13　項別超微分

本章では、2階以上の高階導関数を簡単な一般式で表すことが困難な関数について、これらを級数に展開した上 項別に超微分するものである。従って「12 超微分」で扱った e^x, $log\,x$, $sin\,x$, $cos\,x$, $sinh\,x$, $cosh\,x$ の各関数は本章では扱わない。

13･1　三角関数、双曲線関数の項別超微分

公式13･1･1

ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

$$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30, \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$$

とし、$\Gamma(x)$ をガンマ関数、$\uparrow, \downarrow$ をそれぞれ天井関数、床関数とするとき、非負数 p と $0< x< \pi/2$ について次式が成立する。

$$(tan\,x)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,\Gamma(2k-p)} x^{2k-p-1}$$

$$(tanh\,x)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,\Gamma(2k-p)} x^{2k-p-1}$$

$$(sec\,x)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p+1}{2}\downarrow}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{\Gamma(2k-p+1)} x^{2k-p}$$ ：傍系超微分

$$(sech\,x)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p+1}{2}\downarrow}^{\infty} \frac{E_{2k}}{\Gamma(2k-p+1)} x^{2k-p}$$ ：傍系超微分

導出

「10 項別高階微分(三角関数、双曲線関数)」の

公式10･1･1　$$(tan\,x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k-n-1)!} x^{2k-n-1}$$

公式10･2･1　$$(tanh\,x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-n-1)!} x^{2k-n-1}$$

公式10･7･1　$$(sec\,x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k-n)!} x^{2k-n}$$

公式10･8･1　$$(sech\,x)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k-n)!} x^{2k-n}$$

において、$m!$ をガンマ関数 $\Gamma(1+m)$ に置換し、微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。$sec^{-1}x$, $sech^{-1}x$ についでは、これらの項別超積分が傍系であった

ことから、これらの超微分も傍系となる。(本章において以下同じ。)

例1　*tan x* の 3／4 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点 x=0.4 における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。また、図中において青は *tan x* 、赤は 3／4 階微分、緑は1 階微分を示す。

tan x の項別超微分(級数)

```
• tanp := (p,x)-> sum(2^(2*k)*(2^(2*k)-1)*abs(bernoulli(2*k))/((2*k
                   *gamma(2*k-p))*x^(2*k-1-p),k=ceil((p+1)/2)..200
```

$$(p,\ x) \rightarrow \sum_{k=\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil}^{200} \frac{2^{2\cdot k}\cdot\left(2^{2\cdot k}-1\right)\cdot\left|\mathrm{bernoulli}(2\cdot k)\right|}{(2\cdot k)\cdot\Gamma(2\cdot k-p)}\cdot x^{2\cdot k-1-p}$$

Riemann-Liouville differintegral

```
• p:=3/4: h := 10^-10:
• f := x-> 1/gamma(1-p)*int((x-t)^(1-p-1)*tan(t), t=0..x)
```

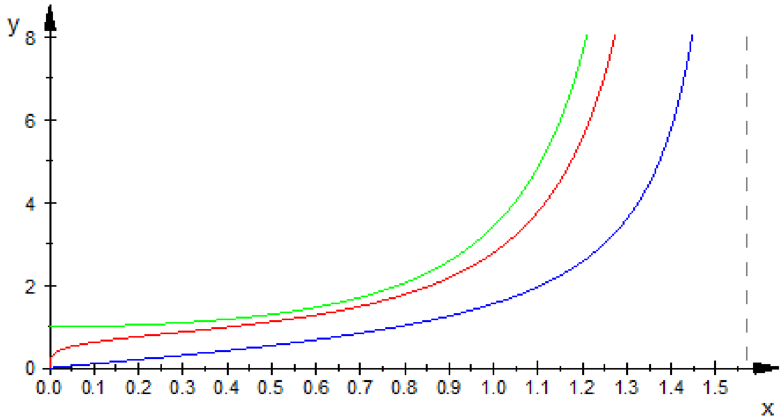
$$x \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-p)}\cdot\int_0^x (x-t)^{1-p-1}\cdot\tan(t)\,\mathrm{d}t$$

```
• float(tanp(3/4,0.4))
```

