16　2関数の積の高階積分

16･1　$f(x)g(x)$ の高階積分

16･1･1　部分高階積分

公式16･1･1

　$r=1,2,\cdots,n$ について $f^{<r>}$ は $f(x)$ の任意の r 階原始関数、$g^{(r)}$ は $g(x)$ の r 階導関数とする。$f_{a_k}^{<r>},\ g_{a_k}^{(r)}$ はそれぞれ $f^{<r>},\ g^{(r)}$ の a_k $for\ k=1,2,\cdots,n$ における関数値とする。
すると次式が成立する。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^n = f^{<n>}g^{(0)} - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{r} {}_rC_s f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>} g_{a_{n-r}}^{(s)} \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

$$- \sum_{r=1}^{n} {}_nC_r \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<r>}g^{(r)}dx^n \tag{1.1}$$

特に $a_r=a\quad for\ \ r=1,2,\cdots,n$ のとき

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^n = f^{<n>}g^{(0)} - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{r} {}_rC_s f_{a}^{<n-r+s>} g_{a}^{(s)} \frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

$$- \sum_{r=1}^{n} {}_nC_r \int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{<r>}g^{(r)}dx^n \tag{1.2}$$

特に $f^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,n)\quad or\quad g^{(s)}(a)=0\ \ (s=0,1,\cdots,n-1)$ のとき、

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^n = f^{<n>}g^{(0)} - \sum_{r=1}^{n} {}_nC_r \int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{<r>}g^{(r)}dx^n \tag{1.3}$$

証明

　部分積分の公式により次の各式が成立する。

$$\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx = f^{<1>}g^{(0)} - f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)} - \int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx \tag{001}$$

$$\int_{a_2}^{x} f^{<1>}g^{(0)}dx = f^{<2>}g^{(0)} - f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)} - \int_{a_2}^{x} f^{<2>}g^{(1)}dx \tag{102}$$

$$\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx = f^{<2>}g^{(1)} - f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)} - \int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx \tag{111}$$

$$\int_{a_3}^{x} f^{<2>}g^{(0)}dx = f^{<3>}g^{(0)} - f_{a_3}^{<3>}g_{a_3}^{(0)} - \int_{a_3}^{x} f^{<3>}g^{(1)}dx \tag{203}$$

$$\int_{a_2}^{x} f^{<2>}g^{(1)}dx = f^{<3>}g^{(1)} - f_{a_2}^{<3>}g_{a_2}^{(1)} - \int_{a_2}^{x} f^{<3>}g^{(2)}dx \tag{212}$$

$$\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx = f^{<3>}g^{(2)} - f_{a_1}^{<3>}g_{a_1}^{(2)} - \int_{a_1}^{x} f^{<3>}g^{(3)}dx \tag{221}$$

⋮

(001) の両辺を a_2 からxまで積分すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^2 = \int_{a2}^{x} f^{<1>}g^{(0)}dx - f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)}\int_{a_2}^{x}dx - \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^2$$

(102) を代入すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^2 = f^{<2>}g^{(0)} - f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)} - \int_{a_2}^{x} f^{<2>}g^{(1)}dx$$

$$- f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)}\int_{a_2}^{x}dx - \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^2$$

ここで (111) の両辺を a_2 からxまで積分すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^2 = \int_{a_2}^{x} f^{<2>}g^{(1)}dx - f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)}\int_{a_2}^{x}dx - \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx^2$$

これより次式を得る。

$$\int_{a_2}^{x} f^{<2>}g^{(1)}dx = f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)}\int_{a_2}^{x}dx + \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^2 + \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx^2$$

これを上式に代入すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^2 = f^{<2>}g^{(0)} - f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)} - \left(f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)} + f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)}\right)\int_{a_2}^{x}dx$$

$$- 2\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^2 - \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx^2 \qquad (2)$$

次に (2) の両辺を a_3 からxまで積分すると

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^3 = \int_{a_3}^{x} f^{<2>}g^{(0)}dx$$

$$- f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)}\int_{a_3}^{x}dx - \left(f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)} + f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)}\right)\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx$$

$$- 2\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^3 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx^3$$

これに (203) を代入すれば

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^3 = f^{<3>}g^{(0)} - f_{a_3}^{<3>}g_{a_3}^{(0)} - \int_{a_3}^{x} f^{<3>}g^{(1)}dx$$

$$- f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)}\int_{a_3}^{x}dx - \left(f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)} + f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)}\right)\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx$$

$$- 2\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>}g^{(1)}dx^3 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx^3$$

ここで (212) の両辺を a_3 からxまで積分すると

$$\int_{a_3}^{x} f^{<3>}g^{(1)}dx = f_{a_2}^{<3>}g_{a_2}^{(1)}\int_{a_3}^{x}dx + \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<2>}g^{(1)}dx^2 + \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<3>}g^{(2)}dx^2$$

これを用いれば

$$\begin{aligned}
\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^3 = {} & f^{<3>} g^{(0)} - f^{<3>}_{a_3} g^{(0)}_{a_3} - \left(f^{<2>}_{a_2} g^{(0)}_{a_2} + f^{<3>}_{a_2} g^{(1)}_{a_2} \right) \int_{a_3}^{x} dx \\
& - \left(f^{<1>}_{a_1} g^{(0)}_{a_1} + f^{<2>}_{a_1} g^{(1)}_{a_1} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx \\
& - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<2>} g^{(1)} dx^2 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<3>} g^{(2)} dx^2 \\
& - 2\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>} g^{(1)} dx^3 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3
\end{aligned}$$

ここで (111) と (221) の両辺をそれぞれ a_2 から x まで積分すると

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>} g^{(1)} dx^2 = \int_{a_2}^{x} f^{<2>} g^{(1)} dx - f^{<2>}_{a_1} g^{(1)}_{a_1} \int_{a_2}^{x} dx - \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^2$$

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^2 = \int_{a_2}^{x} f^{<3>} g^{(2)} dx - f^{<3>}_{a_1} g^{(2)}_{a_1} \int_{a_2}^{x} dx - \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^2$$

さらに a_3 から x まで積分すると

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>} g^{(1)} dx^3 = \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<2>} g^{(1)} dx^2 - f^{<2>}_{a_1} g^{(1)}_{a_1} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3 = \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<3>} g^{(2)} dx^2 - f^{<3>}_{a_1} g^{(2)}_{a_1} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^3$$

すなわち

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<2>} g^{(1)} dx^2 = \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>} g^{(1)} dx^3 + f^{<2>}_{a_1} g^{(1)}_{a_1} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 + \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} f^{<3>} g^{(2)} dx^2 = \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3 + f^{<3>}_{a_1} g^{(2)}_{a_1} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 + \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^3$$

