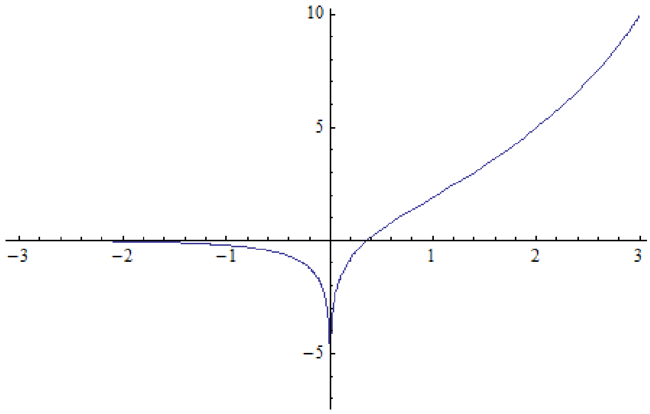
14　対数積分等の高階積分と超微積分

14･1　指数積分の高階積分

指数積分は次のような関数である。

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt \tag{1.0}$$



(1.0) を ONLINE INTEGRATOR (Wolfram Mathematica) で逐次積分しこれを整理すると次の高階不定積分を得る。

$$\int Ei(x)dx = \frac{1}{1!}\{xEi(x) - e^x 0!\}$$

$$\iint Ei(x)dx^2 = \frac{1}{2!}\{x^2 Ei(x) - e^x (0!x + 1!)\}$$

$$\iiint Ei(x)dx^3 = \frac{1}{3!}\{x^3 Ei(x) - e^x (0!x^2 + 1!x + 2!)\}$$

$$\vdots$$

$$\int\cdots\int Ei(x)dx^n = \frac{1}{n!}\left\{x^n Ei(x) - e^x \sum_{r=0}^{n-1} r!\, x^{n-1-r}\right\}$$

これらの右辺は $Ei(x)$ の直系原始関数であるが、$Ei(x)$, e^x の零点は共に $-\infty$ であるから右辺の零点は全て $-\infty$ である。よって $Ei(x)$ の直系原始関数は固定下限 $-\infty$ の高階定積分で表すことができる。

公式14･1･1

指数積分を $Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$ とするとき、次式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} Ei(x)dx^n = \frac{1}{n!}\left\{x^n Ei(x) - e^x \sum_{r=0}^{n-1} r!\, x^{n-1-r}\right\} \tag{1.n}$$

例　$Ei(x)$ の3階積分

```
f1[x_] := ∫_{-∞}^{x} (∫_{-∞}^{x} (∫_{-∞}^{x} ExpIntegralEi[x] dx) dx) dx
```

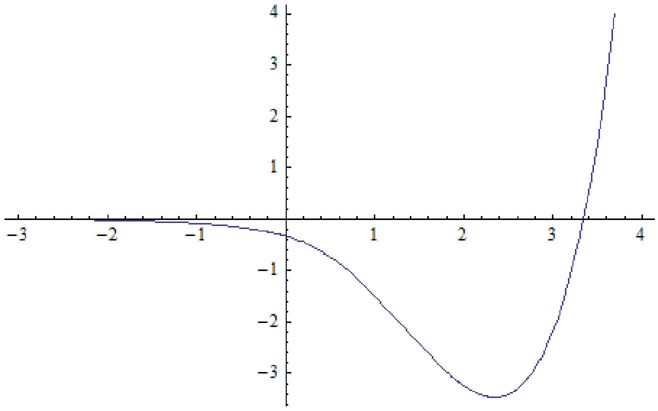
$$\text{fr}[n\_, x\_] := \frac{1}{n!}\left(x^n\,\text{ExpIntegralEi}[x] - e^x \sum_{r=0}^{n-1} r!\, x^{n-1-r}\right)$$

fl[x]

$$\frac{1}{6}\left(-e^x\left(2+x+x^2\right)+x^3\,\text{ExpIntegralEi}[x]\right)$$

fr[3, x]

$$\frac{1}{6}\left(-e^x\left(2+x+x^2\right)+x^3\,\text{ExpIntegralEi}[x]\right)$$



14·2 余弦積分の高階積分

余弦積分

$$Ci(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{\cos t}{t}dt$$

を ONLINE INTEGRATOR で逐次積分しこれを整理すると次の高階不定積分を得る。

$$\int Ci(x)dx = \frac{1}{1!}\left\{x^1 Ci(x) - 0!\sin x\right\}$$

$$\iint Ci(x)dx^2 = \frac{1}{2!}\left\{x^2 Ci(x) - 0!x\sin x + 1!\cos x\right\}$$

