r}\left(x^{-2}-1\right)^{r-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(csch^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r {}_nA_r}{x^{n-1+2r}\left(x^{-2}+1\right)^{r-\frac{1}{2}}}$$

ここで ${}_nA_r$ は 公式9･3･3 で述べた係数である。

9・5 対数関数の項別高階微分

対数関数の高階微分は既に9・2で得られているので、これを項別に高階微分する必要はない。ところがこの項別高階微分と高階微分を比べると面白い結果が得られる。

公式9・5・1

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{k+(n-1)\}!}{k!}x^k=\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad -1<x<1 \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k=(1+x)^{-n}\qquad -1<x<1 \tag{1.1'}$$

導出

$$\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+-\cdots=\log x$$

の両辺を微分すると

$$1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+-\cdots=\frac{0!}{x}\qquad 0<x<2$$

この両辺をさらに微分すると

$$1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3+-\cdots=\frac{1!}{x^2}\qquad 0<x<2$$

この両辺をさらに微分すると

$$1\cdot2-2\cdot3(x-1)+3\cdot4(x-1)^2-4\cdot5(x-1)^3+-\cdots=\frac{2!}{x^3}\qquad 0<x<2$$

かくして一般に

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{k+(n-1)\}!}{k!}(x-1)^k=\frac{(n-1)!}{x^n}\qquad 0<x<2$$

となるが、x を $1+x$ に置き換えると

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{k+(n-1)\}!}{k!}x^k=\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad -1<x<1 \tag{1.1}$$

を得る。

次に、この両辺を $(n-1)!$ で割れば、左辺は次のようになる。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{k+(n-1)\}!}{k!(n-1)!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n-1+k}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k$$

よって、次式を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k=(1+x)^{-n}\qquad -1<x<1 \tag{1.1'}$$

c.f.

(1.1')においては最早 n は実数でも構わない。そこで $\alpha=-n$ と置けば

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k=(1+x)^{\alpha}\qquad -1<x<1$$

となり、ニュートンの一般二項定理が得られる。

特殊値

　公式9･5･1は実は $x=1$ においても成立する。そこで(1.1)において収束条件を無視して $x=1$ を代入すると次の特殊値を得る。

$$1-1+1-1+-\cdots=\frac{0!}{2^1}$$

$$1-2+3-4+-\cdots=\frac{1!}{2^2}$$

$$1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-4\cdot 5+-\cdots=\frac{2!}{2^3}$$

$$1\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5-4\cdot 5\cdot 6+-\cdots=\frac{3!}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{k+(n-1)\}!}{k!}=\frac{(n-1)!}{2^n}$$

2012.01.06　リニューアル

K. Kono

宇宙人の数学