15　楕円積分の項別高階微積分と項別超微積分

15･1　楕円積分の2重級数展開

15･1･1　第1種楕円積分の2重級数展開

公式15･1･1

$|k| \leqq 1$, $|x| \leqq 1$ について次式が成立する。

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s} k^{2s}x^{2r+1} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{1}{2r+1}\frac{(2r-2s-1)!!}{(2r-2s)!!}\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} k^{2s}x^{2r+1} \tag{1.1'}$$

導出

$|k| \leqq 1$, $|x| \leqq 1$ であるから、一般二項定理(3･2 参章)により

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}x^{2r}$$

$$\left(1-k^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}k^{2r}x^{2r}$$

これらを掛け合わせると

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-1/2}{0}x^0 - \binom{-1/2}{1}x^2 + \binom{-1/2}{2}x^4 - \binom{-1/2}{3}x^6 +-$$

$$\times \quad (1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-1/2}{0}k^0x^0 - \binom{-1/2}{1}k^2x^2 + \binom{-1/2}{2}k^4x^4 - \binom{-1/2}{3}k^6x^6 +-$$

$$= \binom{-1/2}{0}\binom{-1/2}{0}k^0x^0$$

$$-\left\{\binom{-1/2}{0}\binom{-1/2}{1}k^0 + \binom{-1/2}{1}\binom{-1/2}{0}k^2\right\}x^2$$

$$+\left\{\binom{-1/2}{0}\binom{-1/2}{2}k^0 + \binom{-1/2}{1}\binom{-1/2}{1}k^2 + \binom{-1/2}{2}\binom{-1/2}{0}k^4\right\}x^4$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r}$$

すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r}$$

となる。そこでこの両辺を0から x まで積分すれば(1.1)を得る。

次に一般二項係数の定義(3·2 参章)より

$$\binom{-1/2}{s}=\frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(-1/2-s+1)\Gamma(s+1)}=\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-s)\Gamma(s+1)}$$

一方、ガンマ関数の性質(1·1·6)より

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!! \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$$

であるから s が非負の整数のとき

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)=(-1)^s\frac{2^s\sqrt{\pi}}{(2s-1)!!}$$

これらを用いれば

$$\binom{-1/2}{s}=(-1)^s\frac{\sqrt{\pi}\,(2s-1)!!}{2^s s!\sqrt{\pi}}=(-1)^s\frac{(2s-1)!!}{2^s s!}$$

i.e.

$$\binom{-1/2}{s}=(-1)^s\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} \quad , \quad \binom{-1/2}{r-s}=(-1)^{r-s}\frac{(2r-2s-1)!!}{(2r-2s)!!}$$

よってこれらを(1.1)に代入して(1.1')を得る。

例1 $F\left(x,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の2重級数展開

この楕円積分とその2重級数に任意の一点 $x=0.7$ を与えて両者を比較し、右辺を図示すると次のようになる。

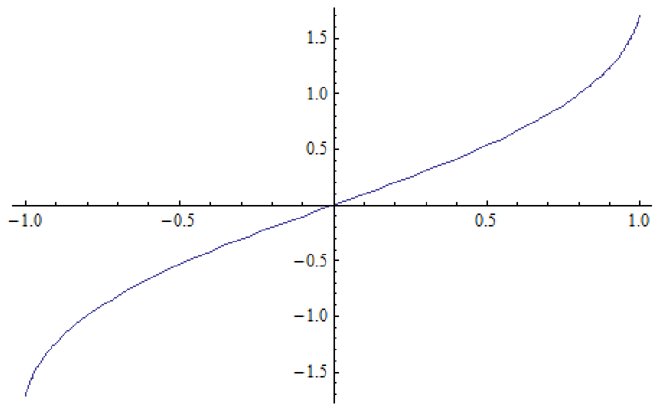
```
m = 30;
```

$$\mathtt{Fl[x\_,\ k\_]} := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$$

$$\mathtt{Fr[x\_,\ k\_]} := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\,\mathtt{Binomial}\left[-\frac{1}{2},\ r-s\right]\mathtt{Binomial}\left[-\frac{1}{2},\ s\right]k^{2s}x^{2r+1}$$

$$\mathtt{N}\left[\mathtt{Fl}\left[0.7,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right] \qquad \mathtt{N}\left[\mathtt{Fr}\left[0.7,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$$

