10　項別高階微分(三角関数、双曲線関数)

本章では、三角関数および双曲線関数のうち2階以上の高階導関数を簡単な一般式で表すことが困難な関数について、これらを級数に展開した上 項別に高階微分するものである。従って「9･2 初等関数の高階微分」で述べた $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ の各関数は本章では扱わない。

10･1　*tanx* の項別高階微分

10･1･0　*tanx* の高階微分

公式9･2･6 (9･2)によれば、$\tan x$ の高階微分は次式で示された。

$$(\tan x)^{(n)} = \sum_{r=0}^{\lceil n/2 \rceil} {}_nT_r (\tan x)^{n+1-2r} \tag{0.n}$$

ここで ↑ は天井関数であり、 ${}_nT_r$ は次のような係数である。

$$\begin{array}{c} {}_0T_0 \\ {}_1T_0 \quad {}_1T_1 \\ {}_2T_0 \quad {}_2T_1 \\ {}_3T_0 \quad {}_3T_1 \quad {}_3T_2 \\ {}_4T_0 \quad {}_4T_1 \quad {}_4T_2 \\ {}_5T_0 \quad {}_5T_1 \quad {}_5T_2 \quad {}_5T_3 \\ {}_6T_0 \quad {}_6T_1 \quad {}_6T_2 \quad {}_6T_3 \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \\ 6 \quad 8 \quad 2 \\ 24 \quad 40 \quad 16 \\ 120 \quad 240 \quad 136 \quad 16 \\ 720 \quad 1680 \quad 1232 \quad 272 \\ \vdots \end{array}$$

10･1･1　*tanx* のテイラー級数の項別高階微分

公式10･1･1

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, … をベルヌイ数とし、↑ を天井関数とするとき、$|x| < \pi/2$ について次式が成立する。

$$(\tan x)^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-2)!} x^{2k-2} \tag{1.1}$$

$$(\tan x)^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-3)!} x^{2k-3} \tag{1.2}$$

$$(\tan x)^{(3)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-4)!} x^{2k-4} \tag{1.3}$$

$$(\tan x)^{(4)} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-5)!} x^{2k-5} \tag{1.4}$$

$$\vdots$$

$$(\tan x)^{(n)} = \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \tag{1.n}$$

導出

$tan\,x$ は次のようにテイラー展開される。

$$tan\,x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-1)\,!}x^{2k-1} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

この両辺を順次微分すれば(1.1)～(1.4)を得る。

ここで微分階数 n と Σの初項 k_0 の関係を見ると次のようになっている。

n	0	1	2	3	4	5	…
k_0	1	1	2	2	3	3	…

このような関係は天井関数 $x\uparrow\ (=\lceil x\rceil)$ を用いて $k_0 = \dfrac{n+1}{2}\uparrow$ と表現できる。 よって与式を得る。

$tan\,x$ の高階微分のテイラー級数の和

(0.n) と (1.n) より、$|x|<\pi/2$ について次式を得る。

$$\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!}x^{2k-n-1} = \sum_{r=0}^{n/2\uparrow}{}_nT_r(tan\,x)^{n+1-2r} \tag{1.t}$$

そしてこれに $x=\pi/4$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-2)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2} = \sum_{r=0}^{1/2\uparrow}{}_1T_r = 2$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-3)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-3} = \sum_{r=0}^{2/2\uparrow}{}_2T_r = 4$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-4)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-4} = \sum_{r=0}^{3/2\uparrow}{}_3T_r = 16$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-5)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-5} = \sum_{r=0}^{4/2\uparrow}{}_4T_r = 80$$

$$\vdots$$

10･1･2 $tan\,x$ のフーリエ級数の項別高階微分

5･1･2 で見たように、$tan\,x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$\begin{aligned}tan\,x &= 2(sin\,2x - sin\,4x + sin\,6x - sin\,8x + - \cdots)\\ &\quad -2i(cos\,2x - cos\,4x + cos\,6x - cos\,8x + - \cdots) + i\end{aligned}$$

これは等式としては成立しないが、この両辺の実数部を機械的に逐次微分すると次式が得られる。

$$(tan\,x)^{(1)} = 2^2(1cos\,2x - 2cos\,4x + 3cos\,6x - 4cos\,8x + - \cdots)$$

$$(tan\,x)^{(2)} = -2^3\left(1^2sin\,2x - 2^2sin\,4x + 3^2sin\,6x - 4^2sin\,8x + - \cdots\right)$$

$$(\tan x)^{(3)} = -2^4\left(1^3\cos 2x - 2^3\cos 4x + 3^3\cos 6x - 4^3\cos 8x + - \cdots\right)$$
$$(\tan x)^{(4)} = \ \ 2^5\left(1^4\sin 2x - 2^4\sin 4x + 3^4\sin 6x - 4^4\sin 8x + - \cdots\right)$$
$$\vdots$$
$$(\tan x)^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}2^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n-1}\cos 2kx \tag{2.2n−1}$$
$$(\tan x)^{(2n)} = (-1)^{n}2^{2n+1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n}\sin 2kx \tag{2.2n}$$

勿論これらも等式としては成立しない。 ところがこれらが成立するものとして計算を進めると、以下のような面白い結果が得られる。

10･1･3 ディリクレの奇数イータと偶数ベータ

公式10･1･3

$\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$, $\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ とし、B_{2k} をベルヌイ数、${}_nT_r$ を 10･1･0 で述べた係数とするとき、次式が成立する。

$$\eta(1-2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n-1}T_r$$

$$\beta(-2n) = \frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1} = \frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}T_r$$

導出

(0.n) , (1.n) , (2.2n−1) , (2.2n) より、形式的に次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n-1}\cos 2kx = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}x^{2k-2n}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n-1}T_r(\tan x)^{2n-2r}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n}\sin 2kx = \frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}x^{2k-2n-1}$$
$$= \frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}T_r(\tan x)^{2n+1-2r}$$

