12 超微分

12･1 超導関数と超微分

12･1･1 超導関数

定義12･1･1
高階導関数 $f^{(n)}(x)$ の微分演算子のインデックスを自然数区間 $[1,n]$から複素平面 $[0,p]$ に解析接続して得られる関数 $f^{(p)}(x)$ を、$f(x)$ の**超導関数**と言う。

例

$$(\sin x)^{(p)} = \sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)+c_p(x) \qquad c_p(x) \text{ は任意の関数}$$

9･1･2 超微分

定義12･1･2
関数 f を1つの独立変数 x について繰り返し非整数回微分することを**超微分**と言い、次のように記述する。

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) \qquad \left\{ = \frac{d}{dx}\sim\frac{d}{dx}f(x) \qquad \frac{d}{dx} \text{ は } p \text{ 個}\right\}$$

例

$$\frac{d^p}{dx^p}\cos x = \cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

12･1･3 超微分の基本定理

7･1･3 (超積分の基本定理)より次の定理を得る。

定理12･1･3
$f^{(r)}$ $r\in[0,p]$ は閉区間 I 上の連続関数 且つ f の任意の r 階超導関数とし $a(r)$ は閉区間 $[0,p]$ 上の連続関数とするとき、$a(r), x\in I$ について次式が成立する。

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1}f^{(r)}\{a(p-r)\}\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(p-r)}^{x}dx^r \tag{1.1}$$

特に $a(r)=a \quad for\ all \quad r\in[0,p]$ のとき

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} \tag{1.2}$$

証明
7･1･3 の 定理7･1･3 は次のように書き換えられる。

$$f^{<p>}(x) = \int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x}f(x)dx^p + \sum_{r=0}^{p-1}f^{<p-r>}\{a(p-r)\}\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(p-r+1)}^{x}dx^r$$

特に $a(r)=a\quad for\ all\quad r\in[0,p]$ のとき

$$f^{<p>}(x) = \int_a^x \sim \int_a^x f(x)dx^n + \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}$$

これらの両辺を p 回微分すれば

$$\frac{d^p}{dx^p}f^{<p>}(x) = f^{<0>}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}\{a(p-r)\}\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(p-r)}^x dx^r$$

$$\frac{d^p}{dx^p}f^{<p>}(x) = f^{<0>}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}$$

積分演算子 $<>$ 中のインデックスを $-p$ だけスライドして微分演算子 $(\ )$ に置き換えれば与式を得る。

微分定数関数

これらの式中の $\dfrac{d^p}{dx^p}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1}$ 以下を **微分定数関数** と呼ぶことにする。p は実数であるから、$\dfrac{d^p}{dx^p}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1}$ 以下を一般的に求めるのは困難である。

但し、$f(x)=e^x$ の場合には例外的に簡単になる。即ち、7・1・3 の **積分定数関数** によれば、

$$\sum_{r=0}^{p-1} e^a\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} = e^a\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} - \frac{(x-a)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}\right\}$$

であったから、この両辺を p 回微分すれば

$$\frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} e^a\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} = e^a\sum_{r=0}^{\infty}\frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} - \frac{(x-a)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}\right\}$$

となる。後述 12・3・1 によれば

$$\frac{d^p}{dx^p}(x-a)^r = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-p)}(x-a)^{r-p}\ ,\quad \frac{d^p}{dx^p}(x-a)^{r+p} = \frac{\Gamma(1+r+p)}{\Gamma(1+r)}(x-a)^r$$

であるから、これらを上式に代入すれば

$$\frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} e^a\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} = e^a\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(x-a)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)} - \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}\right\}$$

を得る。

12・1・4 直系と傍系

高階微分の場合、積分定数多項式は $n-1$ 次であったからそれを n 回微分した微分定数関数は0になった。ところが超微分の場合、積分定数関数は一般に無限級数であるのでそれを p 回微分した微分定数関数は0にはならない。このことは、高階微分と異なり、**超微分には直系と傍系があることを示している。**

定義12・1・4

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} f^{(r)}\{a(p-r)\}\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(p-r)}^x dx^r \qquad (1.1)$$

において

微分定数関数が0であるとき、 $\dfrac{d^p}{dx^p}f(x)$ を **直系超微分** と言い、

これに等しい関数 を **直系超導関数** と言う。

微分定数関数が0でないとき、 $\dfrac{d^p}{dx^p}f(x)$ を **傍系超微分** と言い、

これに等しい関数 を **傍系超導関数** と言う。

これらは(1.2) においても同様である。

直系超微分を簡単に言えば、**微分定数関数を無視して $f(x)$ を x について連続回微分したものが直系超微分である。**

例　e^x の直系超微分と傍系超微分

より簡単な固定下限の場合、定理の (1.2) より

$$\frac{d^p}{dx^p}e^x = e^x + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} e^a \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}$$

ここで先に求めた

$$\frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} e^a \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)} = e^a \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(x-a)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)} - \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}\right\}$$

を用いれば

$$\frac{d^p}{dx^p}e^x = e^x + e^a \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(x-a)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)} - \frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}\right\} \qquad \left(= e^a \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)}\right)$$

$a \neq -\infty$ のとき、微分定数関数は0にはなり得ないからこれは傍系超微分である。そして特に $a = -\infty$ のとき、$e^a = 0$ であるから次のような直系超微分が得られる。

$$\frac{d^p}{dx^p}e^x = e^x$$

$p=1/2$, $a=0$ のとき、$x=\pm 0.3$ における超微係数を Riemann-Liouville differintegral (後述 12･2･1) と並べて計算すると次のようになる。

左辺: Riemann_Liouville differintegral

```
• a:=0: p:=1/2:
• g := x-> 1/gamma(1-p)*int((x-t)^(1-p-1)*E^t , t=a..x):
• h := 10^-9:
• float((g(-0.3+h)-g(-0.3))/h), float((g(0.3+h)-g(0.3))/h)
```

$-0.5219916843 \cdot i,$ 　　　　1.787904935

右辺: 復級数

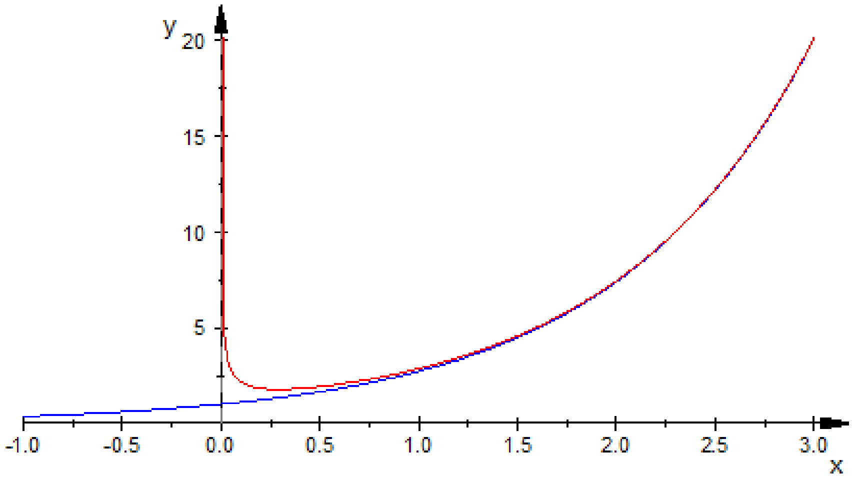
```
• m:=100:
• er := x-> E^x + E^a*sum((x-a)^(r-p)/gamma(1+r-p)
                         -(x-a)^r/gamma(1+r), r=0..m):
• float(er(-0.3)),                    float(er(0.3))
```

$1.626303259 \cdot 10^{-19} - 0.5219916832 \cdot i,$ 　　1.787904935

そして直系超導関数と傍系超導関数を並べて図示すると次のようになる。

青:直系超導関数、 赤:傍系超導関数

• plotfunc2d(E^x,er(x), x=-1..3, ViewingBoxYRange=0..20)