0.814489　　　　0.814489



15·1·2 第2種楕円積分の2重級数展開

公式15·1·2

$|k| \leqq 1$, $|x| \leqq 1$ について次式が成立する。

$$E(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s} k^{2s}x^{2r+1} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{1}{(2r+1)(1-2s)} \frac{(2r-2s-1)!!}{(2r-2s)!!} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} k^{2s}x^{2r+1} \tag{1.2'}$$

導出

$|k| \leqq 1$, $|x| \leqq 1$ であるから、一般二項定理により

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}x^{2r}$$

$$\left(1-k^2x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{1/2}{r}k^{2r}x^{2r}$$

これらを掛け合わせて両辺を0からxまで積分して(1.2)を得る。(1.2)は (1.1) の後ろの二項係数の符号を反転しただけのものとなっている。

次に一般二項係数の定義より

$$\binom{1/2}{s} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2-s)\Gamma(s+1)} = \frac{\Gamma(3/2)}{(1/2-s)\Gamma(1/2-s)\Gamma(s+1)}$$

一方、ガンマ関数の性質(1·1·6)より、sが非負の整数のとき

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) = (-1)^s\frac{2^s\sqrt{\pi}}{(2s-1)!!}$$

これらを用いれば

$$\binom{1/2}{s} = (-1)^s\frac{\sqrt{\pi}}{(1-2s)s!}\frac{(2s-1)!!}{2^s\sqrt{\pi}} = \frac{(-1)^s}{(1-2s)}\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}$$

これと前の

$$\binom{-1/2}{r-s} = (-1)^{r-s}\frac{(2r-2s-1)!!}{(2r-2s)!!}$$

を(1.2)に代入して(1.2')を得る。

例2 $E\left(x,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ の2重級数展開

この楕円積分とその2重級数に任意の一点x=0.8を与えて両者を比較すると次のとおり。

```
m = 30;
El[x_, k_] := ∫_0^x √((1 - k² t²)/(1 - t²)) dt
```

```
Er[x_, k_] := Sum[Sum[(-1)^r/(2 r + 1) Binomial[-1/2, r - s] Binomial[1/2, s] k^(2 s) x^(2 r+1), {s, 0, r}], {r, 0, m}]
```

$$\text{Er}[x\_,k\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\,\text{Binomial}\left[-\frac{1}{2},r-s\right]\text{Binomial}\left[\frac{1}{2},s\right]k^{2s}x^{2r+1}$$

$$\text{N}\left[\text{El}\left[0.8,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right] \qquad \text{N}\left[\text{Er}\left[0.8,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right]$$

0.84667 　　　　 0.84667

15･1･3　第3種楕円積分の3重級数展開

公式15･1･3

$|c|\leqq 1$, $|k|\leqq 1$, $|x|\leqq 1$ について次式が成立する。

$$\Pi(x,c,k)=\int_0^x\frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r}{2r+1}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r+1} \tag{1.3}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-c)^{r-s}}{2r+1}\frac{(2s-2t-1)!!}{(2s-2t)!!}\frac{(2t-1)!!}{(2t)!!}k^{2t}x^{2r+1} \tag{1.3'}$$

導出

$|c|\leqq 1$, $|k|\leqq 1$, $|x|\leqq 1$ であるから、一般二項定理により

$$\frac{1}{1+cx^2}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c^r x^{2r}$$

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}x^{2r}$$

$$\left(1-k^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}k^{2r}x^{2r}$$

これらを掛け合わせてこの両辺を0から x まで積分して(1.3)を得る。そして(1.3)の一般二項係数を2重階乗に置換して(1.3')を得る。

例3　$\Pi\left(x,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の3重級数展開

この楕円積分とその3重級数に任意の一点 $x=0.9$ を与えて両者を比較すると次のとおり。

m = 35;

$$\text{Pl}[x\_,c\_,k\_] := \int_0^x\frac{1}{(1+c\,t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$$

$$\text{Pr}[x\_,c\_,k\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r}{2r+1}c^{r-s}\,\text{Binomial}\left[-\frac{1}{2},s-t\right]\text{Binomial}\left[-\frac{1}{2},t\right]k^{2t}x^{2r+1}$$

$$\text{N}\left[\text{Pl}\left[0.9,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right] \qquad \text{N}\left[\text{Pr}\left[0.9,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$$