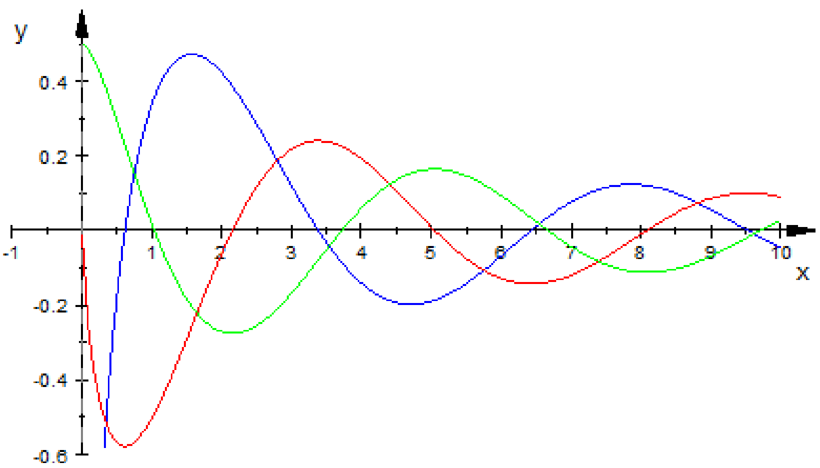
$$\iiint Ci(x)dx^3 = \frac{1}{3!}\left\{x^3 Ci(x) - \left(0!x^2-2!\right)\sin x + 1!x\cos x\right\}$$

$$\int\cdots\int Ci(x)dx^4 = \frac{1}{4!}\left\{x^4 Ci(x) - \left(0!x^3-2!x\right)\sin x + \left(1!x^2-3!\right)\cos x\right\}$$

$$\vdots$$

$$\int\cdots\int Ci(x)dx^n = \frac{1}{n!}\left\{Ci(x)x^n - \sin x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r(2r)!\,x^{n-1-2r} + \cos x\sum_{r=0}^{(n-2)/2\downarrow}(-1)^r(2r+1)!\,x^{n-2-2r}\right\}$$

青:Ci(x) 、赤:1階積分、緑:2階積分



これらの右辺は $Ci(x)$ の直系原始関数であるが、それらの共通零点は∞である(上図参照)。よって $Ci(x)$ の直系原始関数は固定下限 ∞ の高階定積分で表すことができる。

公式14·2·1

↓ を床関数とし $Ci(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{\cos t}{t}dt$ を余弦積分とするとき、次式が成立する。

$$\int_{\infty}^{x} Ci(x)dx = \frac{1}{1!}\left\{x^1 Ci(x) - 0!\sin x\right\}$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} Ci(x)dx^n = \frac{1}{n!}\left\{Ci(x)x^n - \sin x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r(2r)!\,x^{n-1-2r}\right.$$

$$+\cos x \sum_{r=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} (-1)^r (2r+1)!\, x^{n-2-2r} \Bigg\} \qquad n \geqq 2$$

例　$Ci(x)$ の4階積分

上記公式により $Ci(x)$ の4階の高階積分を図示すると次のようになる。青が直接積分で赤が多項式であるが、両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

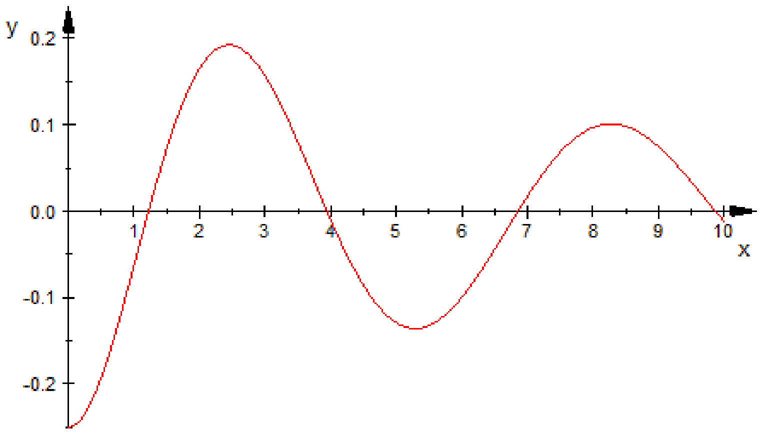
左辺: 直接積分

- $f1 := x \to \int_{\infty}^{x} \int_{\infty}^{t4} \int_{\infty}^{t3} \int_{\infty}^{t2} \mathrm{Ci}(t1)\, dt1\, dt2\, dt3\, dt4$