これらを 上式 に代入すれば

$$\begin{aligned}
\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^3 = {} & f^{<3>} g^{(0)} - f^{<3>}_{a_3} g^{(0)}_{a_3} \\
& - \left(f^{<2>}_{a_2} g^{(0)}_{a_2} + f^{<3>}_{a_2} g^{(1)}_{a_2} \right) \int_{a_3}^{x} dx \\
& - \left(f^{<1>}_{a_1} g^{(0)}_{a_1} + 2 f^{<2>}_{a_1} g^{(1)}_{a_1} + f^{<3>}_{a_1} g^{(2)}_{a_1} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 \\
& -3\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<1>} g^{(1)} dx^3 - 3\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^3 \\
= {} & f^{<3>} g^{(0)} - f^{<3>}_{a_3} g^{(0)}_{a_3} \\
& - \sum_{s=0}^{1} {}_{1}C_{s} f^{<2+s>}_{a_2} g^{(s)}_{a_2} \int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-1+1}}^{x} dx^1 - \sum_{s=0}^{2} {}_{2}C_{s} f^{<1+s>}_{a_1} g^{(s)}_{a_1} \int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-2+1}}^{x} dx^2
\end{aligned}$$

$$- \sum_{r=1}^{3} {}_3C_r \int_{a_3}^{x} \cdots \int_{a_1}^{x} f^{<r>} g^{(r)} dx^3$$

$$= f^{<3>} g^{(0)} - f_{a_3}^{<3>} g_{a_3}^{(0)} - \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=0}^{r} {}_rC_s f_{a_{3-r}}^{<3-r+s>} g_{a_{3-r}}^{(s)} \int_{a_3}^{x} \cdots \int_{a_{3-r+1}}^{x} dx^r$$

$$- \sum_{r=1}^{3} {}_3C_r \int_{a_3}^{x} \cdots \int_{a_1}^{x} f^{<r>} g^{(r)} dx^3$$

かくして

$$\int_{a_3}^{x} \int_{a_2}^{x} \int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^3 = f^{<3>} g^{(0)} - f_{a_3}^{<3>} g_{a_3}^{(0)} - \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=0}^{r} {}_rC_s f_{a_{3-r}}^{<3-r+s>} g_{a_{3-r}}^{(s)} \int_{a_3}^{x} \cdots \int_{a_{3-r+1}}^{x} dx^r$$

$$- \sum_{r=1}^{3} {}_3C_r \int_{a_3}^{x} \cdots \int_{a_1}^{x} f^{<r>} g^{(r)} dx^3 \tag{3}$$

以下帰納法により次式を得る。

$$\int_{a_n}^{x} \cdots \int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^n = f^{<n>} g^{(0)} - f_{a_n}^{<n>} g_{a_n}^{(0)} - \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{r} {}_rC_s f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>} g_{a_{n-r}}^{(s)} \int_{a_n}^{x} \cdots \int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

$$- \sum_{r=1}^{n} {}_nC_r \int_{a_n}^{x} \cdots \int_{a_1}^{x} f^{<r>} g^{(r)} dx^n$$

そして $f_{a_n}^{<n>} g_{a_n}^{(0)}$ をΣΣ中に押し込んで (1.1) を得る。

次に、$a_r = a \quad for \quad r=1,2, \cdots ,n$ のとき、

$$\int_{a_n}^{x} \cdots \int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r = \int_{a}^{x} \cdots \int_{a}^{x} dx^r = \frac{(x-a)^r}{r!} \quad for \quad r=0,1, \cdots ,n-1$$

であるから、これを (1.1) に代入して (1.2) を得る。

最後に $f^{<r>}(a)=0 \quad (r=1,2, \cdots ,n) \quad or \quad g^{(s)}(a)=0 \quad (s=0,1, \cdots ,n-1)$ のとき、(1.3) は明らかである。 Q.E.D

Note

1階の部分積分の公式と異なり、これらの公式が直接使われることはほとんど無い。

16・1・2 2関数の積の高階積分

定理16・1・2

$r=1,2, \cdots ,m+n-1$ について $f^{<r>}$ は $f(x)$ の任意の r 階原始関数であり $g^{(r)}$ は $g(x)$ の r 階導関数とする。$f_{a_k}^{<r>}, g_{a_k}^{(r)}$ はそれぞれ $f^{<r>}, g^{(r)}$ の a_k for $k=1,2, \cdots ,n$ における関数値とし、$B(n,m)$ はベータ関数する。すると次式が成立する。

$$\int_{a_n}^{x} \cdots \int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^n = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} g^{(r)}$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} \binom{-n+r}{s} f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>} g_{a_{n-r}}^{(s)} \int_{a_n}^{x} \cdots \int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+(-1)^m \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle} g_{a_{n-r}}^{(m+s)} \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<m+k>} g^{(m+k)} dx^n \tag{2.1}$$

特に $a_r = a \quad for \;\; r=1,2,\cdots,n$ のとき

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_a^{<n-r+s>} g_a^{(s)} \frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$+(-1)^m \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_a^{\langle m+n-r+s\rangle} g_a^{(m+s)} \frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<m+k>} g^{(m+k)} dx^n \tag{2.2}$$

特に $f^{<r>}(a)=0 \;\; (r=1,2,\cdots,m+n-1) \quad or \quad g^{(s)}(a)=0 \;\; (s=0,1,\cdots,m+n-2)$ のとき

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<m+k>} g^{(m+k)} dx^n \tag{2.3}$$

証明

公式16・1・1 により、$f^{<k>}g^{(k)} \quad k=0,1,2,\cdots$ の3階積分は次のようになる。

$$\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<0>}g^{(0)}dx^3 = f^{<3>}g^{(0)}$$

$$-f_{a_3}^{<3>}g_{a_3}^{(0)} - \left(f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)} + f_{a_2}^{<3>}g_{a_2}^{(1)}\right)\int_{a_3}^x dx$$

$$-\left(f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)} + 2f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)} + f_{a_1}^{<3>}g_{a_1}^{(2)}\right)\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x dx^2$$

$$-3\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<1>}g^{(1)}dx^3 - 3\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<2>}g^{(2)}dx^3 - \int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<3>}g^{(3)}dx^3$$

$$\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<1>}g^{(1)}dx^3 = f^{<4>}g^{(1)}$$

$$-f_{a_3}^{<4>}g_{a_3}^{(1)} - \left(f_{a_2}^{<3>}g_{a_2}^{(1)} + f_{a_2}^{<4>}g_{a_2}^{(2)}\right)\int_{a_3}^x dx$$

$$-\left(f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)} + 2f_{a_1}^{<3>}g_{a_1}^{(2)} + f_{a_1}^{<4>}g_{a_1}^{(3)}\right)\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x dx^2$$

$$-3\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<2>}g^{(2)}dx^3 - 3\int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<3>}g^{(3)}dx^3 - \int_{a_3}^x\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<4>}g^{(4)}dx^3$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3 = f^{<5>} g^{(2)}$$

$$- f_{a_3}^{<5>} g_{a_3}^{(2)} - \left(f_{a_2}^{<4>} g_{a_2}^{(2)} + f_{a_2}^{<5>} g_{a_2}^{(3)} \right) \int_{a_3}^{x} dx$$

$$- \left(f_{a_1}^{<3>} g_{a_1}^{(2)} + 2 f_{a_1}^{<4>} g_{a_1}^{(3)} + f_{a_1}^{<5>} g_{a_1}^{(4)} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2$$

$$-3 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^3 - 3 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>} g^{(4)} dx^3 - \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<5>} g^{(5)} dx^3$$