Remark

この傍系超導関数は直系超導関数の漸近展開と考えられる。そしてこの傍系超導関数は項別超微分に一致している。一般に項別超微分は傍系超微分となるように思われる。

12・1・5 超微分の基本公式

高階微分と同じように次の公式が成立する。

$$\{c\,f(x)\}^{(p)} = c\,f^{(p)}(x) \qquad c\neq 0 \qquad \text{（定数倍公式）}$$

$$\{f(x)+g(x)\}^{(p)} = f^{(p)}(x) + g^{(p)}(x) \qquad \text{（和・差の公式）}$$

12・2 Fractional Derivative

12・2・1 Riemann-Liouville differintegral

関数$f(x)$の超積分のうち下限関数$a(k)$が定数aのものは Riemann-Liouville 積分で計算できた。このような関数$f(x)$の超微分は Riemann-Liouville 積分と整数回の微分で計算できる。

すなわち $n=ceil(p)$ (p 以上の最小正整数)とし、先に$n-p$ 階積分しておいて後からn 階微分すれば、$n-(n-p)$ で差し引きp 階微分したことになる(次式)。

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f(t)\,dt \qquad n=\lceil p \rceil \tag{2.0}$$

この式は Riemann-Liouville differintegral と呼ばれている。differintegral は differintial と integral を結合した造語である。

(2.0) はこのまま数値積分と数値微分が可能であるが、数値微分の精度が悪くて所望の結果が得られないことがある。その場合には積分と微分の演算順序を入れ替えた

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} dt \qquad n=\lceil p \rceil \tag{2.0'}$$

が有効である。この算式は微分を先に実行するため積分定数を切り落としてしまう可能性があるので注意を要するが、多くの場合正しく計算できる。この (2.0') は次章以下で多用される。

12・2・2 初等関数の超導関数の Riemann-Liouville differintegral 表示

幾つかの初等関数の超導関数を Riemann-Liouville differintegral で表示すると次のようになる。右辺には超微分で得られる超導関数を先取りして示す。言うまでも無く、Riemann-Liouville differintegral は下限関数$a(k)$が定数aのときに限って成立する。なお、全式において p は正の非整数、$n=\lceil p \rceil$ $\{=ceil(p)\}$とする。

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-p-1} t^{\alpha} dt \quad = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)} x^{\alpha-p} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{\infty}^x (x-t)^{n-p-1} \left(\frac{d^n}{dt^n} t^{\alpha} \right) dt = (-1)^{-p} \frac{\Gamma(-\alpha+p)}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-p} \qquad (\alpha<0)$$

$$\left(e^{\pm x}\right)^{(p)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mp\infty}^x (x-t)^{n-p-1} e^{\pm t} dt = (\pm 1)^{-p} e^{\pm x}$$

$$(\log x)^{(p)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-p-1} \log t\, dt = \frac{\log x - \psi(1-p) - \gamma}{\Gamma(1-p)} x^{-p}$$

Note

$n=\lceil p \rceil$, $-(n-p)<\alpha<0$ のとき、次式は不可である。

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{\infty}^x (x-t)^{n-p-1} t^{\alpha} dt \tag{2.1}$$

何故ならば、このときはx^{α} $(\alpha<0)$を$n-p$ 回積分して超原始関数$x^{\alpha+n-p}$ $(\alpha+n-p>0)$を得ることになるから超原始関数の零点が ∞ から 0 に変化し、固定下限の積分を適用できないからである。

この場合には積分と微分の演算順序を入れ替えた

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{\infty}^{x}(x-t)^{n-p-1}\left\{\frac{d^n}{dt^n}t^{\alpha}\right\}dt \qquad n=[p] \tag{2.1'}$$

が有効である。この算式ならば $x^{\alpha-n}$ $(\alpha-n<0)$ を $n-p$ 回積分して $x^{\alpha-p}$ $(\alpha-p<0)$ を得ることになるから超原始関数の零点が変化せず、固定下限の積分が適用できる。(次節の例5参章)

超微分法 と Fractional Derivative

筆者の開発した超微分法では先ず高階導関数を求め、この演算子の添字を実数域にまで敷衍して超導関数を得る。

これに対して伝統的な Fractional Derivative では Riemann-Liouville differintegral から直接 超導関数を導出するが、その方法は非常に難しい。以下3例を示す。各例において最初が超微分法で2番目が Fractional Derivative である。

例1

$$\left(x^1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-1/2)}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)}\frac{d^1}{dx^1}\int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1}t^1dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}t^1dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left[-\frac{2}{3}\sqrt{x-t}\,(2x+t)\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

例2

$$\left(e^{-x}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{-\frac{1}{2}}e^{-x} = \frac{1}{i}e^{-x}$$

$$\left(e^{-x}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)}\frac{d^1}{dx^1}\int_{+\infty}^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{+\infty}^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left[-e^{x}\sqrt{\pi}\,erfi\left(\sqrt{x-t}\right)\right]_{\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}\sqrt{\pi}\,erfi\left(\sqrt{x-\infty}\right)\right\} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}erf\left(i\sqrt{x-\infty}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}erf\left(-\sqrt{\infty}\right)\right\} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\right) = \frac{1}{i}e^{-x}$$

例3

$$(\log x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log x - \psi(1-1/2)-\gamma}{\Gamma(1-1/2)}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\log x - \psi(1/2)-\gamma}{\Gamma(1/2)}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\log x - (-\gamma - 2\log 2) - \gamma}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\log x + 2\log 2}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(\log x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \frac{d^1}{dx^1} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \log t \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \log t \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-4\sqrt{x} \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}} \right) - 2\sqrt{x-t} \, (\log t - 2) \right]_0^x$$

ここで

$$\tanh^{-1}\frac{x}{n} = \log\sqrt{\frac{n+x}{n-x}} = \frac{1}{2}\{\log(n+x) - \log(n-x)\} \qquad |x| < n$$

であるから

$$\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2}\left\{\log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-t}\right) - \log\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-t}\right)\right\}$$

これより

$$4\sqrt{x}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}} \right) = 2\sqrt{x}\left\{\log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-t}\right) - \log\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-t}\right)\right\}$$

$$= 4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) - 2\sqrt{x}\left\{\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) + \log\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-t}\right)\right\}$$

$$= 4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) - 2\sqrt{x}\,\log\{x-(x-t)\}$$

$$= 4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) - 2\sqrt{x}\,\log t$$

よって

$$4\sqrt{x}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}} \right) + 2\sqrt{x-t}\,(\log t - 2)$$

$$= 4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) - 2\sqrt{x}\,\log t + 2\sqrt{x-t}\,\log t - 4\sqrt{x-t}$$

$$= 4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) - 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-t}\right)\log t - 4\sqrt{x-t}$$

故に

$$(\log x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-4\sqrt{x} \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}} \right) - 2\sqrt{x-t} \, (\log t - 2) \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\right) + 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-t}\right)\log t + 4\sqrt{x-t} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left\{ -4\sqrt{x}\,\log\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\,\log x \right\}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left\{ 4\sqrt{x}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right) - 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)\log 0 - 4\sqrt{x} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left\{ 4\sqrt{x}\log\left(2\sqrt{x}\right) - 4\sqrt{x} \right\} \qquad \left(\because\ 2\sqrt{x}\log\sqrt{x} = \sqrt{x}\,\log x\right)$$

さらに

$$
\begin{aligned}
4\sqrt{x}\,log\left(2\sqrt{x}\right) - 4\sqrt{x} &= 4\sqrt{x}\ log2 + 4\sqrt{x}\ log\sqrt{x} - 4\sqrt{x} \\
&= 4\sqrt{x}\ log2 + 2\sqrt{x}\ log x - 4\sqrt{x} \\
&= 4\sqrt{x}\,(log2-1) + 2\sqrt{x}\,log x
\end{aligned}
$$