右辺: 多項式

- n:=4:
- $fr := x \to \frac{1}{n!} \cdot \left(\mathrm{Ci}(x) \cdot x^n - \sin(x) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^r \cdot (2 \cdot r)! \cdot x^{n-1-2 \cdot r} \right) + \cos(x) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} (-1)^r \cdot (2 \cdot r + 1)! \cdot x^{n-2-2 \cdot r} \right) \right)$

青:左辺、赤:右辺



14・3 正弦積分の傍系高階積分

正弦積分

$$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

を ONLINE INTEGRATOR で逐次積分しこれを整理すると次の高階不定積分を得る。

$$\int Si(x)dx = \frac{1}{1!}\left\{x^1 Si(x) + 0!\cos x\right\}$$

$$\int\int Si(x)dx^2 = \frac{1}{2!}\left\{x^2 Si(x) + 0!x\cos x + 1!\sin x\right\}$$

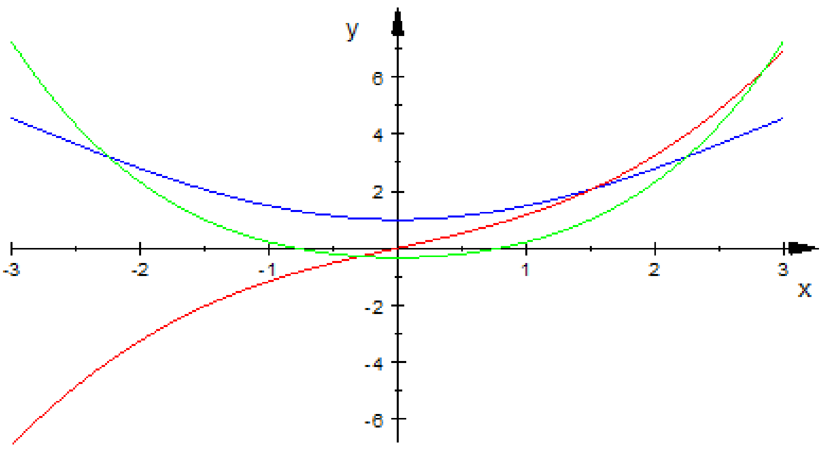
$$\int\int\int Si(x)dx^3 = \frac{1}{3!}\left\{x^3 Si(x) + \left(0!x^2-2!\right)\cos x + 1!\,x\sin x\right\}$$

$$\int\cdots\int Si(x)dx^4 = \frac{1}{4!}\left\{x^4 Si(x) + \left(0!x^3-2!x\right)\cos x + \left(1!x^2-3!\right)\sin x\right\}$$

$$\vdots$$

$$\int\cdots\int Si(x)dx^n = \frac{1}{n!}\left\{Si(x)x^n + \cos x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r(2r)!\,x^{n-1-2r} + \sin x\sum_{r=0}^{(n-2)/2\downarrow}(-1)^r(2r+1)!\,x^{n-2-2r}\right\}$$

青・Si(x)、赤：1階積分、緑：2階積分



これらの右辺は $Si(x)$ の直系原始関数であるが、それらの零点は遇数階のときゼロで奇数階のとき非ゼロである。即ち、$Si(x)$ の直系高階積分は固定下限では表すことができない。(上図参照） 従って 0 を共通下限とする $Si(x)$ の高階積分は直系積分ではなく傍系積分となる。しかしながら 0 を共通下限とする発想は極めて自然である。何故ならば $Si(x)$ 自身が0 を下限とする積分で定義されているからである。

$Si(x)$ の傍系高階積分

0 を共通下限とする $Si(x)$ の傍系高階積分は、上記の直系高階原始関数に積分定数多項式を補うことによって得られる。

公式14･3･1

↓ を床関数とし $Si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ を正弦積分とするとき、次式が成立する。

$$\int_0^x Si(x)dx = \frac{1}{1!}\left\{x^1 Si(x) + 0!\cos x\right\} - \frac{x^0}{1\cdot 0!}$$

$$\int_0^x\int_0^x Si(x)dx^2 = \frac{1}{2!}\left\{x^2 Si(x) + 0!x\cos x + 1!\sin x\right\} - \frac{x^1}{1\cdot 1!}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x Si(x)dx^3 = \frac{1}{3!}\left\{x^3 Si(x) + \left(0!x^2-2!\right)\cos x + 1!\ x\sin x\right\} - \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^0}{3\cdot 0!}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x Si(x)dx^4 = \frac{1}{4!}\left\{x^4 Si(x) + \left(0!x^3-2!x\right)\cos x + \left(1!x^2-3!\right)\sin x\right\} - \frac{x^3}{1\cdot 3!} + \frac{x^1}{3\cdot 1!}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x Si(x)dx^n = \frac{1}{n!}\left\{Si(x)x^n + \cos x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r(2r)!\,x^{n-1-2r} + \sin x\sum_{r=0}^{(n-2)/2\downarrow}(-1)^r(2r+1)!\,x^{n-2-2r}\right\} - \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\frac{x^{n-1-2r}}{(2r+1)(n-1-2r)!}$$