これらに $x=\pi/4$ を代入すると、左辺はそれぞれ

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n-1}\cos\frac{k\pi}{2} = 2^{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n-1} = 2^{2n-1}\eta(1-2n)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n}\sin k\frac{k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)^{2n} = \beta(-2n)$$

であるから、与式を得る。

例1

$$\eta(-1) = \frac{1}{2^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|\pi^{2k}}{2k\,(2k-2)\,!} = \frac{1}{2^3}\sum_{r=0}^{1}{}_1T_r = \frac{1}{4}$$

$$\eta(-3) = -\frac{1}{2^7}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|\pi^{2k}}{2k\,(2k-4)\,!} = -\frac{1}{2^7}\sum_{r=0}^{2}{}_3T_r = -\frac{1}{8}$$

$$\beta(-2) = -\frac{1}{2^3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|\pi^{2k}}{2k(2k-3)\,!} = -\frac{1}{2^3}\sum_{r=0}^{1}{}_2T_r = -\frac{1}{2}$$

$$\beta(-4) = \frac{1}{2^5}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|\pi^{2k}}{2k(2k-5)\,!} = \frac{1}{2^5}\sum_{r=0}^{n}{}_4T_r = \frac{5}{2}$$

例2 $\boldsymbol{\eta(-5), \beta(-6)}$

$$\mathrm{Et}[n\_] := \left(1-2^{2n}\right)\mathrm{Zeta}[1-2n]$$

$$\mathrm{To}[n\_] := \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\sum_{k=n}^{100}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\mathrm{Abs}[\mathrm{BernoulliB}[2k]]}{2k\,(2k-2n)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n}$$

Et[3]　　N[To[3]]

$\frac{1}{4}$　　0.25

$$\mathrm{Bt}[n\_] := \mathrm{DirichletL}\ [4,\ 2,\ -2n]$$

$$\mathrm{Te}[n\_] := \frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}\sum_{k=n+1}^{100}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\mathrm{Abs}[\mathrm{BernoulliB}[2k]]}{2k\,(2k-2n-1)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1}$$

Bt[3]　　N[Te[3]]

$-\frac{61}{2}$　　-30.5

Note

$\beta(-2n)$ にディリクレの負の偶数ベータとオイラー数との関係式 $\beta(-2n)=E_{2n}/2$ を用いれば次式を得る。

$$E_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k-2n-1)\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}T_r \qquad (3.E)$$

10･2　*tanhx* の項別高階微分

10･2･0　*tanhx* の高階微分

公式9･2･7 (9･2)によれば、$tanh\,x$ の高階微分は次式で示された。

$$\left(tanh\,x\right)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{n/2\uparrow} (-1)^r\,{}_nT_r\left(tanh\,x\right)^{n+1-2r} \tag{0.n}$$

ここで↑ は天井関数であり、${}_nT_r$ は 10･1･0 と同じ係数である。

10･2･1　*tanhx* のテイラー級数の項別高階微分

公式10･2･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、↑ を天井関数とするとき、$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\left(tanh\,x\right)^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-2)\,!}x^{2k-2}$$

$$\left(tanh\,x\right)^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-3)\,!}x^{2k-3}$$

$$\vdots$$

$$\left(tanh\,x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}x^{2k-n-1} \tag{1.n}$$

導出

$tan\,x$ は次のようにテイラー展開される。

$$tanh\,x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,!}x^{2k-1} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を順次微分することにより与式を得る。(Σの初項は $tan\,x$ に同じ。)

10･2･2　*tanhx* のフーリエ級数の項別高階微分

公式10･2･2

$x>0$ について次式が成立する。

$$\left(tanh\,x\right)^{(1)} = 2^2\left(1^1e^{-2x}-2^1e^{-4x}+3^1e^{-6x}-4^1e^{-8x}+- \cdots\right)$$

$$\left(tanh\,x\right)^{(2)} = -2^3\left(1^2e^{-2x}-2^2e^{-4x}+3^2e^{-6x}-4^2e^{-8x}+- \cdots\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(tanh\,x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}2^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^n e^{-2kx} \tag{2.n}$$

導出

$tanh\,x$ は $x>0$ について次のようにフーリエ展開される。

$$\begin{aligned}tanh\,x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \left(1 - e^{-2x}\right)\left(1 - e^{-2x} + e^{-4x} - e^{-6x} + - \cdots\right) \\ &= 1 - \left(2e^{-2x} - 2e^{-4x} + 2e^{-6x} - 2e^{-8x} + - \cdots\right) \\ &= 1 - 2(cos\,2ix - cos\,4ix + cos\,6ix - cos\,8ix + - \cdots) \\ &\quad - 2i(sin\,2ix - sin\,4ix + sin\,6ix - sin\,8ix + - \cdots)\end{aligned} \tag{2.0}$$

この (2.0) の両辺を逐次微分して与式を得る。

10･2･3 指数級数とベルヌイ級数

(0.n) , (1.n) , (2.2n) においてxを$x/2$に置換して次の公式を得る。

公式10･2･3

$\lceil\ \rceil$を天井関数とし、B_{2k}をベルヌイ数とし、${}_nT_r$ を 10･1･0 で述べた係数とするとき、

$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k^n}{e^{kx}} &= (-1)^{n-1}\sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}x^{2k-n-1} \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{\lceil n/2\rceil}(-1)^r\,{}_nT_r\left(tanh\frac{x}{2}\right)^{n+1-2r}\end{aligned}$$

例

$$\frac{1^1}{e^{1x}} - \frac{2^1}{e^{2x}} + \frac{3^1}{e^{3x}} - \frac{4^1}{e^{4x}} + - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-2)\,!}x^{2k-2} = -\frac{1}{2^2}\left(tanh^2\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$\frac{1^2}{e^{1x}} - \frac{2^2}{e^{2x}} + \frac{3^2}{e^{3x}} - \frac{4^2}{e^{4x}} + - \cdots = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-3)\,!}x^{2k-3} = -\frac{1}{2^3}\left(2\,tanh^3\frac{x}{2} - 2\,tanh\frac{x}{2}\right)$$