であるから

$$
(log\,x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left\{4\sqrt{x}\,(log2-1)+2\sqrt{x}\,log x\right\} = \frac{log x+2log2}{\sqrt{\pi}}\,x^{-\frac{1}{2}}
$$

参考

$$
\int (x-t)^{-\frac{1}{2}}\,t\,dt = -\frac{2}{3}\sqrt{x-t}\,(2x+t)
$$

$$
\int (x-t)^{-\frac{1}{2}}\,e^{t}\,dt = -e^{x}\sqrt{\pi}\ erf\left(\sqrt{x-t}\right) \qquad erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt
$$

$$
\int (x-t)^{-\frac{1}{2}}\,e^{-t}\,dt = -e^{-x}\sqrt{\pi}\ erf\,i\left(\sqrt{x-t}\right) \qquad erf\,i(z)=erf(iz)/i
$$

$$
\int (x-t)^{-\frac{1}{2}}\,log\,t\,dt = -4\sqrt{x}\ tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x-t}\ (log\,t-2)
$$

12･2･3 Fractional Derivative の短所と長所

上記3例で見たようにRiemann-Liouville differintegralに依拠したFractional Derivativeはかくも難儀である。例3は対数関数の1/2階超微分であるがこれでも小技を駆使して丸1日を費やした。一般の p 階超微分となると絶望的である。このようにFractional Derivative ではRiemann-Liouville differintegralから具体的な超導関数を得ることが極めて困難である。

また、下限の取り方が不明瞭であること、三角関数などが扱えないことは Fractional Integral と同様である。

Riemann-Liouville differintegral に固有の問題は、微分階数 p が整数のときに使えないことである。このとき、$n=p$ 従って $\Gamma(0)=\infty$ になるからである。この場合は高階微分に頼ることになる。

しかしながら(2.0) , (2.0') は数値計算の強力なツールで, 任意の関数の任意の点の超微係数を容易に得ることができる。そしてこれにより超微分を数値的に検証することが可能である。

12･3 ベキ関数の超微分

12･3･1 ベキ関数の超微分の公式

9･2 の公式9･2･1の微分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。なお、Riemann−Liouville differintegral も併せて表示する。

公式12･3･1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$n=\lceil p\rceil$ を天井関数とするとき、次式が成立する。

(1) 基本式

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}x^{\alpha-p}=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x(x-t)^{n-p-1}t^{\alpha}dt \qquad (\alpha\geqq 0)$$

$$=(-1)^{-p}\frac{\Gamma(-\alpha+p)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-p}=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{\infty}^x(x-t)^{n-p-1}\left(\frac{d^n}{dt^n}t^{\alpha}\right)dt \qquad (\alpha<0)$$

(2) 線形式

$$\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(p)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}(ax+b)^{\alpha-p} \qquad (\alpha\geqq 0)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\frac{b}{a}}^x(x-t)^{n-p-1}(at+b)^{\alpha}dt$$

$$\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(p)}=\left(-\frac{1}{a}\right)^{-p}\frac{\Gamma(-\alpha+p)}{\Gamma(-\alpha)}(ax+b)^{\alpha-p} \qquad (\alpha<0)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{\infty}^x(x-t)^{n-p-1}\left\{\frac{d^n}{dt^n}(at+b)^{\alpha}\right\}dt$$

注意！

上記の線形式において $\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}$ を a^p としてはならない。何故ならば $a<0$ のとき、任意の実数 p,q に対して指数法則 $\left(a^p\right)^q=a^{pq}$ は成立しないから

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}=\left(a^{-1}\right)^{-p}\neq a^{(-1)(-p)}=a^p \qquad i.e. \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-p}\neq a^p$$

となるからである。$\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}=a^p$ とすると複素平面上の回転方向が逆になり誤った結果を招く。

例えば $a=-3$, $p=1/2$ のとき

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}=\left(\frac{1}{-3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{(-1)\cdot\frac{1}{3}\right\}^{-\frac{1}{2}}=(-1)^{-\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}=-i\sqrt{3}$$

$$\neq$$

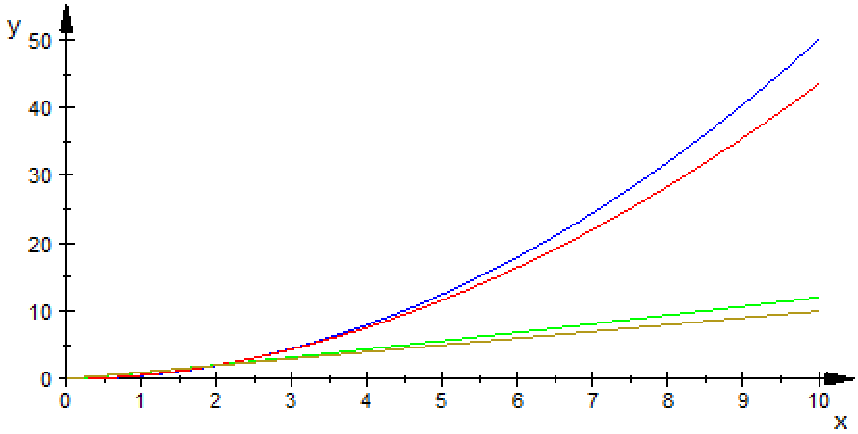
$$a^p=(-3)^{\frac{1}{2}}=\left\{(-1)\cdot 3\right\}^{\frac{1}{2}}=(-1)^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}=i\sqrt{3}$$

例1　$\boldsymbol{\alpha > p}$ の場合

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\Gamma(1+2)}{2\Gamma(1+2-1/10)}x^{2-\frac{1}{10}} = \frac{100}{171\Gamma(9/10)}x^{\frac{19}{10}} = 0.547239\,x^{\frac{19}{10}}$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{\Gamma(1+2)}{2\Gamma(1+2-9/10)}x^{2-\frac{9}{10}} = \frac{100}{11\Gamma(1/10)}x^{\frac{11}{10}} = 0.955579\,x^{\frac{11}{10}}$$

$x^2/2$, $(x^2/2)^{<1/10>}$, $(x^2/2)^{<9/10>}$, x^1 を並べて図示すると次のとおりである。



例2　$\boldsymbol{\alpha = p}$ の場合

$$(x^1)^{(1)} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-1)}x^{1-1} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}x^0 = \frac{1}{1}x^0 = 1$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)}x^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例3　$\boldsymbol{0 \leqq \alpha < p}$ の場合

$$(x^0)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(1+0)}{\Gamma(1+0-1/2)}x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(x^1)^{(2)} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-2)}x^{1-2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(0)}x^{-1} = \frac{1}{\infty}x^{-1} = 0$$

例4　$\boldsymbol{\alpha < 0}$ の場合

$$(x^{-1})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\{-(-1)+1/2\}}{\Gamma\{-(-1)\}}x^{-1-\frac{1}{2}} = -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$(x^{-1})^{(1)} = (-1)^{-1}\frac{\Gamma\{-(-1)+1\}}{\Gamma\{-(-1)\}}x^{-1-1} = -\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}x^{-2} = -x^{-2}$$

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)}=(-1)^{-2}\frac{\Gamma\{-(-1/2)+2\}}{\Gamma\{-(-1/2)\}}x^{-\frac{1}{2}-2}=\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

例5　$-(\lceil p\rceil-p)<\alpha<0$ の場合

$$\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=(-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left\{-\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\right\}}{\Gamma\left\{-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}}x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=-i\cdot\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}x^{-\frac{5}{6}}$$

$$=-\frac{1.1287}{2.6789}i\,x^{-\frac{5}{6}}=-0.42135\,i\,x^{-\frac{5}{6}}$$

$$\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_{\infty}^{x}(x-t)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d^1}{dt^1}t^{-\frac{1}{3}}\right)dt=-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x}(x-t)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{4}{3}}dt$$