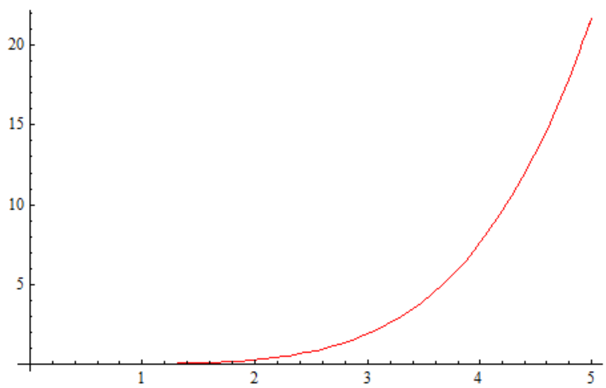
例　$Si(x)$ の傍系4階積分

上記公式により $Si(x)$ の4階の高階積分を図示すると次のようになる。青が Riemann-Liouville 積分で赤が多項式であるが、両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

$$n = 4;$$

$$\texttt{f1}[x\_] := \frac{1}{\texttt{Gamma}[n]}\int_0^x (x-t)^{n-1}\,\texttt{SinIntegral}[t]\,dt$$

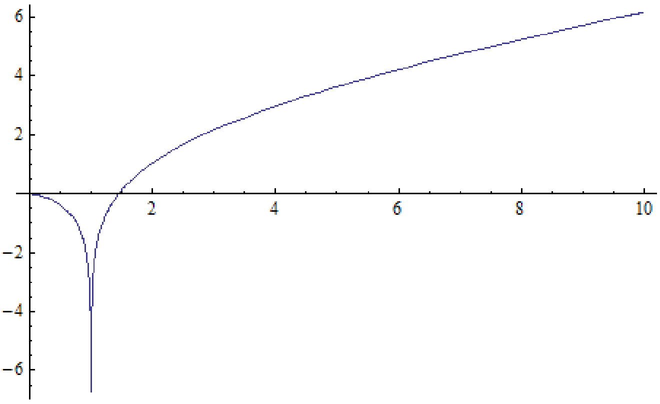
$$\texttt{fr}[x\_] := \frac{1}{n!}\left(\texttt{SinIntegral}[x]\,x^n + \texttt{Cos}[x]\sum_{r=0}^{\texttt{Floor}\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^r\,(2r)!\,x^{n-1-2r} + \texttt{Sin}[x]\sum_{r=0}^{\texttt{Floor}\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^r\,(2r+1)!\,x^{n-2-2r}\right) - \sum_{r=0}^{\texttt{Floor}\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^r\frac{x^{n-1-2r}}{(2r+1)\,(n-1-2r)!}$$



14･4　対数積分の高階積分

対数積分は次のような関数である。

$$li(x)=\int_0^x \frac{1}{\log t}dt \qquad (1.0)$$



先ず、2つの補助公式を用意する。

Lemma 14.4.1

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}d$ とするとき、次式が成立する。

$$\int Ei(2\log x)dx = xEi(2\log x) - Ei(3\log x)$$

$$\int Ei(3\log x)dx = xEi(3\log x) - Ei(4\log x)$$

$$\vdots$$

$$\int Ei(n\log x)dx = xEi(n\log x) - Ei\{(n+1)\log x\} \qquad (1.n)$$

導出

$2\log x = t$ と置けば $x = e^{\frac{t}{2}}$,　　$dx = \frac{x}{2}dt = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}dt$ 、 よって

$$\int Ei(2\log x)dx = \frac{1}{2}\int Ei(t)e^{\frac{t}{2}}dt$$

右辺の積分を ONLINE INTEGRATOR により計算すると

$$\int Ei(t)e^{\frac{t}{2}}dt = 2Ei(t)e^{\frac{t}{2}} - 2Ei\left(\frac{3}{2}t\right)$$