0.987302844

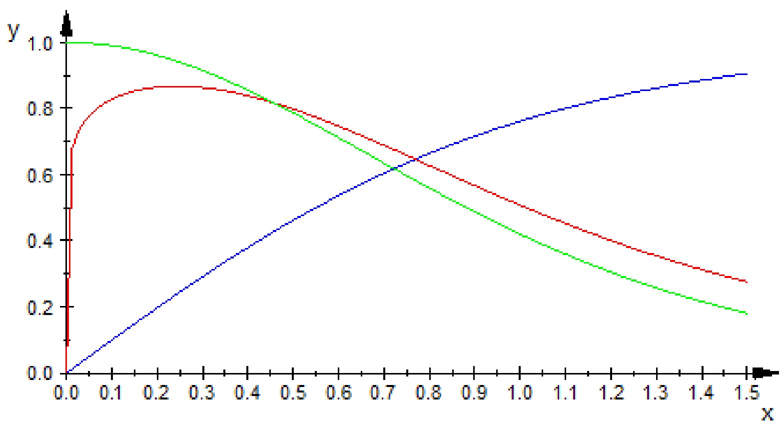
```
• float((f(0.4+h)-f(0.4))/h)
```

0.9873028437



例2　*tanh x* の 9／10 階微分

図のみ示す。青は *tanh x* 、赤は 9／10 階微分、緑は1階微分を示す。



例3　*sec x* の 1／2 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点 x=0.3 における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。また、図中において青は $\sec x$ 、赤は 1／2 階微分、緑は1 階微分を示す。

Termwize derivative of sec x

```
m = 200 ;
```

$$\text{secp}[p\_, x\_] := \sum_{k=\text{Floor}\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{m} \frac{\text{Abs}[\text{EulerE}[2k]]}{\text{Gamma}[2k-p+1]} x^{2k-p}$$

Riemann-Liouville differintegral

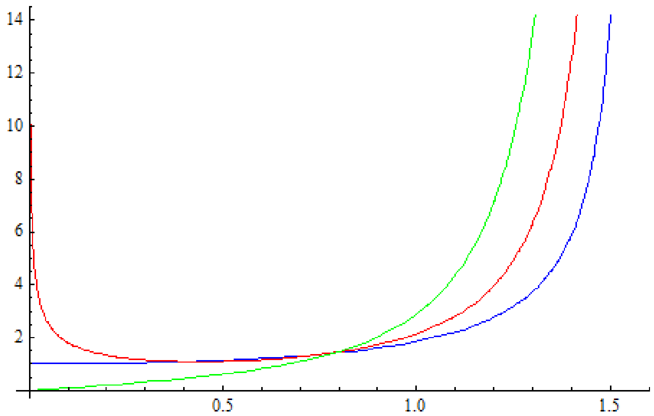
$$p = 1/2;\ h = 10^{-6};$$

$$f[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]} \int_0^x (x-t)^{1-p-1} \text{Sec}[t]\, dt$$

$$\text{Rld} = \frac{f[0.3+h] - f[0.3]}{h};$$

```
N[secp[1/2, 0.3]]
1.16032
```

```
N[Rld]
1.16033
```



公式13･1･2

ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

B_0=1, B_2=1/6, B_4=-1/30, B_6=1/42, B_8=-1/30, …

E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, …

とし、$\Gamma(x)$ をガンマ関数、↑,↓をそれぞれ天井関数、床関数とするとき、非負数 p と $\pi/2 < x < \pi$ について次式が成立する。

$$(\cot x)^{(p)} = -\sum_{k=\frac{p+1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,\Gamma(2k-p)} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-p-1}$$

$$(\csc x)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p+1}{2}\downarrow}^{\infty} \frac{\left|E_{2k}\right|}{\Gamma(2k-p+1)} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-p}$$

：傍系超微分

導出

「10 項別高階微分(三角関数、双曲線関数)」の

公式10･3･1’ $$(\cot x)^{(n)} = -\sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-n-1}$$

公式10･5･1’ $$(\csc x)^{(n)} = \sum_{k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k-n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-n}$$

において $m!$ をガンマ関数 $\Gamma(1+m)$ に置換し、微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

例1　*cot x* の 3／4 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点 $x=1.7$ における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。また、図中において青は *cot x* 、赤は 3／4 階微分、緑は1 階微分を示す。

cot x の項別超微分

```
• cotp := (p,x)-> -sum(2^(2*k)*(2^(2*k)-1)*abs(bernoulli(2*k))/((2*
                        *gamma(2*k-p))*(x-PI/2)^(2*k-1-
    p),k=ceil((p+1)/2)..200)
```

$$(p, x) \rightarrow -\left(\sum_{k=\lceil\frac{p+1}{2}\rceil}^{200} \frac{2^{2\cdot k}\cdot\left(2^{2\cdot k}-1\right)\cdot|\mathrm{bernoulli}(2\cdot k)|}{(2\cdot k)\cdot\Gamma(2\cdot k-p)}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2\cdot k-1-p}\right)$$