ディリクレ奇数イータ(負)

公式10･2･3 において収束条件を無視して$x=0$とすればディリクレ奇数イータ(負)が得られる。

公式10･2･3'

$\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ とし、ベルヌイ数B_{2n}及びタンジェント数T_{2n-1}をそれぞれ

$B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\ B_{10}=5/66,\ \cdots$

$T_1=1,\quad T_3=2,\quad T_5=16,\quad T_7=272,\quad T_9=7936,\ \cdots$

とするとき、次式が成立する。

$$\eta(-2n+1) = \frac{\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{2n} = -\frac{(-1)^n}{2^{2n}}T_{2n-1} \tag{3.2n−1'}$$

$$\eta(-2n) \quad = 0 \tag{3.2n'}$$

導出

公式10・2・3 において$x=0$と置けば、フーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k^n}{e^{k0}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{-n}}=\eta(-n)$$

テイラー級数と多項式は

$n=2m-1$ のとき

$$(-1)^{n-1}\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}0^{2k-n-1}$$

$$=(-1)^{2m-1-1}\sum_{k=\frac{2m-1+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\{2k-(2m-1)-1\}!}0^{2k-(2m-1)-1}$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k(2k-2m)!}0^{2k-2m}=\frac{\left(2^{2m}-1\right)B_{2m}}{2m\ 0!}0^0=\frac{\left(2^{2m}-1\right)B_{2m}}{2m}$$

$$-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{n/2\uparrow}(-1)^r{}_nT_r\left(tanh\frac{0}{2}\right)^{n+1-2r}$$

$$=-\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r{}_{2m-1}T_r0^{2m-2r}=-\frac{1}{2^{2m}}(-1)^m{}_{2m-1}T_m0^0$$

$$=-\frac{(-1)^m}{2^{2m}}T_{2m-1}\qquad\left(\because\quad {}_{2m-1}T_m=T_{2m-1}\right)$$

$n=2m$ のとき

$$(-1)^{n-1}\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}0^{2k-n-1}$$

$$=(-1)^{2m-1}\sum_{k=\frac{2m+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k(2k-2m-1)!}0^{2k-2m-1}=0$$

$$-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{n/2\uparrow}(-1)^r{}_nT_r\left(tanh\frac{0}{2}\right)^{n+1-2r}$$

$$=-\frac{1}{2^{2m+1}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r{}_{2m}T_r0^{2m+1-2r}=0$$

m を n に置き換えて (3.2n−1')、(3.2n') を得る。

10･3　$cot\,x$ の項別高階微分

10･3･0　$cot\,x$ の高階微分

公式9･2･6 (9･2)によれば、$cot\,x$ の高階微分は次式で示された。

$$(cot\,x)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{n/2\uparrow} {}_nT_r (cot\,x)^{n+1-2r} \tag{0.n}$$

ここで ↑ は天井関数であり、${}_nT_r$ は 10･1･0 と同じ係数である。

10･3･1　$cot\,x$ のテイラー級数の項別高階微分

公式10･3･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、↑ を天井関数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$(cot\,x)^{(1)} = -\frac{1!}{x^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2)!} x^{2k-2}$$

$$(cot\,x)^{(2)} = \frac{2!}{x^3} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-3)!} x^{2k-3}$$

$$\vdots$$

$$(cot\,x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} - \sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \tag{1.n}$$

導出

$$x\,cot\,x = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{(2k)!} x^{2k} \qquad 0<x<\pi$$

より

$$cot\,x = \frac{0!}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-1)!} x^{2k-1}$$

この両辺を順次微分して与式を得る。(Σの初項は $tan\,x$ に同じ。)

公式10･3･1は次のように表すこともできる。

公式10･3･1'

B_{2k} をベルヌイ数、↑ を天井関数とするとき、$\pi/2<x<\pi$ について次式が成立する。

$$(cot\,x)^{(n)} = -\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-n-1}$$

導出

$$cot\,x = -tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$tan\,x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

より

$$cot\,x = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1} \qquad 0<x<\pi$$

この両辺を繰り返し微分して与式を得る。(Σ の初項は $tan\,x$ に同じ。)

$\boldsymbol{cot\,x}$ の高階微分のテイラー級数の和

(0.n) と (1.n) より、$0<x<\pi$ について次式を得る。

$$\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!}x^{2k} = (-1)^n\left\{n! - x^{n+1}\sum_{r=0}^{n/2\uparrow}{}_nT_r(cot\,x)^{n+1-2r}\right\} \tag{1.t}$$

そしてこれに $x=\pi/4$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} = -1! + 2\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} = 2! - 4\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-4)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} = -3! + 16\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-5)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} = 4! - 80\left(\frac{\pi}{4}\right)^{5}$$

$$\vdots$$

10･3･2 $\boldsymbol{cot\,x}$ のフーリエー級数の項別高階微分

5･3･2 で見たように、$cot\,x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$\begin{aligned} cot\,x &= 2(\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\sin 8x+\cdots) \\ &\quad -2i(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x+\cdots)-i \end{aligned}$$

これは等式としては成立しないが、この両辺の実数部を機械的に逐次微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} (cot\,x)^{(1)} &= 2^2(1\cos 2x+2\cos 4x+3\cos 6x+4\cos 8x+\cdots) \\ (cot\,x)^{(2)} &= -2^3\left(1^2\sin 2x+2^2\sin 4x+3^2\sin 6x+4^2\sin 8x+\cdots\right) \\ (cot\,x)^{(3)} &= -2^4\left(1^3\cos 2x+2^3\cos 4x+3^3\cos 6x+4^3\cos 8x+\cdots\right) \\ (cot\,x)^{(4)} &= 2^5\left(1^4\sin 2x+2^4\sin 4x+3^4\sin 6x+4^4\sin 8x+\cdots\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(cot\,x)^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}2^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2n-1}\cos 2kx \tag{2.2n−1}$$

$$(cot\,x)^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n+1}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2n}\sin 2kx \tag{2.2n}$$