となるからこれを用いて次式を得る。

$$\int Ei(2\log x)dx = Ei(t)e^{\frac{t}{2}} - Ei\left(\frac{3}{2}t\right) = xEi(2\log x) - Ei(3\log x)$$

次に $3\log x = t$ と置いて同様の計算を行えば次式を得る。

$$\int Ei(3\log x)dx = \int Ei(t)\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}dt = \frac{1}{3}\int Ei(t)e^{\frac{t}{3}}dt = Ei(t)e^{\frac{t}{3}} - Ei\left(\frac{4}{3}t\right)$$

$$= xEi(3\log x) - Ei(4\log x)$$

以下、帰納法により与式を得る。

Note

$x \to +0$ のとき $\log x \to -\infty$ となるから、$x=0$ は明らかにこれらの関数の零点である。従って(1.n) は次のように書くこともできる。

$$\int_0^x Ei(n\log x)\,dx = xEi(n\log x) - Ei\{(n+1)\log x\} \tag{1.n'}$$

***Lemma* 14.4.2**

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}d$ とするとき、次式が成立する。

$$\int x^n Ei(\log x)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}Ei(\log x) - \frac{1}{n+1}Ei\{(n+2)\log x\} \tag{2.n}$$

導出

ONLINE INTEGRATOR により計算すると直ちに(2.n) を得る。

Note

$x \to +0$ のとき $\log x \to -\infty$ となるから、$x=0$ は明らかにこれらの関数の零点である。従って(2.n) は次のように書くこともできる。

$$\int_0^x x^n Ei(\log x)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}Ei(\log x) - \frac{1}{n+1}Ei\{(n+2)\log x\} \tag{2.n'}$$

公式14・4・3

対数積分 li 及び指数積分 Ei をそれぞれ

$$li(x)=\int_0^x \frac{1}{\log t}dt \quad , \quad Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$$

とするとき、$x \geqq 0$ なる x について次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x li(x)\,dx^n = \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nC_r x^{n-r} Ei\{(r+1)\log x\} \tag{3.n}$$

導出

$t = \log x$ と置けば $[0, x] \to [-\infty, t] \quad , \quad dx = e^t dt$ 故

$$\int_0^x \frac{1}{\log x}dx = \int_{-\infty}^{t}\frac{e^t}{t}dt = [Ei(t)]_{-\infty}^{t} = Ei(\log x) = li(x)$$

次に

$$\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^2 = \int_0^x li(x)\,dx$$

として右辺の不定積分をONLINE INTEGRATOR により計算すれば

$$\int li(x)dx = x\,li(x) - Ei(2\log x)$$

となるが、右辺の零点は明らかに $x=0$ であるから次式を得る。

$$\int_0^x li(x)dx = xEi(\log x) - Ei(2\log x)$$

次にこの両辺を積分して Lemma 14.4.1 , 14.4.2 を適用すれば

$$\int_0^x\int_0^x li(x)dx^2 = \int_0^x xEi(\log x)dx - \int_0^x Ei(2\log x)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2Ei(\log x) - \frac{1}{2}Ei(3\log x) - \{xEi(2\log x) - Ei(3\log x)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{x^2Ei(\log x) - 2xEi(2\log x) + Ei(3\log x)\}$$

次にこの両辺を積分して Lemma 14.4.1 , 14.4.2 を適用すれば

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x li(x)dx^3 = \frac{1}{2}\int_0^x x^2Ei(\log x)dx - \int_0^x xEi(2\log x)dx + \frac{1}{2}\int_0^x Ei(3\log x)dx$$

$$= \frac{1}{3!}x^3Ei(\log x) - \frac{1}{3!}Ei(4\log x) - \frac{1}{2}x^2Ei(2\log x) + \frac{1}{2}Ei(4\log x)$$

$$+ \frac{1}{2}xEi(3\log x) - \frac{1}{2}Ei(4\log x)$$

$$= \frac{1}{3!}\{x^3Ei(\log x) - 3x^2Ei(2\log x) + 3xEi(3\log x) - Ei(4\log x)\}$$

以下、帰納法により与式を得る。

例　$li(x)$ の2階積分

$$\texttt{fl[x\_] := }\int_0^x\left(\int_0^x \texttt{LogIntegral[x]}\,dx\right)dx$$