$\vdots$

2番目以下の式を1番目の式に逐次代入して行くと

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^3 = f^{<3>} g^{(0)} - 3 f^{<4>} g^{(1)}$$

$$- \left(f_{a_3}^{<3>} g_{a_3}^{(0)} - 3 f_{a_3}^{<4>} g_{a_3}^{(1)} \right)$$

$$- \left(f_{a_2}^{<2>} g_{a_2}^{(0)} - 2 f_{a_2}^{<3>} g_{a_2}^{(1)} - 3 f_{a_2}^{<4>} g_{a_2}^{(2)} \right) \int_{a_3}^{x} dx$$

$$- \left(f_{a_1}^{<1>} g_{a_1}^{(0)} - f_{a_1}^{<2>} g_{a_1}^{(1)} - 5 f_{a_1}^{<3>} g_{a_1}^{(2)} - 3 f_{a_1}^{<4>} g_{a_1}^{(3)} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2$$

$$+6 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2>} g^{(2)} dx^3 + 8 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^3 + 3 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>} g^{(4)} dx^3$$

$$= f^{<3>} g^{(0)} - 3 f^{<4>} g^{(1)} + 6 f^{<5>} g^{(2)}$$

$$- \left(f_{a_3}^{<3>} g_{a_3}^{(0)} - 3 f_{a_3}^{<4>} g_{a_3}^{(1)} + 6 f_{a_3}^{<5>} g_{a_3}^{(2)} \right)$$

$$- \left(f_{a_2}^{<2>} g_{a_2}^{(0)} - 2 f_{a_2}^{<3>} g_{a_2}^{(1)} + 3 f_{a_2}^{<4>} g_{a_2}^{(2)} + 6 f_{a_2}^{<5>} g_{a_2}^{(3)} \right) \int_{a_3}^{x} dx$$

$$- \left(f_{a_1}^{<1>} g_{a_1}^{(0)} - f_{a_1}^{<2>} g_{a_1}^{(1)} + f_{a_1}^{<3>} g_{a_1}^{(2)} + 9 f_{a_1}^{<4>} g_{a_1}^{(3)} + 6 f_{a_1}^{<5>} g_{a_1}^{(4)} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2$$

$$-10 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^3 - 15 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>} g^{(4)} dx^3 - 6 \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<5>} g^{(5)} dx^3$$

$\vdots$

この式は次のように表すことができる。

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^3 = \binom{-3}{0} f^{<3>} g^{(0)} + \binom{-3}{1} f^{<4>} g^{(1)}$$

$$- \left(\binom{-3}{0} f_{a_3}^{<3>} g_{a_3}^{(0)} + \binom{-3}{1} f_{a_3}^{<4>} g_{a_3}^{(1)} \right)$$

$$- \left(\binom{-2}{0} f_{a_2}^{<2>} g_{a_2}^{(0)} + \binom{-2}{1} f_{a_2}^{<3>} g_{a_2}^{(1)} - 3 f_{a_2}^{<4>} g_{a_2}^{(2)} \right) \int_{a_3}^{x} dx$$

$$- \left(\binom{-1}{0} f_{a_1}^{<1>} g_{a_1}^{(0)} + \binom{-1}{1} f_{a_1}^{<2>} g_{a_1}^{(1)} - 5 f_{a_1}^{<3>} g_{a_1}^{(2)} - 3 f_{a_1}^{<4>} g_{a_1}^{(3)} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^2 \sum_{k=0}^{2} \frac{{}_2C_k}{2!} \frac{2(2+1)(2+2)}{2+k} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{\langle 2+k\rangle} g^{(2+k)} dx^3 \\
=&\binom{-3}{0} f^{\langle 3\rangle} g^{(0)} + \binom{-3}{1} f^{\langle 4\rangle} g^{(1)} + \binom{-3}{2} f^{\langle 5\rangle} g^{(2)} \\
&-\left(\binom{-3}{0} f_{a_3}^{\langle 3\rangle} g_{a_3}^{(0)} + \binom{-3}{1} f_{a_3}^{\langle 4\rangle} g_{a_3}^{(1)} + \binom{-3}{2} f_{a_3}^{\langle 5\rangle} g_{a_3}^{(2)} \right) \\
&-\left(\binom{-2}{0} f_{a_2}^{\langle 2\rangle} g_{a_2}^{(0)} + \binom{-2}{1} f_{a_2}^{\langle 3\rangle} g_{a_2}^{(1)} + \binom{-2}{2} f_{a_2}^{\langle 4\rangle} g_{a_2}^{(2)} \right) \int_{a_3}^{x} dx \\
&-\left(\binom{-1}{0} f_{a_1}^{\langle 1\rangle} g_{a_1}^{(0)} + \binom{-1}{1} f_{a_1}^{\langle 2\rangle} g_{a_1}^{(1)} + \binom{-1}{2} f_{a_1}^{\langle 3\rangle} g_{a_1}^{(2)} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 \\
&-\left(6 f_{a_2}^{\langle 5\rangle} g_{a_2}^{(3)} \right) \int_{a_3}^{x} dx \\
&-\left(9 f_{a_1}^{\langle 4\rangle} g_{a_1}^{(3)} + 6 f_{a_1}^{\langle 5\rangle} g_{a_1}^{(4)} \right) \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^2 \\
&+(-1)^3 \sum_{k=0}^{2} \frac{{}_2C_k}{2!} \frac{3(3+1)(3+2)}{3+k} \int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{\langle 3+k\rangle} g^{(3+k)} dx^3 \\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

ここで赤と紫の係数は次のようなパスカル型三角形の要素である。青の数は所与であり、紫の数は c_{00}^{3m} に等しい。赤の数は上段の2つの数の和として得られる。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & c_{00}^{32} & & \\
 & c_{10}^{32} & & c_{11}^{32} & \\
c_{20}^{32} & & c_{21}^{32} & & c_{22}^{32}
\end{array}
=
\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & 2 & & 3 & \\
1 & & 5 & & 3
\end{array}
=
\begin{array}{ccccc}
 & & {}_3C_1 & & \\
 & {}_2C_1 & & {}_3C_1 & \\
{}_1C_1 & & 5 & & {}_3C_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & c_{00}^{33} & & \\
 & c_{10}^{33} & & c_{11}^{33} & \\
c_{20}^{33} & & c_{21}^{33} & & c_{22}^{33}
\end{array}
=
\begin{array}{ccccc}
 & & 6 & & \\
 & 3 & & 6 & \\
1 & & 9 & & 6
\end{array}
=
\begin{array}{ccccc}
 & & {}_4C_2 & & \\
 & {}_3C_2 & & {}_4C_2 & \\
{}_2C_2 & & 9 & & {}_4C_2
\end{array}
$$