この最後の積分は非初等関数で求まらない。そこで数式ソフトで数値積分して$x=1$における超微係数を求めると次のようになる。上の超微係数 $-0.42135\,i$ とぴったり一致していることが判る。

Riemann-Liouville differintegral

```
• a := -1/3: p := 1/2:
• df := diff(t^a,t)
```

$$-\frac{1}{3\cdot t^{\frac{4}{3}}}$$

```
• fl := x-> 1/gamma(ceil(p)-p)
        *int((x-t)^(ceil(p)-p-1)*df, t=infinity..x)
```

$$x\to\frac{1}{\Gamma(\lceil p\rceil-p)}\cdot\int_{\infty}^{x}(x-t)^{\lceil p\rceil-p-1}\cdot\mathrm{df}\,\mathrm{d}t$$

```
• float(fl(1))
```

$$-0.4213560763\cdot\mathrm{i}$$

12·3·2　ベキ関数の半微分

ベキ関数の超微分のうち、特に$p=1/2$のものを半微分と呼ぶ。

公式12·3·2

n を非負の整数、$-1!!\equiv 1,\ \ (2n-1)!!\equiv 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)$

$$0!!\equiv 1,\quad 2n!!\equiv 2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n$$

とするとき、次式が成立する。

(1)　基本式

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(n+1)(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{\{2(n+1)\}!!}\,x^n$$

（2） 線形式

$$\left\{(ax+b)^n\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,(ax+b)^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(n+1)(2n+1)!!}{\{2(n+1)\}!!}\sqrt{a\pi}\,(ax+b)^n$$

導出

公式12･3･1の線形式の上段 ($\alpha \geqq 0$)より

$$\left\{(ax+b)^n\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(1+n-\frac{1}{2}\right)}(ax+b)^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(1+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+n)}(ax+b)^n$$

n を非負の整数とするとき、

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad , \quad (2n)!! = 2^n\,n!$$

であるから、

$$\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(1+n-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n\,n!}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\Gamma\left(1+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+n)} = \frac{\Gamma\left\{(1+n)+\frac{1}{2}\right\}}{\Gamma(1+n)} = \frac{1}{n!}\,\frac{\{2(1+n)-1\}!!\sqrt{\pi}}{2^{1+n}}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(n+1)(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{\{2(n+1)\}!!}$$

これらを上式に代入して線形式を得、$a=1, b=0$ とおいて基本式を得る。

例1

$$\left(x^0\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{0!!}{(-1)!!\sqrt{\pi}}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{-\frac{1}{2}} \qquad \left(\equiv a_0 x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(x^1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2!!}{1!!\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\equiv a_1 x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(x^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4!!}{3!!\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\qquad=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\quad\left(\equiv a_2x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\left(x^3\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{6!!}{5!!\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\qquad=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\quad\left(\equiv a_3x^{\frac{5}{2}}\right)$$

例2

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1\cdot 1!!\sqrt{\pi}}{2!!}x^0\quad=\frac{\sqrt{\pi}}{2}x^0\qquad\left(=\frac{1}{a_1}x^0\right)$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\cdot 3!!\sqrt{\pi}}{4!!}x^1\quad=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}x^1\qquad\left(=\frac{2}{a_2}x^1\right)$$

$$\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3\cdot 5!!\sqrt{\pi}}{6!!}x^2\quad=\frac{15\sqrt{\pi}}{16}x^2\qquad\left(=\frac{3}{a_3}x^2\right)$$

$$\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4\cdot 7!!\sqrt{\pi}}{8!!}x^3\quad=\frac{35\sqrt{\pi}}{32}x^3\qquad\left(=\frac{4}{a_4}x^3\right)$$

12・3・3 整べキ関数の半微分(Fractional Derivative)

今度はRiemann−Liouville differintegralにより整べキ関数の半微分を求めてみる。

公式12・3・3

n を自然数とするとき次式が成立する。

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{2n+1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\cdot x^{n-\frac{1}{2}}$$

証明

n を自然数として $\alpha=n$, $p=1/2$ とすれば $\alpha>p$ であるから、公式12・3・1より

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{d^1}{dx^1}\int_0^x(x-t)^{-\frac{1}{2}}t^n\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt$$

となる。そして「岩波数学公式Ⅰ」p96 によると

$$\int\frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt=\frac{2\sqrt{x-t}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{2n-2r+1}$$

であるから

$$\int_0^x\frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt=\left[\frac{2\sqrt{x-t}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{2n-2r+1}\right]_0^x$$

$$= \frac{2}{(-1)^n} x^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{x^n}{2n-2r+1}$$

これを微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt = \frac{d}{dx}\left\{ \frac{2}{(-1)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{1}{2n-2r+1} x^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \frac{2}{(-1)^n}\left(n+\frac{1}{2}\right) \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{1}{2n-2r+1} x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$= (2n+1) \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{2n-2r+1} \binom{n}{r} \cdot x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \qquad \left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2n+1}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{2n-2r+1} \binom{n}{r} \cdot x^{n-\frac{1}{2}}$$

を得るが、さらに一工夫

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{2n-2r+1} \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{2(n-r)+1} \binom{n}{n-r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$$

と変形すれば

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2n+1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \cdot x^{n-\frac{1}{2}}$$

副産物

公式12•3•2 と公式12•3•3 を比べることによって次式を得る。

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

これは 7•3•3 における副産物と同じものである。

12•3•4 整ベキ関数の分数階微分 (Fractional Derivative)

公式12•3•3を一般化して整ベキ関数の分数階微分を求める。先ず次の Lemma を証明する。

Lemma

m , n を自然数とするとき次式が成立する。

$$\int (x-t)^{-\frac{1}{m}} t^n dt = \frac{m(x-t)^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} (-x)^r \binom{n}{r} \frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)} \qquad (4.0)$$

証明

$$F(t) = \frac{m(x-t)^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} (-x)^r \binom{n}{r} \frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)}$$

と置きこれを微分すれば

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\frac{m(x-t)^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)}$$

$$+\frac{m(x-t)^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)}$$

$$= -\frac{(m-1)(x-t)^{-\frac{1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)}$$

$$-\frac{m(x-t)^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}(n-r)(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r-1}}{m(n-r)+(m-1)}$$

$$= \frac{(x-t)^{-\frac{1}{m}}}{(-1)^{n}}\sum_{r=0}^{n}\{(m-1)+m(n-r)\}(-x)^r\binom{n}{r}\frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)}$$

$$= \frac{(x-t)^{-\frac{1}{m}}}{(-1)^{n}}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-x)^r(x-t)^{n-r} = \frac{(x-t)^{-\frac{1}{m}}}{(-1)^{n}}(-t)^n$$

$$= (x-t)^{-\frac{1}{m}}t^n$$

これを用いて次の公式が得られる。

公式12･3･4

n を自然数、m を2以上の自然数とするとき、次式が成立する。

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)} = -\frac{m(mn+m-1)}{\Gamma(-1/m)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{mk+(m-1)}\binom{n}{k}\cdot x^{n-\frac{1}{m}} \tag{4.1}$$

$$= \frac{mn+(m-1)}{\Gamma(1-1/m)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{mk+(m-1)}\binom{n}{k}\cdot x^{n-\frac{1}{m}} \tag{4.1'}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{mk+(m-1)}\binom{n}{k} = -\frac{B(1+n,\,-1/m)}{m(mn+m-1)} \qquad B(\ )\text{はベータ関数} \tag{4.2}$$

証明

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}x^{\alpha-p} = \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dx^k}\int_0^x (x-t)^{k-p-1}t^{\alpha}dt \qquad (\alpha \geqq p)$$

において $\alpha=n$, $p=1/m$ と置けば $k=\lceil 1/m \rceil=1$ であるから

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{\Gamma(1-1/m)}\frac{d^1}{dx^1}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{m}}t^n dt$$

$$= -\frac{m}{\Gamma(-1/m)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{m}} t^n\, dt$$