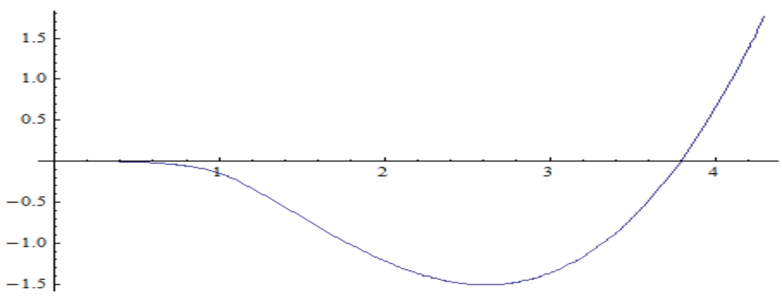
$$\texttt{fr[n\_, x\_] = }\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,\texttt{Binomial[n, r]}\;x^{n-r}\,\texttt{ExpIntegralEi[(r + 1) Log[x]];}$$

```
fl[x]
```

$$\frac{1}{2}\left(-2\,x\,\texttt{ExpIntegralEi[2 Log[x]]} + \texttt{ExpIntegralEi[3 Log[x]]} + x^2\,\texttt{LogIntegral[x]}\right)$$

```
FullSimplify[fr[2, x]]
```

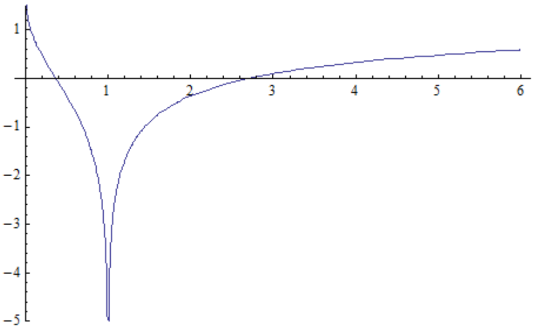
$$\frac{1}{2}\left(-2\,x\,\texttt{ExpIntegralEi[2 Log[x]]} + \texttt{ExpIntegralEi[3 Log[x]]} + x^2\,\texttt{LogIntegral[x]}\right)$$



14・5 二重対数関数の高階積分

二重対数関数次のような関数である。

$$f(x) = log\,|log\,x| \tag{1.0}$$



(1.0) をONLINE INTEGRATOR で逐次積分しこれを整理すると次の高階不定積分を得る。ここで $li(x)\{=Ei(log\,x)\}$ は前節で言及された対数積分である 。

$$\int log\,|log\,x|\,dx = \frac{1}{1!}\{x\,log\,|logx| - li(x)\}$$

$$\iint log\,|log\,x|\,dx^2 = \frac{1}{2!}\{x^2 log\,|logx| - 2x\,li(x)+Ei(2log\,x)\}$$

$$\iiint log\,|log\,x|\,dx^3 = \frac{1}{3!}\{x^3 log\,|logx| - 3x^2 li(x)+3xEi(2log\,x)- Ei(3log\,x)\}$$

$$\vdots$$

$$\int\cdots\int log\,|log\,x|\,dx^n = \frac{1}{n\,!}\left\{x^n log\,|logx| + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_nC_r\, x^{n-r} Ei(r\,log\,x)\right\}$$

これらの右辺は $log\,|log\,x|$ の直系原始関数であるが、$x^n log\,|logx|$ ，$Ei(n\,log\,x)$ の零点は共に 0 であるから右辺の零点は全て 0 である。よって $log\,|log\,x|$ の直系原始関数は固定下限 0 の高階定積分で表すことができる。

公式14・5・1

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ とするとき、$x\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x log\,|log\,x|\,dx^n = \frac{1}{n\,!}\left\{x^n\,log\,|logx| + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_nC_r\, x^{n-r} Ei(r\,log\,x)\right\} \tag{1.n}$$

例 **$log\,|log\,x|$ の2階積分**

この2階積分の任意の1点 $x=1.6$ における両辺の関数値は次のとおり。

```
fl[x_] := ∫_0^x ∫_0^u Log[Abs[Log[t]]] dt du

fr[n_, x_] := 1/n! (x^n Log[Abs[Log[x]]] + Σ_{r=1}^{n} (-1)^r Binomial[n, r] x^(n-r) ExpIntegralEi[r Log[x]])

N[fl[1.6]]        N[fr[2, 1.6]]
-0.666445         -0.666445
```

14･6　対数積分の超微積分

前節までの高階積分のうち、対数積分 $li(x)$ の高階積分は超微積分化が可能である。それはこの高階微積分が二項係数で表されていることによる。

14･6･1　対数積分関数の超積分

公式14･6･1

対数積分及び指数積分 Ei をそれぞれ

$$li(x)=\int_0^x \frac{1}{\log t}dt \quad , \quad Ei(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}d$$