青の数が与えられれば、他の数は次式により直接計算できる。(***Lemma* 16.8.1** 参章。)

$$
c_{rs}^{3m} = \sum_{t=s-1}^{r-1} {}_tC_{s-1}\, c_{r-1-t\,0}^{3m} \qquad r,\ s \geqq 1
$$

$m=2$ のとき $c_{00}^{32} = {}_3C_1,\ c_{10}^{32} = {}_2C_1,\ c_{20}^{32} = {}_1C_1$ 　　i.e. $c_{t0}^{32} = {}_{3-t}C_1$ 　　$t=0,1,2$

これより $c_{r-1-t\,0}^{32} = {}_{3-(r-1-t)}C_1 = {}_{4-r+t}C_1$

$$
\therefore \qquad c_{rs}^{32} = \sum_{t=s-1}^{r-1} {}_tC_{s-1}\, {}_{4-r+t}C_1 \qquad r,\ s \geqq 1
$$

$m=3$ のとき $c_{00}^{33} = {}_4C_2,\ c_{10}^{33} = {}_3C_2,\ c_{20}^{33} = {}_2C_2$ 　　i.e. $c_{t0}^{33} = {}_{4-t}C_2$ 　　$t=0,1,2$

これより $c_{r-1-t\,0}^{33} = {}_{4-(r-1-t)}C_2 = {}_{5-r+t}C_2$

$$\therefore \qquad c_{rs}^{33} = \sum_{t=s-1}^{r-1} {}_tC_{s-1}\,{}_{5-r+t}C_2 \qquad r,s \geqq 1$$

かくして $\qquad c_{rs}^{3m} = \sum_{t=s-1}^{r-1} {}_tC_{s-1} \cdot {}_{m+2-r+t}C_{m-1}$

これらを用いれば上式は次のように表される。

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^3 = \sum_{r=0}^{1}\binom{-3}{r} f^{<3+r>}g^{(r)} - \sum_{s=0}^{1}\binom{-3}{s} f_{a_3}^{<3+s>}g_{a_3}^{(s)}$$

$$- \sum_{s=0}^{1}\binom{-2}{s} f_{a_2}^{<2+s>}g_{a_2}^{(s)}\int_{a_3}^{x}dx - \sum_{s=0}^{1}\binom{-1}{0} f_{a_1}^{<1+s>}g_{a_1}^{(s)}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx^2$$

$$+ c_{11}^{32} f_{a_2}^{<4>}g_{a_2}^{(2)}\int_{a_3}^{x}dx + \left(c_{21}^{32} f_{a_1}^{<3>}g_{a_1}^{(2)} + c_{22}^{32} f_{a_1}^{<4>}g_{a_1}^{(3)}\right)\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx^2$$

$$+(-1)^2\sum_{k=0}^{2}\frac{{}_2C_k}{2!}\frac{2(2+1)(2+2)}{2+k}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2+k>}g^{(2+k)}dx^3$$

$$= \sum_{r=0}^{2}\binom{-3}{r} f^{<3+r>}g^{(r)} - \sum_{s=0}^{2}\binom{-3}{s} f_{a_3}^{<3+s>}g_{a_3}^{(s)}$$

$$- \sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s} f_{a_2}^{<2+s>}g_{a_2}^{(s)}\int_{a_3}^{x}dx - \sum_{s=0}^{2}\binom{-1}{0} f_{a_1}^{<1+s>}g_{a_1}^{(s)}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx^2$$

$$- \left(c_{11}^{33} f_{a_2}^{<5>}g_{a_2}^{(3)}\right)\int_{a_3}^{x}dx - \left(c_{21}^{33} f_{a_1}^{<4>}g_{a_1}^{(3)} + c_{22}^{33} f_{a_1}^{<5>}g_{a_1}^{(4)}\right)\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx^2$$

$$+(-1)^3\sum_{k=0}^{2}\frac{{}_2C_k}{2!}\frac{3(3+1)(3+2)}{3+k}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3+k>}g^{(3+k)}dx^3$$

$$\vdots$$

すなわち

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^3 = \sum_{r=0}^{1}\binom{-3}{r} f^{<3+r>}g^{(r)}$$

$$- \sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{1}\binom{-3+r}{s} f_{a_{3-r}}^{<3-r+s>}g_{a_{3-r}}^{(s)}\int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+ (-1)^2\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=0}^{r-1} c_{r\,1+s}^{32} f_{a_{3-r}}^{<5-r+s>}g_{a_{3-r}}^{(2+s)}\int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^2\sum_{k=0}^{2}\frac{{}_2C_k}{2!}\frac{2(2+1)(2+2)}{2+k}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<2+k>}g^{(2+k)}dx^3$$

$$= \sum_{r=0}^{2}\binom{-3}{r} f^{<3+r>}g^{(r)}$$

$$- \sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\binom{-3+r}{s} f_{a_{3-r}}^{<3-r+s>}g_{a_{3-r}}^{(s)}\int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+ (-1)^3\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=0}^{r-1} c_{r\,1+s}^{33} f_{a_{3-r}}^{<6-r+s>}g_{a_{3-r}}^{(3+s)}\int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^3\sum_{k=0}^{2}\frac{{}_2C_k}{2!}\frac{3(3+1)(3+2)}{3+k}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3+k>}g^{(3+k)}dx^3$$

$\vdots$

ここで $c_{rs+1}^{3m}=\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+2-r+t}C_{m-1}$ を用いれば $0\sim m-1$ 項の展開式は次のようになる。

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^3=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-3}{r}f^{<3+r>}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-3+r}{s}f_{a_{3-r}}^{<3-r+s>}g_{a_{3-r}}^{(s)}\int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+2-r+t}C_{m-1}\,f_{a_{3-r}}^{<m+3-r+s>}g_{a_{3-r}}^{(m+s)}\int_{a_3}^{x}\cdots\int_{a_{3-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{k=0}^{2}\frac{{}_2C_k}{2!}\frac{m(m+1)(m+2)}{m+k}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^3 \tag{3}$$