上記 Lemma を用いてこの定積分を計算すると

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{m}} t^n\, dt = \left[\frac{m(x-t)^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} (-x)^r \binom{n}{r} \frac{(x-t)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)} \right]_0^x$$

$$= \frac{m\, x^{\frac{m-1}{m}}}{(-1)^n} \sum_{r=0}^{n} (-x)^r \binom{n}{r} \frac{x^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)}$$

$$= m \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{m(n-r)+(m-1)} \binom{n}{r} \cdot x^{n-\frac{1}{m}+1}$$

さらに r, n は共に整数であるから

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r-n}}{m(n-r)+(m-1)} \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{m(n-r)+(m-1)} \binom{n}{n-r}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+(m-1)} \binom{n}{k}$$

と変形すれば

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{m}} t^n\, dt = m \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+(m-1)} \binom{n}{k} \cdot x^{n-\frac{1}{m}+1}$$

となり、これを1階微分すれば

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{m}} t^n\, dt = (mn+m-1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+(m-1)} \binom{n}{k} \cdot x^{n-\frac{1}{m}}$$

となるから結局

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)} = -\frac{m(mn+m-1)}{\Gamma(-1/m)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+(m-1)} \binom{n}{k} \cdot x^{n-\frac{1}{m}} \tag{4.1}$$

を得る。またこれより直ちに (4.1') が従う。

次に

$$\left(x^n\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-1/m)} x^{n-\frac{1}{m}} = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(-1/m)} \frac{\Gamma(-1/m)}{\Gamma(1+n-1/m)} x^{n-\frac{1}{m}}$$

この結果は(4.1)と等しくなければならないから

$$-m(mn+m-1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+(m-1)} \binom{n}{k} = \frac{\Gamma(1+n)\Gamma(-1/m)}{\Gamma(1+n-1/m)}$$

より

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+(m-1)} \binom{n}{k} = -\frac{B(1+n,\ -1/m)}{m(mn+m-1)} \tag{4.2}$$

Remark

(4.2) は (4.1) がベータ関数で表すことができ、従って n, m を実数化できることを示唆している。

実際、x^{α} の p 階超微分は次のように表すこともできる。即ち

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(-p)}\frac{\Gamma(-p)}{\Gamma(1+\alpha-p)} = \frac{B(1+\alpha,-p)}{\Gamma(-p)}$$

であるから

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}x^{\alpha-p} = \frac{B(1+\alpha,-p)}{\Gamma(-p)}x^{\alpha-p} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

となる。

12・3・5 整ベキ関数の超微分

公式12・3・4において $p=1/m$ と置けば次の公式が得られる。

公式12・3・5

n を自然数とするとき、$0<p\leqq n$ なる実数 p に対して次式が成立する。

$$\left(x^{n}\right)^{(p)} = \frac{n+1-p}{\Gamma(1-p)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1-p}\binom{n}{k}\cdot x^{n-p} \tag{5.1}$$

$$B(n,-p) = -\frac{n-p}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1-p}\binom{n-1}{k} \qquad B(\ )\text{はベータ関数} \tag{5.2}$$

例1

$$\left(x^{2}\right)^{(\sqrt{3})} = \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2-\sqrt{3})}x^{2-\sqrt{3}} = \frac{2}{\Gamma(3-\sqrt{3})}x^{2-\sqrt{3}} = 2.2151\,x^{2-\sqrt{3}}$$

$$\left(x^{2}\right)^{(\sqrt{3})} = \frac{3-\sqrt{3}}{\Gamma(1-\sqrt{3})}\left\{\frac{1}{1-\sqrt{3}}\binom{2}{0} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}\binom{2}{1} + \frac{1}{3-\sqrt{3}}\binom{2}{2}\right\}x^{2-\sqrt{3}}$$

$$= 2.2151\,x^{2-\sqrt{3}}$$

例2

$$B(2,-\sqrt{3}) = -\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{1-\sqrt{3}}\binom{1}{0} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}\binom{1}{1}\right\} = 0.788675\cdots$$

$$B(3,-e) = -\frac{3-e}{e}\left\{\frac{1}{1-e}\binom{2}{0} - \frac{1}{2-e}\binom{2}{1} + \frac{1}{3-e}\binom{2}{2}\right\} = -0.596137\cdots$$

12・3・6 正ベキ関数の超微分

公式12・3・5は二項式であるため、更なる一般化が可能である。

公式12・3・6

q を正数とするとき、$0<p\leqq q$ なる実数 p に対して次式が成立する。

$$\left(x^{q}\right)^{(p)} = \frac{q+1-p}{\Gamma(1-p)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+1-p}\binom{q}{r}\cdot x^{q-p} \tag{6.1}$$

$$B(q,-p) = -\frac{q-p}{p}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+1-p}\binom{q-1}{r} \qquad B(\ )\text{はベータ関数} \tag{6.2}$$

12・3・7 有理整関数の超微分

被微分関数が有理整関数 $f(x)=\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}x^{m-k}$ の場合、特段の事情がない限り、その超導関数の零点は次のようにするのがよい。（筆者の経験による。）

（1） $f(x)$ が $(ax+b)$ の多項式で表されるとき、$-b/a$ を零点とする。
（2） $f(x)$ が $(ax+b)$ の多項式で表されないとき、0を零点とする。

例えば、$f(x)=x^2-2\pi x+\pi^2$ の 1/2 階超微分をする場合は

$$\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left\{(x-\pi)^2\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}(x-\pi)^{\frac{3}{2}}$$

とするのが多くの場合正しい。

これを項別に超微分すると

$$\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(x^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-2\pi\left(x^1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}+\pi^2\left(x^0\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-4\pi x^{\frac{1}{2}}+\pi^2 x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

とすると、前者とは結果が異なってくる。

言うまでも無くこの原因は、

$$\int_{\pi}^{x}\sim\int_{\pi}^{x}\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)dx^{-\frac{1}{2}} \text{ と } \int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\left(x^2-2\pi x\right)dx^{-\frac{1}{2}}+\int_{\infty}^{x}\sim\int_{\infty}^{x}\pi^2 dx^{-\frac{1}{2}}$$

の違いである。即ち、前者が直系超微分されたのに対し後者は傍系超微分されたところにある。

傍系超微分すべき先験的f理由がある場合には後者が正しいが、そうでない場合は前者が正しい。

12･4　指数関数の超微分

9･2 の公式9･2･2の微分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。なお、Riemann-Liouville differintegral も併せて表示する。

公式12･4･1

$n=\lceil p\rceil$ を天井関数とするとき、次式が成立する。

(1)　基本式

$$\left(e^{\pm x}\right)^{(p)}=(\pm 1)^{-p}e^{\pm x}=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{\mp\infty}^{x}(x-t)^{n-p-1}e^{\pm t}dt$$

(2)　線型式

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(p)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}e^{ax+b}=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{\mp\infty}^{x}(x-t)^{n-p-1}e^{at+b}dt$$

$(a>0:- \ ,\ a<0:+)$

(3)　一般式

$$\left(\alpha^{ax+b}\right)^{(p)}=\left(\frac{1}{a\log\alpha}\right)^{-p}\alpha^{ax+b}=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{\mp\infty}^{x}(x-t)^{n-p-1}\alpha^{at+b}dt$$

$(a>0:- \ ,\ a<0:+)$

一般式の導出

$c=a\log\alpha\ ,\ d=b\log\alpha$ と置けば

$$e^{cx+d}=e^{xa\log\alpha+b\log\alpha}=e^{ax\log\alpha}e^{b\log\alpha}=\left(e^{\log\alpha}\right)^{ax}\left(e^{\log\alpha}\right)^{b}=\alpha^{ax}\alpha^{b}=\alpha^{ax+b}$$