1.11438 　　　　 1.11438

15･2 楕円の弧長

x 軸上に焦点を持つ楕円(横長楕円)は次式で示される。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a) \tag{1}$$

これを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ と比べれば、

$$\frac{x^2}{a^2}=\cos^2\theta \quad , \quad \frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$$

i.e.

$$x=a\cos\theta \quad , \quad y=b\sin\theta \quad , \quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi$$

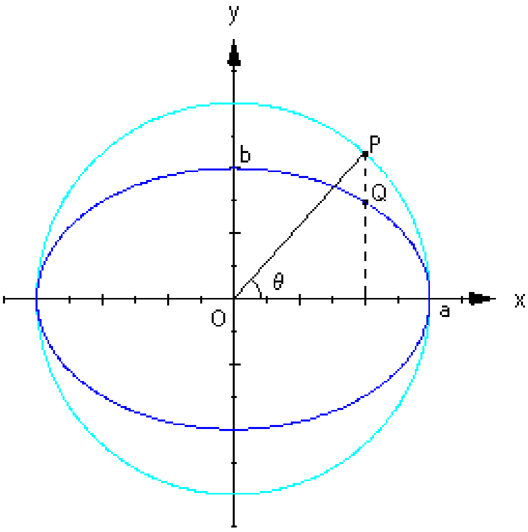
を得る。これを図示すると図Aのようになり、弧長は x 軸から反時計回りに計算されることになる。これは計算がややこしい。

そこで第1象限のみを考え、θ を $\pi/2-\theta$ に置換して

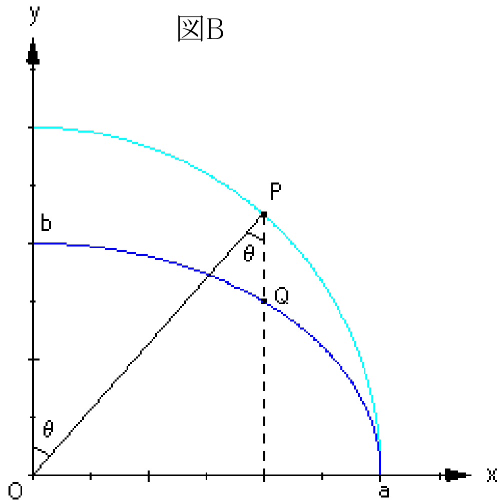
$$x=a\sin\theta \quad , \quad y=b\cos\theta \quad , \quad 0\leqq\theta\leqq\pi/2 \tag{1'}$$

と置けば、図Bのように弧長を y 軸から時計回りに計算できることになる。この方が計算が楽なので (1’) の表示を採用する。

図A



図B



平面上の曲線が $x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ で媒介変数表示されるとき、長さ l は次式で与えられる。

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \qquad \alpha\leqq\theta\leqq\beta$$

(1’) より

$$\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta}=-b\sin\theta$$

であるから

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta$$

$$=a^2(1-k^2\sin^2\theta) \qquad (k\equiv\sqrt{(a^2-b^2)/a^2} \ : \ \text{離心率})$$

故に $\widehat{bQ}$ の長さ l は

$$l = a\int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \tag{2.0}$$

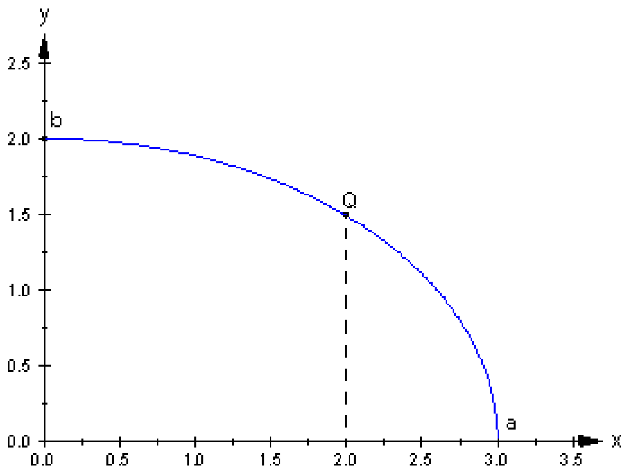
さらに $t=\sin\theta\ \ (=x/a)$ と置けば、

$$l = a\int_0^{\frac{x}{a}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = aE\left(\frac{x}{a},k\right) \qquad \left(k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) \tag{2.1}$$