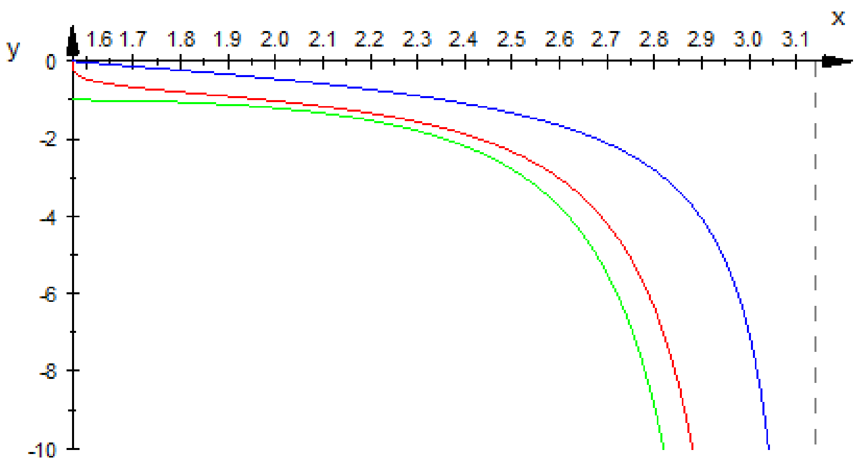
Riemann-Liouville differintegral

```
• p:=3/4: h := 10^-11:
• f := x-> 1/gamma(1-p)*int((x-t)^(1-p-1)*cot(t), t=PI/2..x)
```

$$x \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-p)}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(x-t)^{1-p-1}\cdot\cot(t)\,\mathrm{d}t$$

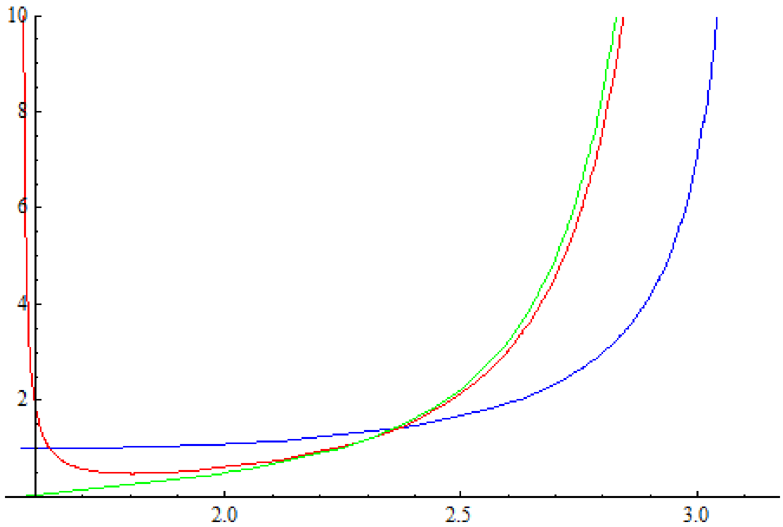
```
• float(cotp(3/4,1.7)), float((f(1.7+h)-f(1.7))/h)
```

$-0.6693795932,\quad -0.6693795901$



例2　**$\csc x$** の 14／15 階微分

図のみ示す。青は $\csc x$ 、赤は 14／15 階微分、緑は1階微分を示す。



$\mathrm{csch}\,x$ と $\mathrm{sech}\,x$ については次なる直系項別超微分が成立する。

公式13･1･3

$p \geqq 0$, $x>0$ について次式が成立する。

$$(\mathrm{csch}\,x)^{(p)} = (-1)^{-p} 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^p}{e^{(2k+1)x}}$$

$$(\mathrm{sech}\,x)^{(p)} = (-1)^{-p} 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)^p}{e^{(2k+1)x}}$$