勿論これらも等式としては成立しない。 ところがこれらが成立するものとして計算を進めると、

以下のような面白い結果が得られる。

10･3･3 ディリクレの奇数イータと偶数ベータ

公式10･3･3

$\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$, $\beta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ とし、B_{2k} をベルヌイ数、${}_nT_r$ を 10･1･0 で述べた係数とするとき、次式が成立する。

$$\eta(1-2n)=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left\{(2n-1)!+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n-1}T_r$$

$$\beta(-2n)=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left\{(2n)!-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\}$$

$$=(-1)^n\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}T_r$$

導出

(0.n) , (1.n) , (2.2n−1) , (2.2n) より、形式的に次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2n-1}\cos 2kx=\frac{(-1)^n}{2^{2n}x^{2n}}\left\{(2n-1)!+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}x^{2k}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n-1}T_r(\cot x)^{2n-2r}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2n}\sin 2kx=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}x^{2n+1}}\left\{(2n)!-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}x^{2k}\right\}$$

$$=(-1)^n\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}T_r(\cot x)^{2n+1-2r}$$

これらに $x=\pi/4$ を代入すると、左辺はそれぞれ

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2n-1}\cos\frac{k\pi}{2}=-2^{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{2n-1}=-2^{2n-1}\eta(1-2n)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2n}\sin k\frac{k\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)^{2n}=\beta(-2n)$$

であるから、与式を得る。

例

$$\eta(-1)=\frac{1}{2^3}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left\{1!+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\}=\frac{1}{2^3}\sum_{r=0}^{1}{}_1T_r=\frac{1}{4}$$

$$\eta(-3) = -\frac{1}{2^7}\left(\frac{4}{\pi}\right)^4\left\{3!+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-4)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\} = -\frac{1}{2^7}\sum_{r=0}^{2}{}_3T_r = -\frac{1}{8}$$

$$\beta(-2) = -\frac{1}{2^3}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left\{2!-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\} = -\frac{1}{2^3}\sum_{r=0}^{1}{}_2T_r = -\frac{1}{2}$$

$$\beta(-4) = \frac{1}{2^5}\left(\frac{4}{\pi}\right)^4\left\{4!-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-5)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\} = \frac{1}{2^5}\sum_{r=0}^{n}{}_4T_r = \frac{5}{2}$$

10·3·4 階乗とベルヌイ級数

公式10·3·4

B_{2k} をベルヌイ数とするとき、次式が成立する。

$$(2n-1)! = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \tag{4.1}$$

$$(2n)! = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \tag{4.2}$$

導出

公式10·3·1'において n を $2n-1$ と置けば次のようになる。

$$(\cot x)^{(2n-1)} = -\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-2n}$$

これに $x=\pi/4$ を代入すると

$$(\cot x)^{(2n-1)}\Big|_{x=\pi/4} = -\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n}$$

他方、(2.2n-1) に $x=\pi/4$ を代入すると

$$(\cot x)^{(2n-1)}\Big|_{x=\pi/4} = -(2n-1)!\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n}$$

これらは等しくなければならないから、(4.1) を得る。

次に、公式10·3·1'において n を $2n$ と置けば

$$(\cot x)^{(2n)} = -\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-2n-1}$$

これに $x=\pi/4$ を代入すると

$$(\cot x)^{(2n)}\Big|_{x=\pi/4} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1}$$

他方、(2.2n) に $x=\pi/4$ を代入すると

$$(\cot x)^{(2n)}\Big|_{x=\pi/4} = (2n)!\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1}$$

これらは等しくなければならないから、(4.2) を得る。

論より証拠

(2n-1)!

$$\text{Fo}[n\_] := \sum_{k=n}^{100} \frac{(2^{2k}-2)\,\text{Abs}[\text{BernoulliB}[2k]]}{2k\,(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

```
N[Fo[1]]     N[Fo[2]]     N[Fo[3]]
1.           6.           120.
```

(2n)!

$$\text{Fe}[n\_] := \sum_{k=n+1}^{100} \frac{2^{2k}\,\text{Abs}[\text{BernoulliB}[2k]]}{2k\,(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

```
N[Fe[1]]     N[Fe[2]]     N[Fe[3]]
2.           24.          720.
```

10･4　$\coth x$ の項別高階微分

10･4･0　$\coth x$ の高階微分

公式9･2･7（9･2）によれば、$\coth x$ の高階微分は次式で示された。

$$(\coth x)^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{\lceil n/2 \rceil} (-1)^r {}_nT_r (\coth x)^{n+1-2r} \tag{0.n}$$

ここで $\lceil\ \rceil$ は天井関数であり、${}_nT_r$ は 10･1･0 と同じ係数である。

10･4･1　$\coth x$ のテイラー級数の項別高階微分

公式10･4･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$\lceil\ \rceil$ を天井関数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$(\coth x)^{(1)} = -\frac{1!}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-2)!} x^{2k-2}$$

$$(\coth x)^{(2)} = \frac{2!}{x^3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-3)!} x^{2k-3}$$

$$\vdots$$

$$(\coth x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \tag{1.n}$$

導出

$$x \coth x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \qquad 0<x<\pi$$

より

$$\coth x = \frac{0!}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-1)!} x^{2k-1}$$

この両辺を順次微分することにより与式を得る。(Σ の初項は $\tan x$ に同じ。)

10･4･2　$\coth x$ のフーリエー級数の項別高階微分

公式10･4･2

$x>0$ について次式が成立する。

$$(\coth x)^{(1)} = -2^2\left(1^1 e^{-2x} + 2^1 e^{-4x} + 3^1 e^{-6x} + 4^1 e^{-8x} + \cdots\right)$$

$$(\coth x)^{(2)} = 2^3\left(1^2 e^{-2x} + 2^2 e^{-4x} + 3^2 e^{-6x} + 4^2 e^{-8x} + \cdots\right)$$

$$\vdots$$

$$(\coth x)^{(n)} = (-1)^n 2^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n e^{-2kx} \tag{2.n}$$