この右辺は第2種楕円積分であるから、前節の (1.2) を用いれば次式を得る。

$$l = a\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}\left(\frac{x}{a}\right)^{2r+1} \qquad \left(k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) \tag{2.1'}$$

例　次図の $\widehat{bQ}$ の長さ l を求める。



$a=3$, $b=2$, $x_q=2$ であるから、

$$k=\sqrt{\frac{3^2-2^2}{3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ ,\qquad \frac{x_q}{a}=\frac{2}{3}$$

かくして $\widehat{bQ}$ の長さ l は (2.1’) より

$$l = 3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2s}\left(\frac{2}{3}\right)^{2r+1}$$

これを計算すると次のとおり。

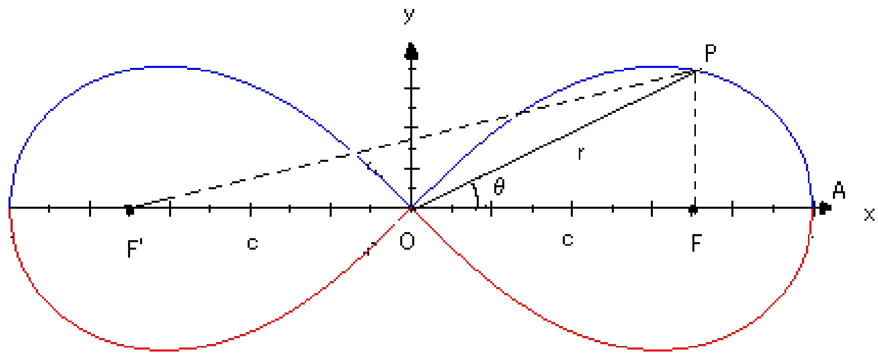
```
a = 3; b = 2; m = 20;    k = Sqrt[(a^2 - b^2)/a^2];
l[x_] := a Sum[Sum[(-1)^r/(2 r + 1) Binomial[-1/2, r - s] Binomial[1/2, s] k^(2 s) (x/a)^(2 r + 1), {s, 0, r}], {r, 0, m}]
N[l[2]]
2.08808
```

15･3 レムニスケートの弧長

15･3･0 レムニスケートの定義

平面状のいくつかの定点からの距離の積が一定なる点の軌跡を広義のレムニスケートと言い、特に定点が2つで、その間の距離が $FF' = 2c$ 、一定の積が c^2 なるとき、狭義のレムニスケートと言う。

第1図 全体図



その方程式は $FP^2 \cdot F'P^2 = c^4$ から次のように導かれる。

直交座標: $\left(x^2+y^2\right)^2 - 2c^2\left(x^2-y^2\right) = 0$

極座標: $r^2 - 2c^2 \cos 2\theta = 0$

これらの式はこのままでも使用されるが、$2c^2 = a^2$ と置いた次式が使用されることが多い。本章でも以下はこの表式を用いる。

直交座標: $\left(x^2+y^2\right)^2 - a^2\left(x^2-y^2\right) = 0$ (3.0o)

極座標: $r^2 - a^2 \cos 2\theta = 0 \quad (a>0)$ (3.0p)

陽関数表示(直交座標)

(3.0o)より

$$y^2 = \frac{-\left(2x^2+a^2\right) \pm a\sqrt{8x^2+a^2}}{2}$$

$a > 0$, $\sqrt{8x^2+a^2} > 0$ 故、+ を採用し

$$y = \pm\sqrt{\frac{-\left(2x^2+a^2\right) + a\sqrt{8x^2+a^2}}{2}} \tag{3.0h}$$

を得る。そしてこれらの零点は(3.0h) を0と置いて整理した式 $\left(x^2-a^2\right)x^2 = 0$ より

$x_0 = \pm a$, $= \pm 0$

となる。すなわち第1図におけるA点の x 座標は a である。

第1図において、(3.0h) の+の式が上半分(青)であり、- の式が下半分(赤)である。

直交座標と極座標の関係

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ を代入すると次のようになる。

$$x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta \ , \qquad y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \tag{3.xy}$$