導出

「8 項別超積分」の公式8･1･3 は次のようであった。

$$\int_{\infty}^{x} \sim \int_{\infty}^{x} \mathrm{csch}\,x\, dx^p = (-1)^p 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^p}$$

$$\int_{\infty}^{x} \sim \int_{\infty}^{x} \mathrm{sech}\,x\, dx^p = (-1)^p 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^p}$$

微分は積分の逆演算であるから、これらの演算子のパラメータの符号を反転して与式を得る。

例　**$\mathrm{csch}\,x$** の 7／9 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点 x=3.8 における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。

Termwize derivative of csch x

```
m = 100;
```

$$\mathtt{cschp[p\_,\ x\_]\ :=\ 2\ (-1)^{-p}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(2\,k+1)^{p}}{e^{(2\,k+1)\,x}}$$

Riemann-Liouville differintegral

```
p = 7 / 9;  h = 10^-6;
```

$$f[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]} \int_{\infty}^{x} (x-t)^{1-p-1} \,\text{Csch}[t]\, dt \qquad \text{R1d} = \frac{f[3.8+h]-f[3.8]}{h};$$

```
N[cschp[7 / 9, 3.8]]              N[R1d]
-0.0343144 - 0.0287932 i          -0.0343029  - 0.0287835  i
```

13・2 逆三角関数の項別超微分

公式13・2・1

$\Gamma(x)$ をガンマ関数、$\uparrow$ を天井関数とするとき、非負数 p と $0<x<1$ に対して次式が成立する。

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(p)} = \sum_{k=\left\lceil\frac{p-1}{2}\right\rceil}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(p)} = \frac{\pi}{2}\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} - \sum_{k=\left\lceil\frac{p-1}{2}\right\rceil}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(p)} = \sum_{k=\left\lceil\frac{p-1}{2}\right\rceil}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$ ：傍系超微分

$$\left(\cos^{-1}x\right)^{(p)} = \frac{\pi}{2}\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} - \sum_{k=\left\lceil\frac{p-1}{2}\right\rceil}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$ ：傍系超微分

導出

「11・1 逆三角関数の項別高階微分」の

公式11・1・1 $$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1-n)!} x^{2k+1-n}$$

公式11・1・2 $$\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1-n)!} x^{2k+1-n}$$

において $m!$ をガンマ関数 $\Gamma(1+m)$ に置換し、微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続して $\left(\tan^{-1}x\right)^{(p)}$, $\left(\sin^{-1}x\right)^{(p)}$ を得る。次に、

$$\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}x^0 - \tan^{-1}x$$

であるから、

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(p)} = \frac{\pi}{2}\left(x^0\right)^{(p)} - \left(\tan^{-1}x\right)^{(p)}$$

これに

$$\left(x^0\right)^{(p)} = \frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} \quad , \quad \left(\tan^{-1}x\right)^{(p)} = \sum_{k=\left\lceil\frac{p-1}{2}\right\rceil}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$

を代入して $\left(\cot^{-1}x\right)^{(p)}$ を得る。$\left(\cos^{-1}x\right)^{(p)}$ も同様にして得る。

Note

$p=1,2,3,\cdots$ のとき、$\Gamma(1-p)=\Gamma(0),\Gamma(-1),\Gamma(-2),\cdots$ $i.e.$ $\Gamma(1-p)=\pm\infty$ であるから

$$\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} = 0 \quad for \ p=1,2,3,\cdots$$

よってpをnに置き換えれば$\left(\cot^{-1}x\right)^{(p)}$, $\left(\cos^{-1}x\right)^{(p)}$は 11･1 の次の公式に帰着する。

公式11･1･1 $$\left(\cot^{-1}x\right)^{(n)} = -\sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1-n)!} x^{2k+1-n}$$

公式11･1･2 $$\left(\cos^{-1}x\right)^{(n)} = -\sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1-n)!} x^{2k+1-n}$$

例1 $\tan^{-1}x$ の 9／10 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点$x=0.1$における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。また、図中において青は$\tan^{-1}x$、赤は 9/11 階微分、緑は1 階微分を示す。

Termwize derivative of arctan x

m = 200 ;