同様に4階について計算すると

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^4=f^{<4>}g^{(0)}-4f^{<5>}g^{(1)}$$

$$-\left(f_{a_4}^{<4>}g_{a_4}^{(0)}-4f_{a_4}^{<4>}g_{a_4}^{(1)}\right)$$

$$-\left(f_{a_3}^{<3>}g_{a_3}^{(0)}-3f_{a_3}^{<4>}g_{a_3}^{(1)}\right)\int_{a_4}^{x}dx$$

$$-\left(f_{a_2}^{<2>}g_{a_2}^{(0)}-2f_{a_2}^{<3>}g_{a_2}^{(1)}\right)\int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}dx^2$$

$$-\left(f_{a_1}^{<1>}g_{a_1}^{(0)}-f_{a_1}^{<2>}g_{a_1}^{(1)}\right)\int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx^3$$

$$+\left(4f_{a_3}^{<5>}g_{a_3}^{(2)}\right)\int_{a_4}^{x}dx$$

$$+\left(7f_{a_2}^{<4>}g_{a_2}^{(2)}+4f_{a_3}^{<5>}g_{a_3}^{(3)}\right)\int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}dx^2$$

$$+\left(9f_{a_1}^{<3>}g_{a_1}^{(2)}+11f_{a_1}^{<4>}g_{a_1}^{(3)}+4f_{a_1}^{<5>}g_{a_1}^{(4)}\right)\int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}dx^3$$

$$+10\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<2>}g^{(2)}dx^4+20\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<3>}g^{(3)}dx^4$$

$$+15\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<4>}g^{(4)}dx^4+4\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<5>}g^{(5)}dx^4$$

$$=f^{<4>}g^{(0)}-4f^{<5>}g^{(1)}+10f^{<6>}g^{(2)}$$

$$-\left(f_{a_4}^{<4>}g_{a_4}^{(0)}-4f_{a_4}^{<5>}g_{a_4}^{(1)}+10f_{a_4}^{<6>}g_{a_4}^{(2)}\right)$$

$$-\left(f_{a_3}^{<3>}g_{a_3}^{(0)}-3f_{a_3}^{<4>}g_{a_3}^{(1)}+6f_{a_3}^{<5>}g_{a_3}^{(2)}\right)\int_{a_4}^{x}dx$$

$$- \left(f_{a_2}^{<2>} g_{a_2}^{(0)} - 2f_{a_2}^{<3>} g_{a_2}^{(1)} + 3f_{a_2}^{<4>} g_{a_2}^{(2)} \right) \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x} dx^2$$

$$- \left(f_{a_1}^{<1>} g_{a_1}^{(0)} - f_{a_1}^{<2>} g_{a_1}^{(1)} + f_{a_1}^{<3>} g_{a_1}^{(2)} \right) \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^3$$

$$- \left(10 f_{a_3}^{<6>} g_{a_3}^{(3)} \right) \int_{a_4}^{x} dx$$

$$- \left(16 f_{a_2}^{<5>} g_{a_2}^{(3)} + 10 f_{a_2}^{<6>} g_{a_2}^{(4)} \right) \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x} dx^2$$

$$- \left(19 f_{a_1}^{<4>} g_{a_1}^{(3)} + 26 f_{a_1}^{<5>} g_{a_1}^{(4)} + 10 f_{a_1}^{<6>} g_{a_1}^{(5)} \right) \int_{a_4}^{x}\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x} dx^3$$

$$- 20 \int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^4 - 45 \int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<4>} g^{(4)} dx^4$$

$$- 36 \int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<5>} g^{(5)} dx^4 - 10 \int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<6>} g^{(6)} dx^4$$

$$\vdots$$

ここで赤と紫の係数は次のようなパスカル型三角形の要素である。青の数は所与であり、紫の数は c_{00}^{4m} に等しい。赤の数は上段の2つの数の和として得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & c_{00}^{42} & & & \\ & & c_{10}^{42} & & c_{11}^{42} & & \\ & c_{20}^{42} & & c_{21}^{42} & & c_{22}^{42} & \\ c_{30}^{42} & & c_{31}^{42} & & c_{32}^{42} & & c_{33}^{42} \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 3 & & 4 & & \\ & 2 & & 7 & & 4 & \\ 1 & & 9 & & 11 & & 4 \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & & {}_4C_1 & & & \\ & & {}_3C_1 & & {}_4C_1 & & \\ & {}_2C_1 & & 7 & & {}_4C_1 & \\ {}_1C_1 & & 9 & & 11 & & {}_4C_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & c_{00}^{43} & & & \\ & & c_{10}^{43} & & c_{11}^{43} & & \\ & c_{20}^{43} & & c_{21}^{43} & & c_{22}^{43} & \\ c_{30}^{43} & & c_{31}^{43} & & c_{32}^{43} & & c_{33}^{43} \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & & 10 & & & \\ & & 6 & & 10 & & \\ & 3 & & 16 & & 10 & \\ 1 & & 19 & & 26 & & 10 \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & & {}_5C_2 & & & \\ & & {}_4C_2 & & {}_5C_2 & & \\ & {}_3C_2 & & 16 & & {}_5C_2 & \\ {}_2C_2 & & 19 & & 26 & & {}_5C_2 \end{array}$$

前と同様に、青の数が与えられれば、他の数は次式により直接計算できる。

$$c_{rs}^{4m} = \sum_{t=s-1}^{r-1} {}_tC_{s-1} \cdot {}_{m+3-r+t}C_{m-1}$$

これらを用いれば上式は次のように表される。

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^4 = \sum_{r=0}^{1} \binom{-4}{r} f^{<4+r>} g^{(r)}$$

$$- \sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{1} \binom{-4+r}{s} f_{a_{4-r}}^{<4-r+s>} g_{a_{4-r}}^{(s)} \int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_{4-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+ \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=0}^{r-1} c_{r\,1+s}^{42} f_{a_{4-r}}^{<6-r+s>} g_{a_{4-r}}^{(2+s)} \int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_{4-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+(-1)^2\sum_{k=0}^{3}\frac{{}_3C_k}{3\,!}\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{2+k}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle 2+k\rangle}g^{(2+k)}dx^4$$

$$=\sum_{r=0}^{2}\binom{-4}{r}f^{\langle 4+r\rangle}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{2}\binom{-4+r}{s}f_{a_{4-r}}^{\langle 4-r+s\rangle}g_{a_{4-r}}^{(s)}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_{4-r+1}}^{x}dx^r$$

$$-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=0}^{r-1}c_{r1+s}^{43}f_{a_{4-r}}^{\langle 7-r+s\rangle}g_{a_{4-r}}^{(3+s)}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_{4-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^3\sum_{k=0}^{3}\frac{{}_3C_k}{3\,!}\frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{3+k}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle 3+k\rangle}g^{(3+k)}dx^4$$

$$\vdots$$

ここで $c_{rs+1}^{4m}=\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+3-r+t}C_{m-1}$ を用いれば 0～ $m-1$ 項の展開式は次のようになる。

$$\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle 0\rangle}g^{(0)}dx^4=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-4}{r}f^{\langle 4+r\rangle}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-4+r}{s}f_{a_{4-r}}^{\langle 4-r+s\rangle}g_{a_{4-r}}^{(s)}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_{4-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+3-r+t}C_{m-1}\,f_{a_{4-r}}^{\langle m+4-r+s\rangle}g_{a_{4-r}}^{(m+s)}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_{4-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{k=0}^{3}\frac{{}_3C_k}{3\,!}\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{m+k}\int_{a_4}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle m+k\rangle}g^{(m+k)}dx^4$$