導出

$coth\,x$ は $x>0$ について次のようにフーリエ展開される。

$$coth\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\left(1+e^{-2x}\right)\left(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+\cdots\right)$$
$$=1+\left(2e^{-2x}+2e^{-4x}+2e^{-6x}+2e^{-8x}+-\cdots\right) \tag{2.0}$$
$$=1+2(cos\,2ix+cos\,4ix+cos\,6ix+cos\,8ix+\cdots)$$
$$+2i(sin\,2ix+sin\,4ix+sin\,6ix+sin\,8ix+\cdots)$$

この (2.0) の両辺を逐次微分して与式を得る。

10･4･3 指数級数とベルヌイ級数

(0.n) , (1.n) , (2.2n) において x を $x/2$ に置換して次の公式を得る。

公式10･4･3

$\uparrow$ を天井関数とし、B_{2k} をベルヌイ数とし、 ${}_nT_r$ を 10･1･0 で述べた係数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{e^{kx}}=\frac{1}{x^{n+1}}\left\{n\,!+(-1)^n\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{B_{2k}x^{2k}}{2k(2k-n-1)\,!}\right\}$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{n/2\uparrow}(-1)^r\,{}_nT_r\left(coth\frac{x}{2}\right)^{n+1-2r}$$

例

$$\frac{1^1}{e^{1x}}+\frac{2^1}{e^{2x}}+\frac{3^1}{e^{3x}}+\frac{4^1}{e^{4x}}+\cdots=\frac{1}{x^2}\left\{1!-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}x^{2k}}{2k(2k-2)\,!}\right\}=\frac{1}{2^2}\left(coth^2\frac{x}{2}-1\right)$$
$$\frac{1^2}{e^{1x}}+\frac{2^2}{e^{2x}}+\frac{3^2}{e^{3x}}+\frac{4^2}{e^{4x}}+\cdots=\frac{1}{x^3}\left\{2!+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}x^{2k}}{2k(2k-3)\,!}\right\}=\frac{1}{2^3}\left(2\,coth^3\frac{x}{2}-2\,coth\frac{x}{2}\right)$$

指数級数と階乗

公式10･4･3 に $x=1$ を与えることにより次の重要な特殊値を得る。

公式10･4･3’

$\uparrow$ を天井関数とし、B_{2k} をベルヌイ数とし、 ${}_nT_r$ を 10･1･0 で述べた係数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{e^k}=n\,!+(-1)^n\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-n-1)\,!}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{n/2\uparrow}(-1)^r\,{}_nT_r\left(coth\frac{1}{2}\right)^{n+1-2r}$$

Note

本公式は Sugimoto氏が予見されていた。(http://cosmos.art.coocan.jp/sp/sp56.htm)

例

$$\frac{1^1}{e^1}+\frac{2^1}{e^2}+\frac{3^1}{e^3}+\frac{4^1}{e^4}+\cdots = 1! - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-2)!} = \frac{1}{2^2}\left(\coth^2\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$\frac{1^2}{e^1}+\frac{2^2}{e^2}+\frac{3^2}{e^3}+\frac{4^2}{e^4}+\cdots = 2! + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-3)!} = \frac{1}{2^3}\left(2\coth^3\frac{1}{2} - 2\coth\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1^3}{e^1}+\frac{2^3}{e^2}+\frac{3^3}{e^3}+\frac{4^3}{e^4}+\cdots = 3! - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-4)!} = \frac{1}{2^4}\left(6\coth^4\frac{1}{2} - 8\coth^2\frac{1}{2} + 2\right)$$

従ってまた、次の近似式が得られる。

公式10･4･3”

$$\frac{1^p}{e^1}+\frac{2^p}{e^2}+\frac{3^p}{e^3}+\frac{4^p}{e^4}+\cdots \fallingdotseq \Gamma(1+p) \qquad p>0 \tag{3.p}$$

例 **$\Gamma(1+2.5)$**

```
s[p_] := Sum[k^p/E^k, {k, 1, 100}]
s[2.5]        Gamma[3.5]
3.32641       3.32335
```

10·5 $\csc x$ の項別高階微分

10·5·0 $\csc x$ の高階微分

公式9·2·8 (9·2)によれば、$\csc x$ の高階微分は次式で示された。

$$(\csc x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} {}_nE_r(\cot x)^{n-2r} \tag{0.n}$$

ここで $\downarrow$ は床関数であり、 ${}_nE_r$ は次のような係数である。

$$\begin{array}{cccc} {}_0E_0 \\ {}_1E_0 \\ {}_2E_0 & {}_2E_1 \\ {}_3E_0 & {}_3E_1 \\ {}_4E_0 & {}_4E_1 & {}_4E_2 \\ {}_5E_0 & {}_5E_1 & {}_5E_2 \\ {}_6E_0 & {}_6E_1 & {}_6E_2 & {}_6E_3 \\ {}_7E_0 & {}_7E_1 & {}_7E_2 & {}_7E_3 \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 \\ 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 24 & 28 & 5 \\ 120 & 180 & 61 \\ 720 & 1320 & 662 & 61 \\ 5040 & 10920 & 7266 & 1385 \\ \vdots \end{array}$$

10·5·1 $\csc x$ のテイラー級数の項別高階微分

公式10·5·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$\uparrow$ を天井関数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$(\csc x)^{(1)} = -\frac{1!}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-2)!}x^{2k-2}$$

$$(\csc x)^{(2)} = \frac{2!}{x^3} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-3)!}x^{2k-3}$$

$\vdots$

$$(\csc x)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-n-1)!}x^{2k-n-1} \tag{1.n}$$