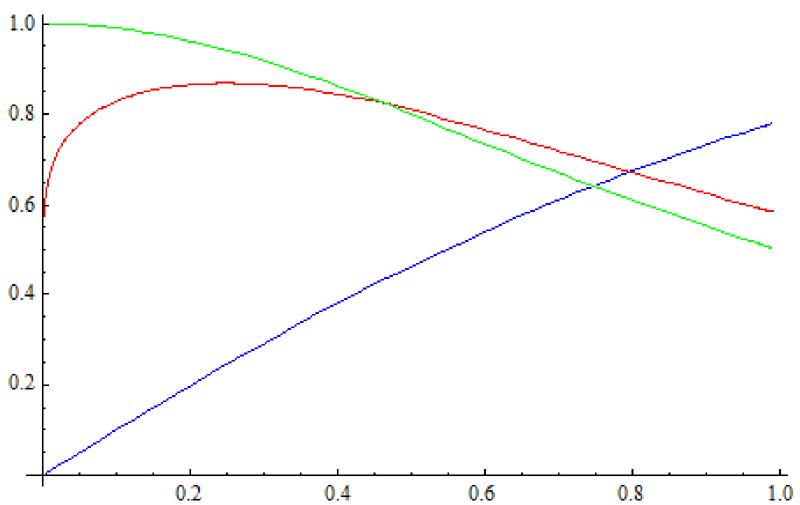
$$\text{arctanp}[p\_,\ x\_] := \sum_{k=\text{Ceiling}\left[\frac{p-1}{2}\right]}^{m} (-1)^k \frac{(2\,k)\,!}{\text{Gamma}[2\,k+2-p]} x^{2\,k+1-p}$$

Riemann-Liouville differintegral

p = 9 / 10; h = 10^{-6};

$$\text{f}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]} \int_0^x (x-t)^{1-p-1}\,\text{ArcTan}[t]\,dt \qquad \text{Rld} = \frac{\text{f}[0.1+h]-\text{f}[0.1]}{h};$$

N[arctanp [9 / 10 , 0.1]]	N[Rld]
0.827786	0.827787



例2 $\cot^{-1}x$ の 1／2 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点$x=0.05$における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。

Termwize derivative of arccot x

```
m = 200;
```

$$\text{arccotp}[p\_, x\_] := \frac{\pi}{2}\,\frac{x^{-p}}{\text{Gamma}[1-p]} - \sum_{k=\text{Ceiling}\left[\frac{p-1}{2}\right]}^{n} (-1)^{k}\,\frac{(2\,k)\,!}{\text{Gamma}[2\,k+2-p]}\,x^{2\,k+1-p}$$

Riemann-Liouville differintegral

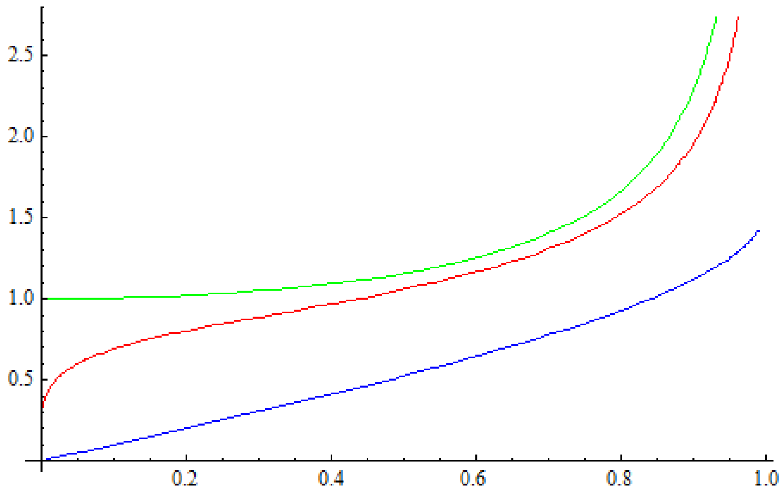
$$p = 1/2;\ h = 10^{-6};$$

$$f[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]} \int_{0}^{x} (x-t)^{1-p-1}\,\text{ArcCot}[t]\,dt \qquad \text{Rld} = \frac{f[0.05+h]-f[0.05]}{h};$$

```
N[arccotp [1 / 2, 0.05 ]]          N[Rld ]
3.71135                            3.71133
```

例3　$\sin^{-1} x$ の 4／5 階微分

図のみ示す。青は $\sin^{-1}x$ 、赤は 4／5 階微分、緑は1階微分を示す。



例4　$\cos^{-1} x$ の 項別 1 階微分

$p=1$ のとき、$\Gamma(1-p)=\Gamma(0)=\infty$ であるから $\dfrac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} = 0$。 よって公式より

$$\left(\cos^{-1}x\right)^{(1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^{2}}{\Gamma(2k+1)}x^{2k} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