とするとき、$p \geqq 0$, $x \geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \sim \int_0^x li(x)dx^p = \frac{1}{\Gamma(1+p)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \binom{p}{r} x^{p-r} Ei\{(r+1)\log x\}$$

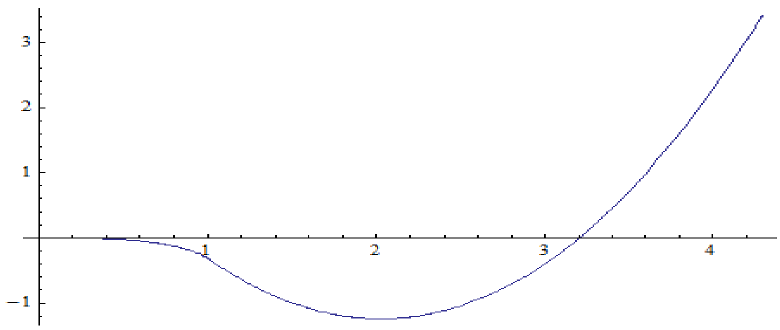
導出

公式14･4･3 において、階乗をガンマ関数に二項係数を一般二項係数にそれぞれ置換した上、積分演算子のインデックスを自然数 n から正数 p に解析接続する。

例　$li(x)$ の 3/2 階積分

公式と Riemann-Liouville integral とにより、任意の1点 $x=4$ における関数値を求めた。
両者はほぼ一致している。また、この図を14･4 の2階積分の図と見比べると、本図の方が曲率がなだらかであることが判る。

```
p = 3 / 2;  m = 100;
fl[x_] := 1/Gamma[p] ∫_0^x (x - t)^(p-1) LogIntegral[t] dt
fr[x_] := 1/Gamma[1 + p] Σ_{r=0}^{m} (-1)^r Binomial[p, r] x^(p-r) ExpIntegralEi[(r + 1) Log[x]]
N[fl[4]]        N[fr[4]]
2.27357         2.27343
```



14･6･2　対数積分の超微分

公式14･6･2

対数積分及び指数積分 Ei をそれぞれ

$$li(x)=\int_0^x \frac{1}{\log t}dt \quad , \quad Ei(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt$$

とするとき、$p>0$, $p\neq 1,2,3,\cdots$ 及び $x\geq 0$ について次式が成立する。

$$\{li(x)\}^{(p)}=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-p}{r}x^{-p-r}Ei\{(r+1)\log x\}$$

導出

公式14･6･1は実は、$p\neq -1,-2,-3,\cdots$, $x\geq 0$ について成立する。 そこで

公式14･6･1において積分演算子 $<p>$ を微分演算子 (p) $\{=<-p>\}$ に置換して与式を得る。

例 $li(x)$ の 1/2 階微分

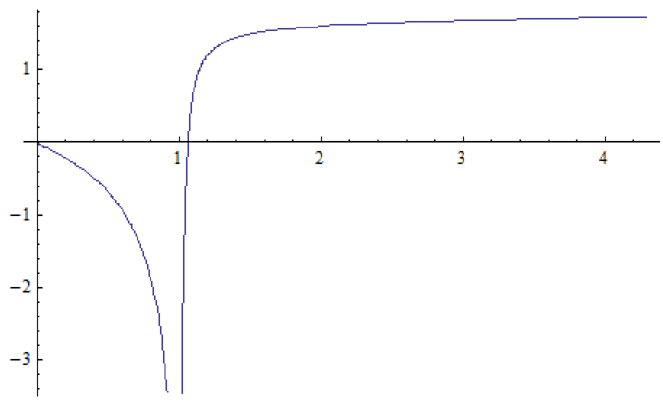
公式と Riemann-Liouville differintegral とにより、任意の1点 $x=2$ における超微係数を求めた。両者はほぼ一致している。

$$p = 1/2;\ h = 10^{-6};\ m = 7000;$$

$$f[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[1-p]}\int_0^x (x-t)^{1-p-1}\,\mathrm{LogIntegral}[t]\,dt \qquad f1 = \frac{f[2+h]-f[2]}{h};$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[1-p]}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\,\mathrm{Binomial}[-p, r]\,x^{-p-r}\,\mathrm{ExpIntegralEi}[(r+1)\,\mathrm{Log}[x]]$$