である。よってこれを(2)線形式に適用することによって直ちに(3)一般式を得る。

例

$$\left(e^{-x}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=(-1)^{-\frac{1}{2}}e^{-x}=\frac{1}{i}e^{-x}=-ie^{-x}$$

$$\left(e^{3x-4}\right)^{(\sqrt{2})}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}e^{3x-4}=4.728804\,e^{3x-4}$$

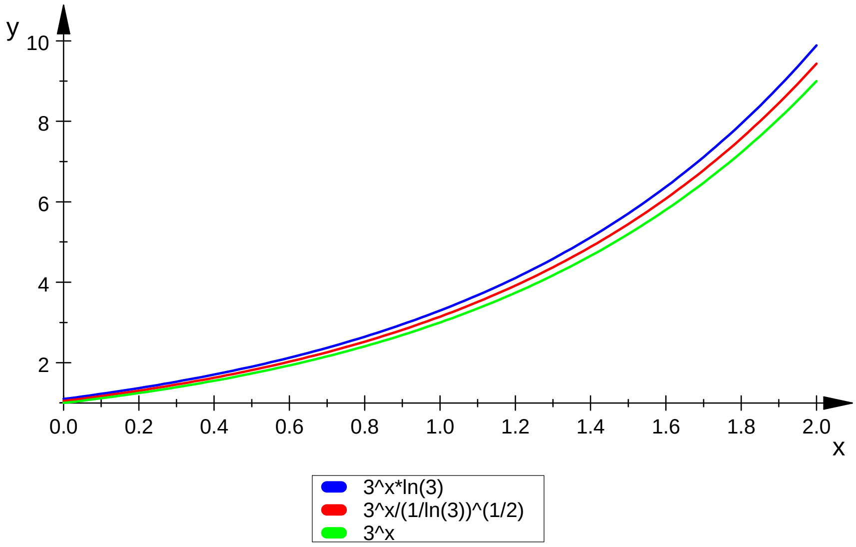
$$\left(2^{x}\right)^{(i)}=\left(\frac{1}{\log 2}\right)^{-i}2^{x}=(0.933582-0.358362\,i)\times 2^{x}$$

$$\left\{(-3)^{x}\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{\log(-3)}\right)^{-\frac{1}{2}}(-3)^{x}$$

$$=(1.487742+1.05582\,i)\times(-3)^{x}$$

$$\left(3^{x}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{\log 3}\right)^{-1/2}3^{x}=1.048147\times 3^{x}$$

$(3^x)^{(1)}$, $(3^x)^{(1/2)}$, 3^xを並べて図示すると次のとおりである。



12･5 対数関数の超微分

7･5 の公式7･5･1の積分演算子のインデックスの符号を反転することにより次の公式を得る。なお、Riemann-Liouville differintegral も併せて表示する。

公式12･5･1

$\Gamma(z), \psi(z), n=\lceil p \rceil$ をそれぞれガンマ関数、プサイ関数、天井関数とするとき、次式が成立する。

(1) 基本式

$$(\log x)^{(p)} = \frac{\log x - \psi(1-p) - \gamma}{\Gamma(1-p)} x^{-p} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-p-1} \log t \, dt$$

(2) 線型式

$$\{\log(ax+b)\}^{(p)} = \frac{\log(ax+b) - \psi(1-p) - \gamma}{\Gamma(1-p)} \left(x + \frac{b}{a}\right)^{-p}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\frac{b}{a}}^x (x-t)^{n-p-1} \log(at+b) dt$$

但し $p=1,2,3,\cdots$ のとき、$\dfrac{\psi(1-p)}{\Gamma(1-p)} = (-1)^p (p-1)!$

導出

7･5 の公式7･5･1は次のとおりであった。

$$\int_0^x \sim \int_0^x \log x \, dx^p = \frac{\log x - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} x^p$$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \sim \int_{-\frac{b}{a}}^x \log(ax+b) dx^p = \frac{\log(ax+b) - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} \left(x + \frac{b}{a}\right)^p$$

微分は積分の逆演算であるから、積分演算子のインデックス p を $-p$ に置き換えて上記公式を得る。そして「1 ガンマ関数とディガンマ関数」の公式1･3･1によれば

$$\frac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)} = (-1)^{n+1} n! \,, \qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

であったから、n を $p-1$ に置換すれば

$$\frac{\psi(1-p)}{\Gamma(1-p)} = (-1)^p (p-1)! \,, \qquad p=1,2,3,\cdots$$

例

$$(\log x)^{(1)} = \frac{\log x - \psi(1-1) - \gamma}{\Gamma(1-1)} x^{-1} = -(-1)^1 0! \, x^{-1} = x^{-1}$$

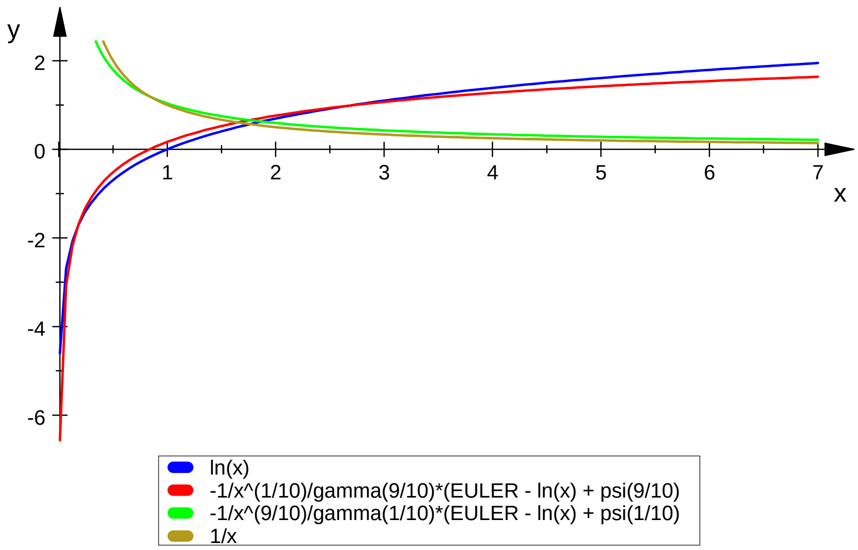
$$\{\log(3x+4)\}^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log(3x+4) - \psi\left(1-\frac{1}{2}\right) - \gamma}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \left(x + \frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 0.5641(\log x + 1.3862) / \sqrt{x+1.3333}$$

$$(\log x)^{\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\log x - \psi\left(1-\frac{1}{10}\right) - \gamma}{\Gamma\left(1-\frac{1}{10}\right)} x^{-\frac{1}{10}} = 0.9357 x^{-\frac{1}{10}}(\log x + 0.1777)$$

$$(\log x)^{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{\log x - \psi\left(1-\frac{9}{10}\right) - \gamma}{\Gamma\left(1-\frac{9}{10}\right)} x^{-\frac{9}{10}} = 0.1051\, x^{-\frac{9}{10}}(\log x + 9.8465)$$

$\log x$, $(\log x)^{(1/10)}$, $(\log x)^{(9/10)}$, $(\log x)^{(1)}$ を並べて図示すると次のとおりである。



12･6　三角関数の超微分

12･6･1　$\boldsymbol{\sin x, \cos x}$ の超微分

9･2 の公式9･2･4の微分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。

公式12･6･1

（1）　基本式

$$(\sin x)^{(p)} = \sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(p)} = \cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

（2）　線形式

$$\{\sin(ax+b)\}^{(p)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-p}\sin\left(ax+b+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\{\cos(ax+b)\}^{(p)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-p}\cos\left(ax+b+\frac{p\pi}{2}\right)$$

例

$$(\sin x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sin\left(x+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$((\sin x)^{\left(\frac{1}{2}\right)})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (\sin(x+\frac{\pi}{4}))^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{1}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\left\{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{(1)} = \left(\frac{1}{1}\right)^{-1}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{1\cdot\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$(\cos x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \cos\left(x+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(\cos x)^{\left(\frac{2}{\pi}\right)} = \cos\left(x+\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x+1)$$