実際、$|x|<1$ においてこの級数は右辺に収束する。

13・3 逆双曲線関数の項別超微分

公式13・3・1

$\Gamma(x), \psi(x), \uparrow, \gamma$ をそれぞれガンマ関数、ディ・ガンマ関数、天井関数、オイラー・マスケロニの定数 (= 0.57722566...) とするとき、$p \geqq 0$ と $0< x < 1$ に対して次式が成立する。

$$\left(tanh^{-1}x\right)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$

$$\left(sinh^{-1}x\right)^{(p)} = \sum_{k=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty} (-1)^k \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p}$$ ：傍系

$$\left(sech^{-1}x\right)^{(p)} = \frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} \left\{ log\frac{2}{x} + \psi(1-p) + \gamma \right\} - \sum_{k=\frac{p}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\Gamma(2k-p+1)} x^{2k-p}$$ ：傍系

$$\left(csch^{-1}x\right)^{(p)} = \frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} \left\{ log\frac{2}{x} + \psi(1-p) + \gamma \right\} - \sum_{k=\frac{p}{2}\uparrow}^{\infty} (-1)^k \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\Gamma(2k-p+1)} x^{2k-p}$$ ：傍系

導出

「11・2 逆双曲線関数の項別高階微分」の

公式11・2・1t $\quad \left(tanh^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1-n)!} x^{2k+1-n}$

公式11・2・2s $\quad \left(sinh^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty} (-1)^k \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1-n)!} x^{2k+1-n}$

において $m!$ をガンマ関数 $\Gamma(1+m)$ に置換し、微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続して $\left(tanh^{-1}x\right)^{(p)}$, $\left(sinh^{-1}x\right)^{(p)}$ を得る。

次に、$sech^{-1}x$ は $0< x<1$ について次のようにテイラー展開される。

$$sech^{-1}x = log\,2\cdot x^0 - log\,x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k)!} x^{2k}$$

この両辺を n 回微分すると

$$\left(sech^{-1}x\right)^{(n)} = log\,2\cdot\left(x^0\right)^{(n)} - (log\,x)^{(n)} - \sum_{k=\frac{n}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k-n)!} x^{2k-n}$$

これに

$$\left(x^0\right)^{(n)} = \frac{x^{-n}}{\Gamma(1-n)} \quad , \quad (log\,x)^{(n)} = \frac{log\,x - \psi(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} x^{-n}$$

を代入すれば

$$\left(sech^{-1}x\right)^{(n)} = \frac{x^{-n}}{\Gamma(1-n)} \left\{ log\frac{2}{x} + \psi(1-n) + \gamma \right\} - \sum_{k=\frac{n}{2}\uparrow}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k-n)!} x^{2k-n}$$

n を p に置換して $\left(sech^{-1}x\right)^{(p)}$ を得る。$\left(csch^{-1}x\right)^{(p)}$ も同様にして得られる。

Note

証明中の $\left(sech^{-1}x\right)^{(n)}$ に、1・3 の特異点公式

$$\frac{\psi(1-n)}{\Gamma(1-n)} = (-1)^n(n-1)! \qquad n=1,2,3,\cdots$$

を代入すれば、11・2 の公式11・2・3

$$\left(sech^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n} - \sum_{k=\frac{n}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k(2k-n)!}x^{2k-n}$$

に帰着する。

例1　$tanh^{-1}x$ の 3／4 階微分

公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点 $x=0.2$ における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。また、図中において青は $tanh^{-1}x$ 、赤は 3/4 階微分、緑は1 階微分を示す。