導出

$$x\csc x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{(2k)!}x^{2k} \qquad 0<x<\pi$$

より

$$\csc x = \frac{0!}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-1)!}x^{2k-1}$$

この両辺を順次微分して与式を得る。(Σ の初項は $\tan x$ に同じ。)

公式10・5・1は次のように表すこともできる。

公式10・5・1'

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61,$ … をオイラー数とし、↓を床関数とするとき、$\pi/2<x<\pi$ に対して次式が成立する。

$$(\csc x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k-n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-n}$$

導出

$$\csc x = \sec\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!}x^{2k} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

より

$$\csc x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \qquad 0<x<\pi$$

この両辺を繰り返し微分して与式を得る。(Σの初項は $\tan x$ に同じ。)

$\csc x$ の高階微分のテイラー級数の和

(0.n) と (1.n) より、$0<x<\pi$ について次式を得る。

$$\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-n-1)!}\,x^{2k} = (-1)^{n-1}\left\{n! - \frac{x^{n+1}}{\sin x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} {}_nE_r(\cot x)^{n-2r}\right\} \tag{1.t}$$

そしてこれに $x=\pi/2$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1!$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = -2! + 1\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-4)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 3!$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = -4! + 5\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5}$$

$$\vdots$$

10・5・2 $\csc x$ のフーリエ級数の項別高階微分

5・5・2 で見たように、$\csc x$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$\begin{aligned}\csc x &= 2(\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x+\cdots)\\ &\quad -2i(\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x+\cdots)\end{aligned}$$

これは等式としては成立しないが、この両辺の実数部を機械的に逐次微分すると次式が得られる。

$$(\csc x)^{(1)} = \ \ 2(1\cos x+3\cos 3x+5\cos 5x+7\cos 7x+-\cdots)$$
$$(\csc x)^{(2)} = -2\left(1^2\sin x+3^2\sin 3x+5^2\sin 5x+4^2\sin 7x+-\cdots\right)$$
$$(\csc x)^{(3)} = -2\left(1^3\cos x+3^3\cos 3x+5^3\cos 5x+4^3\cos 7x+-\cdots\right)$$
$$(\csc x)^{(4)} = \ \ 2\left(1^4\sin x+3^4\sin 3x+5^4\sin 5x+4^4\sin 7x+-\cdots\right)$$
$$\vdots$$
$$(\csc x)^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{2n-1}\cos\{(2k+1)x\} \tag{2.2n-1}$$
$$(\csc x)^{(2n)} = (-1)^{n}2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{2n}\sin\{(2k+1)x\} \tag{2.2n}$$

勿論これらも等式としては成立しない。 ところがこれらが成立するものとして計算を進めると、以下のような面白い結果が得られる。

10・5・3 ディリクレ偶数ベータ(負)

公式10・5・3

$\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ とし、ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ次のようであるとする。

$$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$$
$$E_0=1,\ E_2=-1,\ \ E_4=5,\ \ \ \ E_6=-61,\ \ E_8=1385,\ \cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\beta(-2n) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\left\{(2n)!+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\right\} = \frac{E_{2n}}{2}$$

導出

(0.n) , (1.n) , (2.2n) より、形式的に次式を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{2n}\sin\{(2k+1)x\} = \frac{(-1)^n}{2x^{2n+1}}\left\{(2n)!+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-2n-1)!}\,x^{2k}\right\}$$
$$= \frac{(-1)^n}{2\sin x}\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}E_r(\cot x)^{2n-2r}$$

これに $x=\pi/2$ を代入すると、左辺は

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{2n}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{2n} = \beta(-2n)$$

であるから、

$$\beta(-2n) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\left\{(2n)!+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{n} {}_{2n}E_r \, 0^{2n-2r} = \frac{(-1)^n}{2} \, {}_{2n}E_n 0^0$$

$$= \frac{E_{2n}}{2} \qquad \left(\because \quad (-1)^n \, {}_{2n}E_n = E_{2n} \right)$$

例

$$\beta(-2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \left\{ 2! + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)\left|B_{2k}\right|}{2k(2k-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \right\} = \frac{E_2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta(-4) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \left\{ 4! + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\left(2^{2k}-2\right)\left|B_{2k}\right|}{2k(2k-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \right\} = \frac{E_4}{2} = \frac{5}{2}$$

10·6 *cschx* の項別高階微分

10·6·0 *cschx* の高階微分

公式9·2·9 (9·2)によれば、$cschx$ の高階微分は次式で示された。

$$(cschx)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{sinhx}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nE_r(cothx)^{n-2r} \tag{0.n}$$

ここで ↓ は床関数であり、 ${}_nE_r$ は 10·5·0 と同じ係数である。

10·6·1 *cschx* のテイラー級数の項別高階微分

公式10·6·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、↑ を天井関数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$(cschx)^{(1)} = -\frac{1!}{x^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k\,(2k-2)!}x^{2k-2}$$

$$(cschx)^{(2)} = \frac{2!}{x^3} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k\,(2k-3)!}x^{2k-3}$$

$$\vdots$$

$$(cschx)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} - \sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}x^{2k-n-1} \tag{1.n}$$

導出

$$xcschx = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \qquad 0<x<\pi$$

より

$$cschx = \frac{0!}{x} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k\,(2k-1)!}x^{2k-1}$$

この両辺を順次微分することにより与式を得る。(Σの初項は $tanx$ に同じ。)

10·6·2 *cschx* のフーリエー級数の項別高階微分

公式10·6·2

$x>0$ について次式が成立する。

$$(cschx)^{(1)} = -2\left(1^1e^{-1x}+3^1e^{-3x}+5^1e^{-5x}+7^1e^{-7x}+\cdots\right)$$

$$(cschx)^{(2)} = 2\left(1^2e^{-1x}+3^2e^{-3x}+5^2e^{-5x}+4^2e^{-7x}+\cdots\right)$$

$$\vdots$$

$$(cschx)^{(n)} = (-1)^n2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^ne^{-(2k+1)x} \tag{2.n}$$