以下同様に計算を進めると、n 階積分の 0～ $m-1$ 項の展開式は次のようになる。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle 0\rangle}g^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f^{\langle n+r\rangle}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}f_{a_{n-r}}^{\langle n-r+s\rangle}g_{a_{n-r}}^{(s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\,f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle}g_{a_{n-r}}^{(m+s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{(n-1)\,!}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle m+k\rangle}g^{(m+k)}dx^4$$

ここで、

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{(n-1)\,!}=\frac{(m+n-1)\,!}{(n-1)\,!\,(m-1)\,!}=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(n)\Gamma(m)}=\frac{1}{B(n,m)}$$

であるから、これを代入すれば

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{\langle 0\rangle}g^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f^{\langle n+r\rangle}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>} g_{a_{n-r}}^{(s)} \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+(-1)^m \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle} g_{a_{n-r}}^{(m+s)} \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<m+k>} g^{(m+k)} dx^4 \qquad (2.1)$$

特に $a_r=a$ for $r=1,2,\cdots,n$ のとき

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_a^{<n-r+s>} g_a^{(s)} \int_a^x\cdots\int_a^x dx^r$$

$$+(-1)^m \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_a^{\langle m+n-r+s\rangle} g_a^{(m+s)} \int_a^x\cdots\int_a^x dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_a^x\cdots\int_a^x f^{<m+k>} g^{(m+k)} dx^4$$

ここで

$$\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r=\frac{(x-a)^r}{r!} \qquad r=0,1,2,\cdots,n-1$$

であるからこれを代入して (2.2) を得る。

最後に $f^{<r>}(a)=0\ (r=1,2,\cdots,m+n-1)$ or $g^{(s)}(a)=0\ (s=0,1,\cdots,m+n-2)$

のとき、(2.3) は明らかである。

Q.E.D.

Note

4･1･3 で述べたように、(2.1) 中の 1の高階積分の多項式表示は困難である。

例1 $\displaystyle\int_2^x\int_1^x e^x \sin x\, dx^2$

$n=2,\ m=3$ とすれば (2.1) より

$$\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x f^{<0>}g^{(0)}dx^2=\sum_{r=0}^{3-1}\binom{-2}{r} f^{<2+r>}g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{2-1}\sum_{s=0}^{3-1}\binom{-2+r}{s} f_{a_{2-r}}^{<2-r+s>} g_{a_{2-r}}^{(s)} \int_{a_2}^{x}\int_{a_{2-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+(-1)^3 \sum_{r=1}^{2-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{3+2-1-r+t}C_{3-1}\, f_{a_{2-r}}^{\langle 3+2-r+s\rangle} g_{a_{2-r}}^{(3+s)} \int_{a_2}^{x}\cdots\int_{a_{2-r+1}}^{x} dx^r$$

$$+\frac{(-1)^3}{B(2,3)} \sum_{k=0}^{2-1} \frac{{}_{2-1}C_k}{3+k} \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3+k>} g^{(3+k)} dx^2$$

$$= \sum_{r=0}^{2}\binom{-2}{r} f^{<2+r>} g^{(r)}$$

$$- \sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s} f_{a_2}^{<2+s>} g_{a_2}^{(s)} - \sum_{s=0}^{2}\binom{-1}{s} f_{a_1}^{<1+s>} g_{a_1}^{(s)} \int_{a_2}^{x} dx^1$$

$$- 3 f_{a_1}^{<4>} g_{a_1}^{(3)} \int_{a_2}^{x} dx$$

$$- 4\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^2 - 3\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>} g^{(4)} dx^2$$

$f = e^x$, $g = \sin x$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ とおけば

左辺: $\displaystyle \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} g^{(0)} dx^2 = \int_{2}^{x}\int_{1}^{x} e^x \sin x\, dx^2$

$$= -\frac{e^x\cos x - e^2\cos 2}{2} - \frac{e^1 x(\sin 1 - \cos 1)}{2} + e^1(\sin 1 - \cos 1)$$

次に

$$f^{<r>} = f^{<2+r>} = e^x \quad , \quad g^{(r)} = \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$$

$$f_{a_2}^{<2+s>} = e^2 , \ f_{a_1}^{<1+s>} = e^1 \quad , \quad g_{a_2}^{(s)} = \sin\left(2 + \frac{s\pi}{2}\right) , \ g_{a_1}^{(s)} = \sin\left(1 + \frac{s\pi}{2}\right)$$

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>} g^{(3)} dx^2 = \int_{2}^{x}\int_{1}^{x} e^x \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) dx^2$$

$$= -\frac{e^x\sin x - e^2\sin 2}{2} + \frac{e^1 x(\sin 1 + \cos 1)}{2} - e^1(\sin 1 + \cos 1)$$

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>} g^{(4)} dx^2 = \int_{2}^{x}\int_{1}^{x} e^x \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) dx^2$$

$$= -\frac{e^x\cos x - e^2\cos 2}{2} - \frac{e^1 x(\sin 1 - \cos 1)}{2} + e^1(\sin 1 - \cos 1)$$

これらを右辺に代入すると

右辺: $\displaystyle = e^x \sum_{r=0}^{2}\binom{-2}{r}\sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right) - e^2 \sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s}\sin\left(2 + \frac{s\pi}{2}\right)$

$$- e^1 \sum_{s=0}^{2}\binom{-1}{s}\sin\left(1 + \frac{s\pi}{2}\right)\frac{x-2}{1!} - 3e^1\sin\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{x-2}{1!}$$

$$- 4\left\{-\frac{e^x\sin x - e^2\sin 2}{2} + \frac{e^1 x(\sin 1 + \cos 1)}{2} - e^1(\sin 1 + \cos 1)\right\}$$

$$- 3\left\{-\frac{e^x\cos x - e^2\cos 2}{2} - \frac{e^1 x(\sin 1 - \cos 1)}{2} + e^1(\sin 1 - \cos 1)\right\}$$

$$= -2e^x\cos x - 2e^x\sin x + 2e^2\cos 2 + 2e^2\sin 2$$

$$+ 4x e^1\cos 1 - 8e^1\cos 1$$

$$+2e^{x}\sin x-2e^{2}\sin 2-2e^{1}x\sin 1-2e^{1}x\cos 1+4e^{1}\sin 1+4e^{1}\cos 1$$
$$+\frac{3}{2}e^{x}\cos x-\frac{3}{2}e^{2}\cos 2+\frac{3}{2}e^{1}x\sin 1-\frac{3}{2}e^{1}x\cos 1-3e^{1}\sin 1+3e^{1}\cos 1$$
$$=-\frac{1}{2}e^{x}\cos x+\frac{1}{2}e^{2}\cos 2-\frac{1}{2}e^{1}x\sin 1+\frac{1}{2}e^{1}x\cos 1+e^{1}\sin 1-e^{1}\cos 1$$