N[f1]	N[fr[2]]
1.76931 − 0.000171431 i	1.76409



14･7　二重対数関数の超微積分

前節までの高階積分のうち、二重対数積分 $loglog\,x$ の高階積分は超微積分化が可能である。それはこの高階微積分が二項係数で表されていることによる。

14･7･1　二重対数関数の超積分

公式14･7･1

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ とするとき、$p>0,\ x\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x\!\!\tilde{\ }\!\!\int_0^x log\,|log\,x|\,dx^p=\frac{1}{\Gamma(1+p)}\left\{x^p log\,|logx|+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{p}{r}x^{p-r}Ei(r\,log\,x)\right\}$$

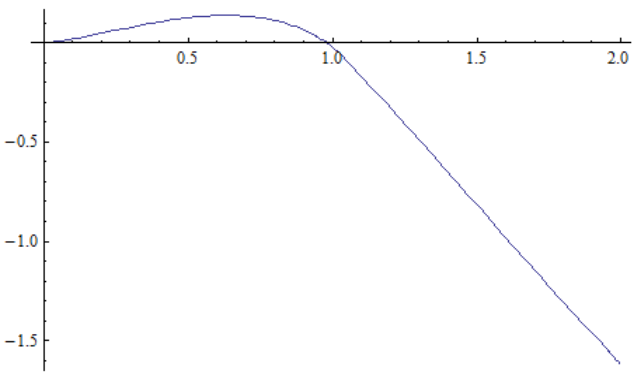
導出

公式14･5･1 において、階乗をガンマ関数に二項係数を一般二項係数にそれぞれ置換した上、積分演算子のインデックスを自然数 n から正数 p に解析接続する。

例　$log\,|log\,x|$ の 5/3 階積分

公式と Riemann-Liouville integral とにより、任意の1点 x=1.5 における関数値を求めた。両者はほぼ一致している。

```
p = 5 / 3;  m = 150;
fl[x_] := 1/Gamma[p] ∫_0^x (x - t)^(p-1) Log[Abs[Log[t]]] dt
fr[x_] := 1/Gamma[1 + p] (x^p Log[Abs[Log[x]]] + Σ_{r=1}^{m} (-1)^r Binomial[p, r] x^(p-r) ExpIntegralEi[r Log[x]])
N[fl[1.5]]        N[fr[1.5]]
-0.818661         -0.818662
```



14･7･2　二重対数関数の超微分

公式14･7･2

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ とするとき、$p>0$, $p\neq 1,2,3,\cdots$, $x\geqq 0$ について次式が

成立する。

$$\left(\log|\log x|\right)^{(p)}=\frac{1}{x^{p}\Gamma(1-p)}\left\{\log|\log x|+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\binom{-p}{r}\frac{Ei(r\log x)}{x^{r}}\right\}$$

導出

公式14･7･1は実は、$p\neq -1,-2,-3,\cdots$, $x\geqq 0$ なる p,x について成立する。そこで公式14･7･1において積分演算子 $<p>$ を微分演算子 (p) $\{=<-p>\}$ に置換して与式を得る。

例　$\log|\log x|$ の 0.3 階微分

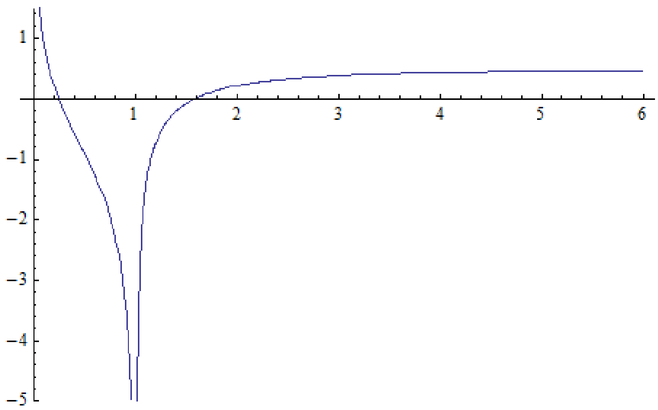
公式と Riemann-Liouville integral とにより、任意の1点 $x=0.5$ における関数値を求めた。両者はほぼ一致している。微分階数が小さいので、この図は $\log|\log x|$ の図に良く似ている。

```
p = 0.3;  h = 10^-6;  m = 30000;

f[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_0^x (x - t)^(1-p-1) Log[Abs[Log[t]]] dt      f1 = (f[0.5 + h] - f[0.5])/h;

fr[x_] := 1/(x^p Gamma[1 - p]) (Log[Abs[Log[x]]] + Sum_{r=1}^{m} (-1)^r Binomial[-p, r] ExpIntegralEi[r Log[x]]/x^r)

N[f1]            N[fr[0.5]]
-0.93656         -0.936078
```



2007.10.05

K. Kono

宇宙人の数学