導出

$csch\,x$ は $x>0$ について次のようにフーリエ展開される。

$$
\begin{aligned}
csch\,x &= \frac{2}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2e^{-x}\left(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+\cdots\right) \\
&= 2\left(e^{-1x}+e^{-3x}+e^{-5x}+e^{-7x}+\cdots\right) \qquad (2.0) \\
&= 2(\cosh ix+\cosh 3ix+\cosh 5ix+\cdots)-2i(\sinh ix+\sinh 3ix+\sinh 5ix+\cdots)
\end{aligned}
$$

この (2.0) 両辺を逐次微分して与式を得る。

10･6･3　指数級数とベルヌイ級数

(0.n) , (1.n) , (2.2n) より次の公式を得る。

公式10･6･3

↑, ↓をそれぞれ天井関数及び床関数とし、B_{2k} をベルヌイ数とし、 ${}_nE_r$ を10･5･0 で述べた係数とするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)^n}{e^{(2k+1)x}} = \frac{1}{2x^{n+1}}\left\{n!-(-1)^n\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}\,x^{2k}\right\}
$$

$$
= \frac{1}{2\sinh x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\,{}_nE_r(csch\,x)^{n-2r}
$$

例

$$
\frac{1^1}{e^{1x}}+\frac{3^1}{e^{3x}}+\frac{5^1}{e^{5x}}+\frac{7^1}{e^{7x}}+\cdots = \frac{1}{2x^2}\left\{1!+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k\,(2k-2)!}\,x^{2k}\right\} = \frac{\coth^1 x}{2\sinh x}
$$

$$
\frac{1^2}{e^{1x}}+\frac{3^2}{e^{3x}}+\frac{5^2}{e^{5x}}+\frac{7^2}{e^{7x}}+\cdots = \frac{1}{2x^3}\left\{2!-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k\,(2k-3)!}\,x^{2k}\right\} = \frac{2\coth^2 x-\coth^0 x}{2\sinh x}
$$

指数級数と階乗

公式10･6･3 に $x=1$ を与えることにより次の重要な特殊値を得る。

公式10･6･3'

↑, ↓をそれぞれ天井関数及び床関数とし、B_{2k} をベルヌイ数とし、 ${}_nE_r$ を10･5･0 で述べた係数とするとき、次式が成立する。

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)^n}{e^{(2k+1)}} = \frac{1}{2}\left\{n!-(-1)^n\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}\right\} = \frac{1}{2\sinh 1}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nE_r(\coth 1)^{n-2r}
$$

例

$$
\frac{1^1}{e^1}+\frac{3^1}{e^3}+\frac{5^1}{e^5}+\frac{7^1}{e^7}+\cdots = \frac{1}{2}\left\{1!+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k-2)!}\right\} = \frac{\coth^1 1}{2\sinh 1}
$$

$$\frac{1^2}{e^1}+\frac{3^2}{e^3}+\frac{5^2}{e^5}+\frac{7^2}{e^7}+\cdots=\frac{1}{2}\left\{2!-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k-3)!}\right\}=\frac{2coth^{2}1-coth^{0}1}{2sinh1}$$

従ってまた、公式10･4･3’と併せて次式が得られる。

$$\frac{2^n}{e^2}+\frac{4^n}{e^4}+\frac{6^n}{e^6}+\frac{8^n}{e^8}+\cdots=\frac{n!}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-n-1)!} \tag{3.e'}$$

10･7　$sec\,x$ の項別高階微分

10･7･0　$sec\,x$ の高階微分

公式9･2･8（9･2）によれば、$sec\,x$ の高階微分は次式で示された。

$$(sec\,x)^{(n)} = \frac{1}{cos\,x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} {}_nE_r(tan\,x)^{n-2r} \tag{0.n}$$

ここで↓ は床関数であり、${}_nE_r$ は 10･5･0 と同じ係数である。

10･7･1　$sec\,x$ のテイラー級数の項別高階微分

公式10･7･1

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, \cdots$ をオイラー数とし、↓を床関数 とするとき、$|x|<\pi/2$について次式が成立する。

$$(sec\,x)^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-1)!}x^{2k-1} \tag{1.1}$$

$$(sec\,x)^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-2)!}x^{2k-2} \tag{1.2}$$

$$(sec\,x)^{(3)} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-3)!}x^{2k-3} \tag{1.3}$$

$$(sec\,x)^{(4)} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-4)!}x^{2k-4} \tag{1.4}$$

$\vdots$

$$(sec\,x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-n)!}x^{2k-n} \tag{1.n}$$

導出

$sec\,x$ は次のようにテイラー展開される。

$$sec\,x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k)!}x^{2k} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を順次微分すれば (1.1)～(1.4) となる。

ここで微分階数 n と $\sum$ の初項 k_0 の関係を見ると次のようになっている。

n	0	1	2	3	4	…
k_0	0	1	1	2	2	…

このような関係は 床関数 $x\downarrow\ (=\lfloor x\rfloor)$ を用いて $k_0=\dfrac{n+1}{2}\downarrow$ と表現できる。 よって与式を得る。

$sec\,x$ の高階微分のテイラー級数の和

(0.n) と (1.n) より、$|x|<\pi/2$ について次式を得る。

$$\sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-n)!}x^{2k-n}=\frac{1}{\cos x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}{}_nE_r(\tan x)^{n-2r} \tag{1.t}$$