これは左辺に一致している。またこの結果が1次の積分定数多項式を含んでいることから、この2階積分は傍系であることが判る。

例2 $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x} e^{x}\sin x\,dx^{2}$

$n=2,\ m=3$ とすれば (2.1) から

$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^{2}=\sum_{r=0}^{2}\binom{-2}{r}f^{<2+r>}g^{(r)}$$
$$-\sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s}f_{a_2}^{<2+s>}g_{a_2}^{(s)}-\sum_{s=0}^{2}\binom{-1}{s}f_{a_1}^{<1+s>}g_{a_1}^{(s)}\int_{a_2}^{x}dx$$
$$-3f_{a_1}^{<4>}g_{a_1}^{(3)}\int_{a_2}^{x}dx$$
$$-4\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>}g^{(3)}dx^{2}-3\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>}g^{(4)}dx^{2}$$

$f=e^{x},\ g=\sin x,\ a_1=1\pi/4\ ,\ a_2=2\pi/4$ と置けば

左辺: $\displaystyle\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^{2}=\int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x} e^{x}\sin x\,dx^{2}=-\frac{e^{x}\cos x}{2}$

次に

$$f^{<r>}=f^{<2+r>}=e^{x}\qquad,\qquad g^{(r)}=\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$
$$f_{a_2}^{<2+s>}=e^{\frac{2\pi}{4}},\ f_{a_1}^{<1+s>}=e^{\frac{1\pi}{4}},\ g_{a_2}^{(s)}=\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{s\pi}{2}\right),\ g_{a_1}^{(s)}=\sin\left(\frac{1\pi}{4}+\frac{s\pi}{2}\right)$$
$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<3>}g^{(3)}dx^{2}=\int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x} e^{x}\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx^{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x-e^{\frac{2\pi}{4}}\sin\frac{2\pi}{4}\right)+\frac{e^{\frac{1\pi}{4}}x\sqrt{2}}{2}-\frac{e^{\frac{1\pi}{4}}\pi\sqrt{2}}{4}$$
$$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<4>}g^{(4)}dx^{2}=\int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x} e^{x}\sin\left(x+\frac{4\pi}{2}\right)dx^{2}=-\frac{e^{x}\cos x}{2}$$

これらを右辺に代入すると

右辺: $\displaystyle e^{x}\sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s}\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)-e^{\frac{2\pi}{4}}\sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{s\pi}{2}\right)$

$$- e^{\frac{1\pi}{4}} \sum_{s=0}^{2} \binom{-1}{s} \sin\left(\frac{1\pi}{4}+\frac{s\pi}{2}\right)\left(x-\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$- 3\, e^{\frac{1\pi}{4}} \sin\left(\frac{1\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$- 4\left\{ -\frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^{\frac{2\pi}{4}} \sin\frac{2\pi}{4}\right) + \frac{e^{\frac{1\pi}{4}} x\sqrt{2}}{2} - \frac{e^{\frac{1\pi}{4}} \pi\sqrt{2}}{4} \right\} + \frac{3e^x \cos x}{2}$$

$$= -2e^x \cos x \ -2e^x \sin x$$

$$+ 2e^{\frac{2\pi}{4}} + 2e^{\frac{1\pi}{4}} x\sqrt{2}$$

$$- e^{\frac{1\pi}{4}} \pi\sqrt{2}$$

$$+ 2e^x \sin x - 2e^{\frac{2\pi}{4}} - 2e^{\frac{1\pi}{4}} x\sqrt{2} + e^{\frac{1\pi}{4}} \pi\sqrt{2} + \frac{3e^x \cos x}{2}$$

$$= -\frac{e^x \cos x}{2}$$

これは左辺に一致している。またこの結果が積分定数多項式を含んでいないことから、この2階積分は直系であることが判る。

例3 $\int_0^x \int_0^x e^x \sin x \, dx^2$

$n=2,\ m=3$ とすれば (2.2) より

$$\int_a^x \int_a^x f^{<0>} g^{(0)} dx^2 = \sum_{r=0}^{2} \binom{-2}{r} f^{<2+r>} g^{(r)}$$

$$- \sum_{s=0}^{2} \binom{-2}{s} f_a^{<2+s>} g_a^{(s)} \frac{(x-a)^0}{0!} - \sum_{s=0}^{2} \binom{-1}{s} f_a^{<1+s>} g_a^{(s)} \frac{(x-a)^1}{1!}$$

$$- 3 f_a^{<4>} g_a^{(3)} \frac{(x-a)^1}{1!}$$

$$- 4 \int_a^x \int_a^x f^{<3>} g^{(3)} dx^2 - 3 \int_a^x \int_a^x f^{<4>} g^{(4)} dx^2$$

$f = e^x,\ g = \sin x,\ a = 0$ と置けば

左辺: $\int_a^x \int_a^x f^{<0>} g^{(0)} dx^2 = \int_0^x \int_0^x e^x \sin x \, dx^2 = -\frac{e^x \cos x}{2} + \frac{x+1}{2}$

次に

$$f^{<r>} = f^{<2+r>} = e^x \quad , \quad g^{(r)} = \sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$f_a^{<1+s>} = f_a^{<4>} = e^0 \quad , \quad g_a^{(s)} = \sin\frac{s\pi}{2}$$

$$\int_a^x \int_a^x f^{<3>} g^{(3)} dx^2 = \int_0^x \int_0^x e^x \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) dx^2 = -\frac{e^x \sin x}{2} + \frac{x}{2}$$

$$\int_a^x \int_a^x f^{<4>} g^{(4)} dx^2 = \int_0^x \int_0^x e^x \sin\left(x+\frac{4\pi}{2}\right) dx^2 = -\frac{e^x \cos x}{2} + \frac{x+1}{2}$$

これらを右辺に代入すると

右辺: $$= e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{-2}{r} \sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$- e^0 \sum_{r=0}^{1} \sum_{s=0}^{2} \binom{-2+r}{s} \sin\frac{s\pi}{2}\frac{x^r}{r!} - 3e^0 \sin\frac{3\pi}{2}\frac{x^1}{1!}$$

$$- 4\left(-\frac{e^x \sin x}{2} + \frac{x}{2}\right) - 3\left(-\frac{e^x \cos x}{2} + \frac{x+1}{2}\right)$$

$$= -2e^x \cos x - 2e^x \sin x + 2 + x + 3x$$

$$+ 2e^x \sin x - 2x + \frac{3e^x \cos x}{2} - \frac{3x+3}{2}$$

$$= -\frac{e^x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

これは左辺に一致している。またこの結果が1次の積分定数多項式を含んでいることから、この2階積分は傍系であることが判る。

例4 $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x \, dx^2$

$n=2$, $m=3$ とすれば (2.3) から

$$\int_a^x\int_a^x f^{<0>} g^{(0)} dx^2 = \sum_{r=0}^{2} \binom{-2}{r} f^{<n+r>} g^{(r)} + \frac{(-1)^3}{B(2,3)} \sum_{k=0}^{1} \frac{{}_1C_k}{3+k} \int_a^x\int_a^x f^{<3+k>} g^{(3+k)} dx^2$$

$$= \sum_{s=0}^{2} \binom{-2}{s} f^{<n+s>} g^{(s)} - 4\int_a^x\int_a^x f^{<3>} g^{(3)} dx^2 - 3\int_a^x\int_a^x f^{<3>} g^{(3)} dx^2$$