そしてこれらに

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \ , \qquad \cos 2\theta = \sqrt{1-2\sin^2\theta}$$

なる関係式を代入・整理して $\sin\theta$ を求めれば

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3a^2 - a\sqrt{a^2+8x^2}}}{2a} = \frac{\sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2-8y^2}}}{2a} \tag{3.0'}$$

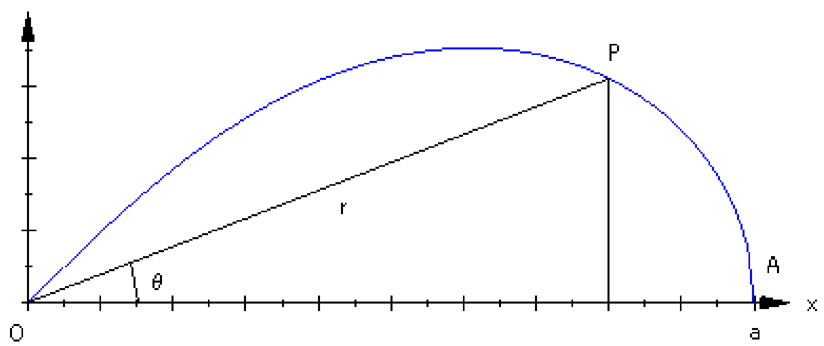
となり、これより θ が得られる。

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3a^2 - a\sqrt{a^2+8x^2}}}{2a} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2-8y^2}}}{2a} \tag{3.0''}$$

右端点からの弧長（極座標）

第1図の各象限の図形はそれぞれ点対象・線対称となっているから、第1象限のみに着目する。

第2図 第1象限



すると第2図 $\overset{\frown}{AP}$ の長さ l は (x, y) 以下のようにして求められる。

(3.xy) を θ で微分して

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} - \frac{a\cos\theta\ \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} - \frac{a\sin\theta\ \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

これらより

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$$

故に

$$l = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.0}$$

15･3･1　弧長の楕円積分表示(その1)

(3.0) において $t=\sqrt{2}\sin\theta$ と置けば

$$dt=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta\ , \qquad \sin\theta=\frac{t}{\sqrt{2}}\ ,\quad \cos\theta=\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}$$

これらより

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1-2\cdot\frac{t^2}{2}}}\frac{dt}{\sqrt{2}\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)}}$$

故に第2図 $\overset{\frown}{AP}$ の長さ l は

$$l=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^u\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2t^2\right\}}}\qquad=\frac{a}{\sqrt{2}}F\left(u\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.1}$$

$$u=\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{a^2+8x^2}}{2a}} \tag{3.1u}$$

となる。(3.1u) は $u=\sqrt{2}\sin\theta$ と (3.0') より得る。

(3.1) の右辺は第1種楕円積分であるから、前節の (1.1) を用いれば次式を得る。

$$l=\frac{a}{\sqrt{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2s}u^{2r+1} \tag{3.1'}$$

例1　a=1 のとき、x=a から x=0.8 までの弧長(その1)

$$a=1;\ m=100;\qquad u[x\_]:=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{a^2+8x^2}}{2a}}$$

$$l[x\_]:=\frac{a}{\sqrt{2}}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\text{Binomial}\left[-\frac{1}{2},r-s\right]\times\text{Binomial}\left[-\frac{1}{2},s\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2s}u[x]^{2r+1}$$

```
N[l[0.8]]
0.390075
```

Note

第1種完全楕円積分を $K(k)$ $\{=F(1,k)\}$ とするとき、第2図 $\overset{\frown}{AO}$ の長さ $L/4$ は次式で示される。

$$\frac{L}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}\times 1.85407467730137\cdots \tag{3.1q}$$

また、(3.1)と(3.1q)から、第2図 $\overset{\frown}{OP}$ の長さ $\bar{l}$ が次のようになることも解かる。

$$\bar{l}=\frac{a}{\sqrt{2}}\left\{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(t,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\qquad(0\leqq t\leqq 1) \tag{3.$\bar{1}$}$$