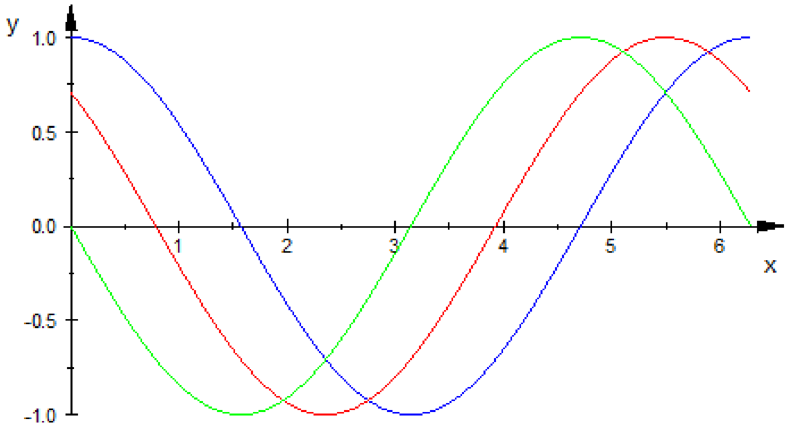
$\cos x$, $(\cos x)^{(1/2)}$,　$-\sin x$ を並べて図示すると次のとおりである。赤が 1/2 階微分である。超微分中最も解かり易いのが三角関数の超微分であることが図上でも明らかである。

cos x の直系超微分 (1/2階)

```
• cos1 := p-> cos(x+p*PI/2)
```

$$p \rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi\cdot p}{2}\right)$$

```
plotfunc2d(cos(x),cosl(1/2),-sin(x), x=0..2*PI)
```



12･6･2　$\boldsymbol{\sin x}$, $\boldsymbol{\cos x}$ の項別超微分

7･6･2 の $\sin x$, $\cos x$ の傍系超積分の演算子のインデックス p の符号を反転すれば次のような項別超微分が得られる。右辺に微分定数関数を含んでいることから判るように、これらは傍系超微分である。

$$(\sin x)^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p} = \sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) + C(p,x)$$

$$C(p,x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} \sin\frac{k\pi}{2}$$

$$(\cos x)^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+1-p)} x^{2k-p} = \cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) - C(p,x)$$

$$C(p,x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} \cos\frac{k\pi}{2}$$

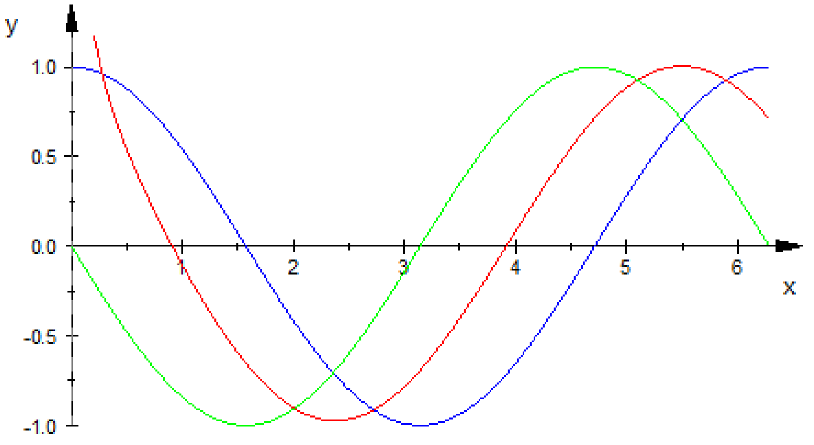
$\cos x$ の 1/2 階項別超微分を $\cos x$, $-\sin x$ と並べて図示すると次のとおりである。赤が 1/2 階項別超微分を示す。

cos x の傍系超微分 (1/2階)

```
cosc := p-> sum((-1)^k/gamma(2*k+1-p)*x^(2*k-p), k=0..50)
```

$$p \to \sum_{k=0}^{50} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2 \cdot k+1-p)} \cdot x^{2 \cdot k-p}$$

```
plotfunc2d(cos(x),cosc(1/2),-sin(x), x=0..2*PI)
```



この図を上の図と比べると、項別超微分は原点付近で不自然に曲がっている。$sin x$ についても同様であるから、これらの項別超微分は直系超微分の漸近展開と見られる。

12・7 双曲線関数の超微分

12・7・1 $\boldsymbol{sinh\,x}$, $\boldsymbol{cosh\,x}$ の超微分

9・2 の公式9・2・5の微分演算子のインデックスを $[1,n]$から $[0,p]$に解析接続して次の公式を得る。

公式12・7．1

(1) 基本式

$$(\sinh x)^{(p)} = i^{-p}\sinh\left(x+\frac{p\pi i}{2}\right) = \frac{e^x-(-1)^{-p}e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x)^{(p)} = i^{-p}\cosh\left(x+\frac{p\pi i}{2}\right) = \frac{e^x+(-1)^{-p}e^{-x}}{2}$$

(2) 線型式

$$\{\sinh(ax+b)\}^{(p)} = \left(\frac{i}{a}\right)^{-p}\sinh\left(ax+b+\frac{p\pi i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\left\{e^{ax+b}-(-1)^{-p}e^{-(ax+b)}\right\}$$

$$\{\cosh(ax+b)\}^{(p)} = \left(\frac{i}{a}\right)^{-p}\cosh\left(ax+b+\frac{p\pi i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\left\{e^{ax+b}+(-1)^{-p}e^{-(ax+b)}\right\}$$

例1

$$(\sinh x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = i^{-\frac{1}{2}}\sinh\left(x+\frac{1}{2}\frac{\pi i}{2}\right) = i^{-\frac{1}{2}}\sinh\left(x+\frac{\pi i}{4}\right)$$

$$\left((\sinh x)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(i^{-\frac{1}{2}}\sinh\left(x+\frac{\pi i}{4}\right)\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= i^{-\frac{1}{2}}i^{-\frac{1}{2}}\sinh\left(x+\frac{\pi i}{4}+\frac{1}{2}\frac{\pi i}{2}\right)$$

$$= i^{-1}\sinh\left(x+\frac{\pi i}{2}\right) = \cosh x$$

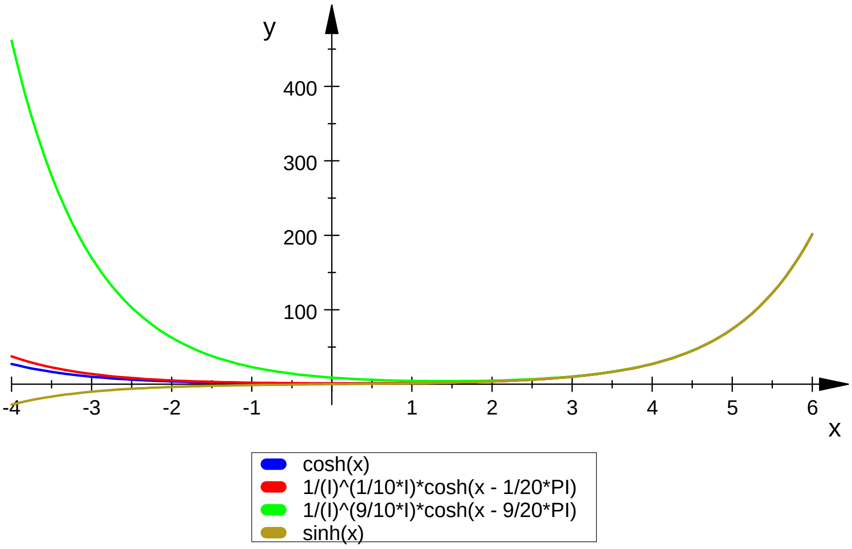
$$\left\{\cosh\left(x+\frac{\pi i}{2}\right)\right\}^{(1)} = \left(\frac{i}{1}\right)^{-1}\cosh\left(x+\frac{\pi i}{2}+\frac{1\cdot\pi i}{2}\right)$$

$$= -i\cosh(x+\pi i) = i\cosh x$$

$$(\cosh x)^{\left(\frac{i}{10}\right)} = i^{-\frac{i}{10}}\cosh\left(x-\frac{\pi}{20}\right) = 1.170088\times\cosh\left(x-\frac{\pi}{20}\right)$$

$$(\cosh x)^{\left(\frac{9i}{10}\right)} = i^{-\frac{9i}{10}}\cosh\left(x-\frac{9\pi}{20}\right) = 4.111207\times\cosh\left(x-\frac{9\pi}{20}\right)$$