そしてこれに $x=\pi/4$ を与えることにより次の特殊値を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-1}=\sqrt{2}\sum_{r=0}^{0}{}_nE_r=\sqrt{2}\cdot 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-1}=\sqrt{2}\sum_{r=0}^{1}{}_nE_r=\sqrt{2}\cdot 3$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-3}=\sqrt{2}\sum_{r=0}^{1}{}_nE_r=\sqrt{2}\cdot 11$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k-4)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-4}=\sqrt{2}\sum_{r=0}^{2}{}_nE_r=\sqrt{2}\cdot 57$$

$$\vdots$$

10・8 $\boldsymbol{sech\,x}$ の項別高階微分

10・8・0 $\boldsymbol{sech\,x}$ の高階微分

公式9・2・9 (9・2)によれば、$sech\,x$ の高階微分は次式で示された。

$$(sech\,x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{cosh\,x}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\,{}_nE_r(tanh\,x)^{n-2r} \tag{0.n}$$

ここで↓ は床関数であり、 ${}_nE_r$ は 10・5・0 と同じ係数である。

10・8・1 $\boldsymbol{sech\,x}$ のテイラー級数の項別高階微分

公式10・8・1

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385,$ … をオイラー数とし、↓を床関数 とするとき、$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$(sech\,x)^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

$$(sech\,x)^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-2)!}x^{2k-2}$$

$$\vdots$$

$$(sech\,x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-n)!}x^{2k-n} \tag{1.n}$$

導出

$sech\,x$ は次のようにテイラー展開される。

$$sech\,x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を順次微分することにより与式を得る。(Σの初項は $sec\,x$ に同じ。)

10・8・2 $\boldsymbol{sech\,x}$ のフーリエー級数の項別高階微分

公式10・8・2

$x>0$ について次式が成立する。

$$(sech\,x)^{(1)} = -2\left(1^1e^{-1x}-3^1e^{-3x}+5^1e^{-5x}-7^1e^{-7x}+-\cdots\right)$$

$$(sech\,x)^{(2)} = \ \ 2\left(1^2e^{-1x}-3^2e^{-3x}+5^2e^{-5x}-4^2e^{-7x}+-\cdots\right)$$

$$\vdots$$

$$(sech\,x)^{(n)} = (-1)^n2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^ne^{-(2k+1)x} \tag{2.n}$$

導出

$sech\,x$ は $x>0$ について次のようにフーリエ展開される。

$$sech\,x = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 2e^{-x}\left(1-e^{-2x}+e^{-4x}-e^{-6x}+-\cdots\right)$$

$$= 2\left(e^{-1x} - e^{-3x} + e^{-5x} - e^{-7x} + - \cdots\right) \tag{2.0}$$
$$= 2\left(\cos 1ix - \cos 3ix + \cos 5ix - \cos 7ix + - \cdots\right)$$
$$+ 2i\left(\sin 1ix - \sin 3ix + \sin 5ix - \sin 7ix + - \cdots\right)$$

そこで (2.0) の両辺を x で順次微分して与式を得る。

10･8･3　指数級数とオイラー級数

(0.n) , (1.n) , (2.2n) より次の公式を得る。

公式10･8･3

$\lfloor\;\rfloor$ を床関数とし、E_{2k} をオイラー数とし、 ${}_nE_r$ を 10･5･0 で述べた係数とするとき、$0<x<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+1)^n}{e^{(2k+1)x}} = \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-n)!}x^{2k-n}$$
$$= \frac{1}{2\cosh x}\sum_{r=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^r\,{}_nE_r(\tanh x)^{n-2r}$$

例1

$$\frac{1^1}{e^{1x}} - \frac{3^1}{e^{3x}} + \frac{5^1}{e^{5x}} - \frac{7^1}{e^{7x}} + - \cdots = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \frac{\tanh^1 x}{2\cosh x}$$
$$\frac{1^2}{e^{1x}} - \frac{3^2}{e^{3x}} + \frac{5^2}{e^{5x}} - \frac{7^2}{e^{7x}} + - \cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-2)!}x^{2k-2} = \frac{2\tanh^2 x - \tanh^0 x}{2\cosh x}$$

例2　$n=3,\ x=1.4$

```
Ff[n_, x_] := Sum[(-1)^k (2 k + 1)^n / E^((2 k+1) x), {k, 0, 100}]

Ft[n_, x_] := (-1)^n / 2 Sum[EulerE[2 k] / (2 k - n)! x^(2 k-n), {k, Floor[(n+1)/2], 300}]

G3[x_] := (6 Tanh[x]^3 - 5 Tanh[x]^1) / (2 Cosh[x])

Ff[3, 1.4]       Ft[3, 1.4]       G3[1.4]
-0.0611079       -0.0611079       -0.0611079
```

ディリクレ･ベータ(負)

公式10･8･3 において $x=0$ とすればディリクレ･ベータ(負)が得られる。

公式10･8･3'

$E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$ をオイラー数とし $\beta(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^n}$ とするとき、次式が成立する。

$$\beta(-2n+1) = 0 \tag{3.2n-1'}$$

$$\beta(-2n) = \frac{E_{2n}}{2} \tag{3.2n'}$$

導出

公式10･8･3 において$x=0$と置けば、フーリエ級数は

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+1)^n}{e^{(2k+1)0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{-n}} = \beta(-n)$$

テイラー級数は

$n=2m-1$のとき

$$\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-n)!}0^{2k-n}$$

$$= \frac{(-1)^{2m-1}}{2}\sum_{k=\lfloor\frac{2m-1+1}{2}\rfloor}^{\infty}\frac{E_{2k}}{\{2k-(2m-1)\}!}0^{2k-(2m-1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-2m+1)!}0^{2k-2m+1} = 0$$

$n=2m$ のとき

$$\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-n)!}0^{2k-n} = \frac{(-1)^{2m}}{2}\sum_{k=\lfloor\frac{2m+1}{2}\rfloor}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-2m)!}0^{2k-2m}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-2m)!}0^{2k-2m} = \frac{1}{2}\frac{E_{2m}}{0!}0^0$$

$$= \frac{E_{2m}}{2}$$

m を n に置き換えて (3.2n-1')、(3.2n') を得る。

Note

これらの結果は 公式10･8･3 の多項式からも得ることができる。

2006.11.11
2012.07.04 Renewal

K. Kono

宇宙人の数学