15･3･2 弧長の楕円積分表示(その2)

(3.0) において $t = tan\theta$ と置けば、$\theta = tan^{-1}t$ より $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$

一方、

$$\frac{1}{1-2sin^2\theta} = \frac{cos^2\theta + sin^2\theta}{cos^2\theta - sin^2\theta} = \frac{1+tan^2\theta}{1-tan^2\theta} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

故に第2図 $\overset{\frown}{AP}$ の長さ l は

$$l = a\int_0^u \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = a\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+t^2}}$$

すなわち

$$l = a\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-i^2t^2}} = aF(t,i) \tag{3.2}$$

$$u = tan\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3a^2 - a\sqrt{a^2+8x^2}}}{2a}\right) \tag{3.2u}$$

となる。(3.2u) は $t=tan\theta$ と (3.0″) とから得る。

(3.2) の右辺はやや変則的である($k=\sqrt{-1}$)が第1種楕円積分であるから、前節の (1.1) を用いれば次式を得る。

$$l = a\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s} i^{2s}u^{2r+1} \tag{3.2'}$$

例2 a=1 のとき、x=a から x=0.8 までの弧長(その2)

```
a = 1; m = 20;      u[x_] := Tan[ArcSin[Sqrt[3 a^2 - a Sqrt[a^2 + 8 x^2]]/(2 a)]]
l[x_] := a Sum[Sum[(-1)^r/(2 r + 1) Binomial[-1/2, r - s] Binomial[-1/2, s] i^(2 s) u[x]^(2 r+1), {s, 0, r}], {r, 0, m}]
N[l[0.8]]
0.390075
```

15･3･3 弧長の1重級数表示

上記2例では楕円積分を2重級数で計算したが、(3.2) の場合は1重級数で計算できる。

一般二項定理により

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}x^{4r}$$

であるから

$$l = a\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = a\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{4r+1}\binom{-1/2}{r}u^{4r+1} \tag{3.3}$$

あるいは

$$l = a\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = a\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\frac{u^{4r+1}}{4r+1} \tag{3.3'}$$

とできる。積分上限は前 (3.2u) と同じである。すなわち、

$$u = tan\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3a^2-a\sqrt{a^2+8x^2}}}{2a}\right)$$

例3 $\boldsymbol{a=1}$ のとき、$\boldsymbol{x=a}$ から $\boldsymbol{x=0.8}$ までの弧長(その3)

例2を (3.3') を用いて手計算してみる。精度は小数点以下3桁とする。

$a=1$, $x=0.8$ のときの (3.3') の積分上限は例2と同じで次のようになる。

$$u = tan\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3\cdot 1^2-1\sqrt{1^2+8(0.8)^2}}}{2\cdot 1}\right) = 0.389$$

これを (3.3') に代入して5項ほど計算すれば次のようになる。

$$s = \frac{(-1)!!}{0!!}\frac{0.389^1}{1}+\frac{0!!}{1!!}\frac{0.389^5}{5}+\frac{3!!}{4!!}\frac{0.389^9}{9}+\frac{5!!}{6!!}\frac{0.389^{13}}{13}+\frac{7!!}{8!!}\frac{0.389^{17}}{17}$$

$$= 0.390$$

Note

結局、3つの積分の間には次なる関係がある。

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)}} = \int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

$$t = \sqrt{2}sin\theta = \sqrt{2}sin\left(tan^{-1}u\right) = \frac{\sqrt{2}\,u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$u = tan\theta \quad = tan\left(sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}$$

15･4 楕円積分の項別高階微積分

15･4･1 楕円積分の項別高階積分

公式15･4･1

$|x|\leqq 1\ ,\ |k|\leqq 1\ ,\ |c|\leqq 1$

$$F(x,k)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad ,\quad E(x,k)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$\Pi(x,c,k)=\int_0^x\frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x F(x,k)\,dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+n+1} \tag{4.1}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x E(x,k)\,dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r+n+1} \tag{4.2}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \Pi(x,c,k)\,dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+n+1)!}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r+n+1} \tag{4.3}$$