Termwize derivative of arctanh x

```
m = 200 ;
```

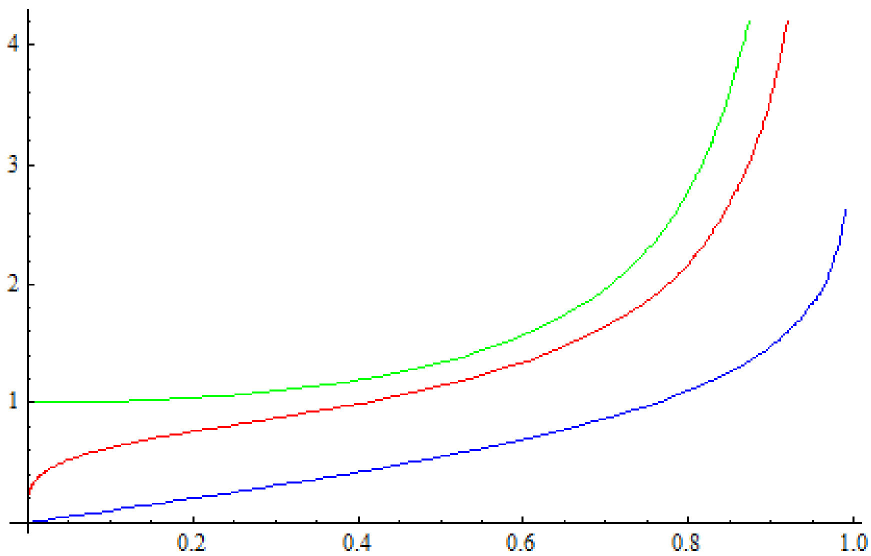
$$\text{atanhp}[p\_,x\_] := \sum_{k=\text{Ceiling}\left[\frac{p-1}{2}\right]}^{m}\frac{(2k)!}{\text{Gamma}[2k+2-p]}x^{2k+1-p}$$

Riemann-Liouville differintegral

$$p = 3/4;\ h = 10^{-6};$$

$$f[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]}\int_0^x (x-t)^{1-p-1}\,\text{ArcTanh}[t]\,dt \qquad \text{Rld} = \frac{f[0.2+h]-f[0.2]}{h};$$

```
N[atanhp [3 / 4, 0.2 ]]      N[Rld ]
0.759539                     0.75954  + 0. i
```



例2　$sinh^{-1}x$ の 3／2 階微分

Riemann-Liouville differintegral の積分と微分の演算順序を入れ替えた式は次のとおり。

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^x (x-t)^{n-p-1}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\}dt \qquad n=\lceil p\rceil$$

公式とこの式とにより、任意の1点 $x=0.3$ における超微係数を計算した。両者は一致した。

Termwize derivative of arcsinh x

```
m = 200 ;
```

$$\text{asinhp}[p\_, x\_] := \sum_{k=\text{Ceiling}\left[\frac{p-1}{2}\right]}^{m} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{\text{Gamma}[2k+2-p]} x^{2k+1-p}$$

Riemann-Liouville differintegral

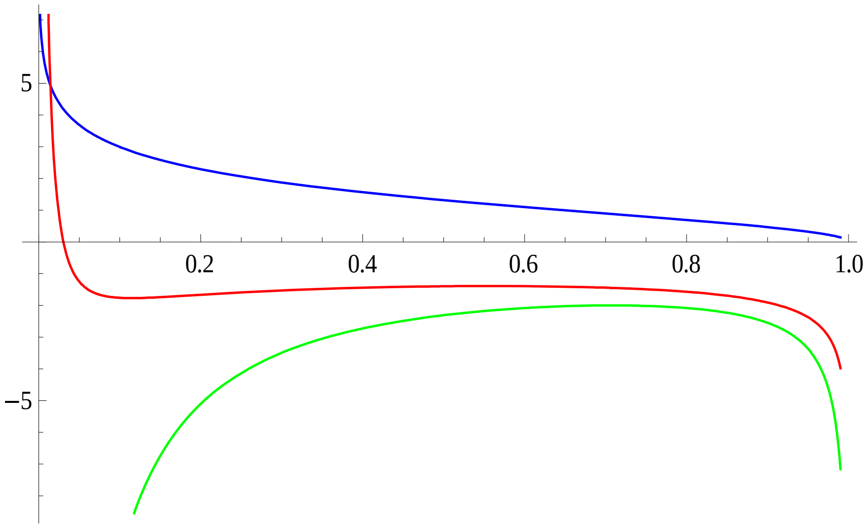
$$p = 3/2;\ d2 = \partial_t(\partial_t \text{ArcSinh}[t]);$$

$$\text{RLd}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[2-p]}\int_0^x (x-t)^{2-p-1}\, d2\, dt$$

```
N[asinhp [3 / 2, 0.3]]      N[RLd [0.3]]
-0.113119                   -0.113119
```

例3　$sech^{-1}x$ の 6／7 階微分

図のみ示す。青は $sech^{-1}x$、赤は 6／7 階微分、緑は1階微分を示す。



2006.11.22
2012.07.22 Renewal

K. Kono

宇宙人の数学