超微分中最も解かり難いのが双曲線関数の超微分である。微分階数 p が整数または純虚数以外のときは超導関数が複素関数となるからである。そこで、それらの中で実領域に表示できる $\cosh x$, $(\cosh x)^{(i/10)}$, $(\cosh x)^{(9i/10)}$, $\sinh x$ を並べて図示すると次のとおりである。



正領域では4本の曲線が全て重なっている。負領域では $(\cosh x)^{(i/10)}$ が $\cosh x$ に近いのは当然と思えるが、$(\cosh x)^{(9i/10)}$ は何故か $\sinh x$ と大きくかけ離れている。

例2

$$(\sinh x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^x - (-1)^{-\frac{1}{2}} e^{-x}}{2} = \frac{e^x + i\,e^{-x}}{2}$$

$$\left((\sinh x)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{e^x + i\,e^{-x}}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^x}{2} + \frac{i}{2} \times \left(e^{-x}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^x}{2} + \frac{i}{2}\left(-i\,e^{-x}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\left\{\cosh\left(x + \frac{\pi i}{2}\right)\right\}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)^{-1}\left\{e^{x+\frac{\pi i}{2}} + (-1)^{-1} e^{-\left(x+\frac{\pi i}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi i}{2}} e^x - e^{-\frac{\pi i}{2}} e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(i\,e^x - \frac{1}{i} e^{-x}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = i\cosh x$$

$$(\sinh x)^{\left(\frac{i}{\pi}\right)} = \frac{e^x - (-1)^{-\frac{i}{\pi}} e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \left(e^{\pi i}\right)^{-\frac{i}{\pi}} e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{1-x}}{2}$$

12･7･2　*sinhx*, *coshx* の項別超微分

7･7･2 の *sinhx* , *coshx* の項別超積分の演算子のインデックス p の符号を反転すれば次のような項別超微分が得られる。右辺に積分定数導関数を含んでいることから判るように、**これらは傍系超微分である。**

$$(\sinh x)^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1-p}}{\Gamma(2k+2-p)} = i^{-p} \sinh\left(x+\frac{p\pi i}{2}\right) - C(p,x)$$

$$C(p,x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} \sinh\frac{k\pi i}{2}$$

$$(\cosh x)^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k-p}}{\Gamma(2k+1-p)} = i^{-p} cohs\left(x+\frac{p\pi i}{2}\right) - C(p,x)$$

$$C(p,x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} \cosh\frac{k\pi i}{2}$$

coshx の直系と傍系の1.7階微分の x=1, x=6 における値をそれぞれ計算すると次のようになる。

cosh x の直系超微分

```
• coshl := p-> I^-p*cosh(x+p*PI/2*I)
```

$$p \to \frac{1}{i^{p}} \cdot \cosh\left(x + i \cdot \frac{\pi \cdot p}{2}\right)$$

cosh x の傍系超微分

```
• coshc := p-> sum(x^(2*k-p)/gamma(2*k+1-p), k=0..50)
```

$$p \to \sum_{k=0}^{50} \frac{x^{2 \cdot k - p}}{\Gamma(2 \cdot k + 1 - p)}$$

x = 1

```
• float(subs(coshl(1.7), x=1)), float(subs(coshc(1.7), x=1))
```

$1.467257969 + 0.1488103599 \cdot i$,　　1.279969476

x = 6

```
• float(subs(coshl(1.7), x=6)), float(subs(coshc(1.7), x=6))
```

$201.7151252 + 0.001002676318 \cdot i$,　　201.7170572

x が小さいところでは両者の差は大きいが x が大きいところでは両者は殆ど一致している。*sinhx* についても同様であるから、これらの項別超微分は直系超微分の漸近展開と見られる。

12·8 逆三角関数の超微分

12·8·1 $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ の超微分

7·8 の公式7·8·1の積分演算子のインデックス p の符号を反転して次の公式を得る。

公式12·8·1

$\Gamma(x)$, $\psi(x)$ をそれぞれガンマ関数、ディ・ガンマ関数とするとき、$|x| \geqq 1$ に対して次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
\left(\tan^{-1}x\right)^{(p)} =& \frac{\tan^{-1}x}{\Gamma(1-p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-p}{-p-2k} x^{-p-2k} \\
&+ \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2\Gamma(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-p}{-p+1-2k} x^{-p+1-2k} \\
&- \frac{1}{\Gamma(1-p)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{-p}{-p+1-2r} \{\psi(1-p)-\psi(2r)\} x^{-p+1-2r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\cot^{-1}x\right)^{(p)} =& \frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} \cot^{-1}x - \frac{\tan^{-1}x}{\Gamma(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-p}{-p-2k} x^{-p-2k} \\
&- \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2\Gamma(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-p}{-p+1-2k} x^{-p+1-2k} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-p)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{-p}{-p+1-2r} \{\psi(1-p)-\psi(2r)\} x^{-p+1-2r}
\end{aligned}
$$

例 $\cot^{-1}x$ の 1/2 階微分

```
p:=1/2: m:=110:
```

arccot の超微分

```
f := x-> arccot(x)/(gamma(1-p)*x^p)
         - arctan(x)/gamma(1-p)*sum((-1)^k*binomial(-p,-p-2*k)*x^
                                                           p-2*k),k=1..m)
         - ln(1+x^2)/(2*gamma(1-p))*sum((-1)^k*binomial(-p,-p+1-
                                                2*k)*x^(-p+1-2*k), k=1..m)
         + 1/gamma(1-p)*sum((-1)^r*binomial(-p,-p+1-2*r)*(psi(1-p
                                        psi(2*r))*x^(-p+1-2*r), r=1..m)
```

$$
\begin{aligned}
x \rightarrow & \frac{\operatorname{arccot}(x)}{\Gamma(1-p)\cdot x^p} - \frac{\arctan(x)}{\Gamma(1-p)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \cdot \binom{-p}{-p-2\cdot k} \cdot x^{-p-2\cdot k}\right) \\
& - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2\cdot\Gamma(1-p)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \cdot \binom{-p}{1-p-2\cdot k} \cdot x^{1-p-2\cdot k}\right) \\
& + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \cdot \left(\sum_{r=1}^{m} (-1)^r \cdot \binom{-p}{1-p-2\cdot r} \cdot (\operatorname{psi}(1-p)-\operatorname{psi}(2\cdot r)) \cdot x^{1-p-2\cdot r}\right)
\end{aligned}
$$

```
float(f(1.1))
```

0.07073996634

Riemann-Liouville differintegral

- `g := x-> 1/gamma(1-p)*int((x-t)^(1-p-1)*arccot(t), t=0..x)`

$$x \to \frac{1}{\Gamma(1-p)} \cdot \int_0^x (x-t)^{1-p-1} \cdot \operatorname{arccot}(t) \, \mathrm{d}\, t$$

- `h := 10^-11:`
- `float((g(1.1+h)-g(1.1))/h)`

0.07073997706

2010.07.07 本節追加

K. Kono

宇宙人の数学