導出

公式15･1･1より

$$F(x,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+1}$$

この両辺を0から x まで n 回 積分して (4.1) を得る。(4.2), (4.3) も 公式15･1･2、公式15･1･3から同様にして得る。

Note

二重階乗を用いて

$$\int_0^x\cdots\int_0^x F(x,k)\,dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(2r)!}{(2r+n+1)!}\frac{(2r-2s-1)!!}{(2r-2s)!!}\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}k^{2s}x^{2r+n+1}$$

のような表記もできるが、煩雑でメリットが少ないので止める。

例 $\displaystyle\int_0^x\cdots\int_0^x E\left(x,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)dx^3$

左辺は第2種楕円積分の被積分関数を *Riemann-Liouville* 積分により3+1階積分し、右辺は (4.2) の級数により計算する。そして任意の1点 $x=0.8$ を両辺に与えてその値を比較する。両辺は一致している。

$$\mathtt{n = 3;\quad m = 25;}$$

$$\mathtt{El[x\_, k\_] := \frac{1}{Gamma[n+1]}\int_0^{x}(x-t)^{n+1-1}\sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}}\,dt}$$

$$\mathtt{Er[x\_, k\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r\,(2\,r)\,!}{(2\,r+n+1)\,!}\,Binomial\left[-\frac{1}{2},\,r-s\right]\,Binomial\left[\frac{1}{2},\,s\right]\,k^{2\,s}\,x^{2\,r+n+1}}$$

$$\mathtt{N\left[El\left[0.8,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right]}\qquad\qquad \mathtt{N\left[Er\left[0.8,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right]}$$

0.0172074 　　　　 0.0172074

15･4･2 楕円積分の項別高階微分

公式15･4･2

$|x|\leqq 1$, $|k|\leqq 1$, $|c|\leqq 1$, $x\uparrow\ (=\lceil x\rceil)$

$$F(x,k)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad,\quad E(x,k)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$\Pi(x,c,k)=\int_0^x\frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\frac{d^n}{dx^n}F(x,k)=\sum_{r=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r-n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r-n+1}\tag{4.4}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}E(x,k)=\sum_{r=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r-n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r-n+1}\tag{4.5}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\Pi(x,c,k)=\sum_{r=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r-n+1)!}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r-n+1}\tag{4.6}$$

導出

公式15･1･1より

$$F(x,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+1}$$

この両辺を n 回微分して (4.4) を得る。1番外側の $\sum$ の初項 r_0 は x のベキ $2r-n+1$ が非負となるように定まり、微分階数 n とは次のような関係がある。

n	0	1	2	3	4	5	…
r_0	0	0	1	1	2	2	…

このような関係は 天井関数 $x\uparrow\ (=\lceil x\rceil)$ を用いて次のように表される。

$$r_0 = \frac{n-1}{2}\uparrow \qquad\qquad n \geqq 0$$

(4.5), (4.6) も 公式15・1・2、公式15・1・3 から同様にして得られる。

例 $\dfrac{d^3}{dx^3}\Pi\left(x, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

左辺は第3種楕円積分の被積分関数を直接3-1回微分し、右辺は (4.6) の級数により計算する。そして任意の1点 x=-0.9 を両辺に与えてその値を比較する。両辺は一致している。

$$n = 3;\ m = 80;$$

$$\mathrm{Pl}[x\_, c\_, k\_] = \partial_x\left(\partial_x \frac{1}{(1 + c\,x^2)\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2 x^2)}}\right);$$

$$\mathrm{Pr}[x\_, c\_, k\_] := \sum_{r=\mathrm{Ceiling}\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{m} \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{(-1)^r\,(2\,r)\,!}{(2\,r - n + 1)\,!}\, c^{r-s}\,\mathrm{Binomial}\left[-\frac{1}{2}, s - t\right] \times \mathrm{Binomial}\left[-\frac{1}{2}, t\right] k^{2\,t}\, x^{2\,r-n+1}$$

$$\mathrm{Pl}\left[-0.9, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad\qquad \mathrm{N}\left[\mathrm{Pr}\left[-0.9, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$$

180.39 180.39

15･5 楕円積分の項別超微積分

15･5･1 楕円積分の項別超積分

公式15･5･1

$|x| \leqq 1\ ,\ |k| \leqq 1\ ,\ |c| \leqq 1$

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad , \quad E(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$\Pi(x,c,k) = \int_0^x \frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

とするとき、非負の実数 p について次式が成立する。

$$\int_0^x \sim \int_0^x F(x,k)\,dx^p = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^r(2r)!}{\Gamma(2r+p+2)} \binom{-1/2}{r-s} \binom{-1/2}{s} k^{2s} x^{2r+p+1} \tag{5.1}$$

$$\int_0^x \sim \int_0^x E(x,k)\,dx^p = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^r(2r)!}{\Gamma(2r+p+2)} \binom{-1/2}{r-s} \binom{1/2}{s} k^{2s} x^{2r+p+1} \tag{5.2}$$

$$\int_0^x \sim \int_0^x \Pi(x,c,k)\,dx^p = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{(-1)^r(2r)!}{\Gamma(2r+p+2)} c^{r-s} \binom{-1/2}{s-t} \binom{-1/2}{t} k^{2t} x^{2r+p+1} \tag{5.3}$$

導出

公式15･4･1の積分演算子のパラメータを自然数 $[1,n]$から実数 $[0,p]$に解析接続する。

例 $\displaystyle \int_0^x \sim \int_0^x F\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx^{\frac{3}{2}}$

左辺は第1種楕円積分の被積分関数を *Riemann -Liouville* 積分により $3/2+1$ 階積分し、右辺は (5.1) の級数により計算する。そして任意の1点 $x=0.7$ を両辺に与えてその値を比較する。両辺は致している。

$$p = 3/2;\ m = 20;$$

$$\mathrm{Fl}[x\_, k\_] := \frac{1}{\mathrm{Gamma}[p+1]} \int_0^x (x-t)^{p+1-1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}\,dt$$

$$\mathrm{Fr}[x\_, k\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^r (2r)!}{\mathrm{Gamma}[2r+p+2]} \mathrm{Binomial}\left[-\frac{1}{2}, r-s\right] \mathrm{Binomial}\left[-\frac{1}{2}, s\right] k^{2s} x^{2r+p+1}$$

$$\mathrm{N}\left[\mathrm{Fl}\left[0.7, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right] \qquad \mathrm{N}\left[\mathrm{Fr}\left[0.7, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$$

0.130055 　　　　0.130055

15·5·2 楕円積分の項別超微分

公式15·5·2

$|x|\leqq 1$, $|k|\leqq 1$, $|c|\leqq 1$, $x\uparrow\ (=\lceil x\rceil)$

$$F(x,k)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad , \quad E(x,k)=\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$\Pi(x,c,k)=\int_0^x \frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

とするとき、非負の実数 p について次式が成立する。

$$\frac{d^p}{dx^p}F(x,k)=\sum_{r=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{\Gamma(2r-p+2)}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r-p+1} \tag{5.4}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}E(x,k)=\sum_{r=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{\Gamma(2r-p+2)}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r-p+1} \tag{5.5}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}\Pi(x,c,k)=\sum_{r=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r(2r)!}{\Gamma(2r-n+2)}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r-p+1} \tag{5.6}$$

導出

公式15·4·2の微分演算子のパラメータを自然数 $[1,n]$ から実数 $[0,p]$ に解析接続する。

例 $\dfrac{d^{3/2}}{dx^{3/2}}E\left(x,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

左辺は第2種楕円積分の2階微分を*Riemann-Liouville* 積分により $1/2$ 階積分し、右辺は (5.5) の級数により計算する。そして任意の1点 $x=0.6$ を両辺に与えてその値を比較する。両辺は一致している。

$$p=3/2;\ m=15;\quad d2[t\_,k\_]=\partial_t\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\ ;$$

$$El[x\_,k\_]:=\frac{1}{Gamma[2-p]}\int_0^x (x-t)^{2-p-1}\,d2[t,k]\,dt$$

$$Er[x\_,k\_]:=\sum_{r=Ceiling[\frac{p-1}{2}]}^{m}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{Gamma[2r-p+2]}Binomial\left[-\frac{1}{2},r-s\right]\times Binomial\left[\frac{1}{2},s\right]k^{2s}x^{2r-p+1}$$

$N\left[El\left[0.6,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right]$ 0.203623　　$N\left[Er\left[0.6,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right]$ 0.203623

2007.11.07

K. Kono

宇宙人の数学