$f = e^x$, $g = \sin x$, $a = -\infty$ とすれば

左辺: $$\int_a^x\int_a^x f^{<0>} g^{(0)} dx^2 = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x \, dx^2 = -\frac{e^x \cos x}{2}$$

次に

$$f^{<r>} = f^{<2+r>} = e^x \qquad , \qquad g^{(r)} = \sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$\int_a^x\int_a^x f^{<3>} g^{(3)} dx^2 = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) dx^2 = -\frac{e^x \sin x}{2}$$

$$\int_a^x\int_a^x f^{<4>} g^{(4)} dx^2 = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \sin\left(x+\frac{4\pi}{2}\right) dx^2 = -\frac{e^x \cos x}{2}$$

これらを右辺に代入すると

右辺: $$= e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{-2}{r} \sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) - 4\left(-\frac{e^x \sin x}{2}\right) - 3\left(-\frac{e^x \cos x}{2}\right)$$

$$= e^x (\sin x - 2\cos x - 3\sin x) + 2e^x \sin x + \frac{3e^x \cos x}{2}$$

$$= -\frac{e^x \cos x}{2}$$

これは左辺に一致している。またこの結果が積分定数多項式を含んでいないことから、この2階積分は直系であることが判る。

Remark1

いづれも直系高階積分である例2と例4から次のことが判る。

$$\left(e^{x}\sin x\right)^{<2>} = -\frac{e^{x}\cos x}{2} = \int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x} e^{x}\sin x\,dx^{2} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^{x}\sin x\,dx^{2}$$

即ち、**関数の2積の直系高階原始関数を与える直系高階積分は一意とは限らない。**

Remark2

以上の証明過程および例1, 2から分かるように、(2.1) は無条件に成立し完璧である。しかしそれは余りにも複雑で実用的には困難である。(2.2) は付された条件の割りには殆ど簡単化されていない。

これらに対して (2.3) は最も実用的である。その条件は一見厳しそうに見えるが、実は、

$$f^{<r>} = \int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f(x)\,dx^{r} \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

とすれば問題なく$f^{<r>}(a)=0 \quad (r=1,2,\cdots,n)$となるのである。

それ故、例えば例3においては、$f^{<r>}=e^{x}$ ではなくて $f^{<r>}=e^{x}-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{x^{k}}{k!}$ を採用していれば定理の (2.2) ではなくて (2.3) が適用できたのである。尤も、こうすれば$f^{<r>}$ は傍系高階原始関数になるから、計算は反って面倒かも知れない。例4のようにf の直系高階原始関数の零点が$f\,g$ の積分下限a に一致している場合が最も計算は楽である。それ故、以下ではなるべくこのような場合を取り上げ、主として (2.3) を用いることとする。

16・1・3 Riemann-Liouville 積分表示

4・2 の定理4・2・1によれば高階積分は Riemann-Liouville 積分で

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f(x)\,dx^{n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt$$

と表されたから、これにより定理16・1・2の (2.2) , (2.3) を書き直すと次のようになる。

定理16・1・3

$r=1,2,\cdots,m+n-1$ について $f^{<r>}$ は $f(x)$ の任意の r 階原始関数であり $g^{(r)}$ は $g(x)$ の r 階導関数とする。$f_{a_k}^{<r>},\ g_{a_k}^{(r)}$ はそれぞれ $f^{<r>},\ g^{(r)}$ の a_k for $k=1,2,\cdots,n$ における関数値とし、$\Gamma(n)$ はガンマ関数、$B(n,m)$ はベータ関数する。すると次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f\,g\,dt = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)} - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_{a}^{<n-r+s>}\,g_{a}^{(s)}\,\frac{(x-a)^{r}}{r!}$$

$$+(-1)^m \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_a^{\langle m+s+n-r\rangle} g_a^{(m+s)} \frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{<m+k>} g^{(m+k)} dt \tag{3.1}$$

特に、$f^{<r>}(a)=0\ (r=1,2,\cdots,m+n-1)$ or $g^{(s)}(a)=0\ (s=0,1,\cdots,m+n-2)$ のとき

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f g\, dt = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} g^{(r)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{<m+k>} g^{(m+k)} dt \tag{3.2}$$

16・2 $x^{\alpha}f(x)$ の高階積分(総論)

$x^{\alpha}f(x)$ の高階積分には大きな特徴が2つある。即ち、

1 α が非負の整数のとき、剰余項と積分定数多項式の一部が消滅する。

2 高階積分の共通下限が0 のとき、積分定数多項式が消滅する。

公式16・2・0

$\Gamma(z)$ はガンマ関数、$B(n,m)$ はベータ関数、$f^{<r>}$ は $f(x)$ の任意の r 階原始関数、$f_{a_k}^{<r>}$ は $f^{<r>}(x)$ の a_k における関数値とするとき、自然数 n について次式が成立する。

(1)

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}x^{\alpha}dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-s)}a_{n-r}^{\alpha-s}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s\cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}$$

$$\times f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-s)}a_{n-r}^{\alpha-m-s}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<m+k>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}x^{\alpha-m-k}dx^n \tag{0.1}$$

特に $\alpha=m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}x^{m}dx^n = \sum_{r=0}^{m}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}\binom{-n+r}{s} f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-s)}a_{n-r}^{m-s}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r \tag{0.2}$$

特に $f^{<r>}(a)=0 \quad (r=1,2,\cdots,m+n-1) \quad or \quad a=0$ のとき

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{<0>}x^{\alpha}dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{<m+k>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}x^{\alpha-m-k}dx^n \tag{0.3}$$

但し、$\alpha=-1,-2,-3,\cdots$ のときは次のように読み替えるものとする。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} \longrightarrow (-1)^{-r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)} \qquad r=r,\ s,\ m+s\ ,\ m+k$$

(2) $\alpha\neq-1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha+n\neq-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} x^{\alpha}f^{(0)}dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}f^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}f_{a_{n-r}}^{(s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}$$

$$\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+m+n-r+s}f_{a_{n-r}}^{(m+s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}f^{(m+k)}dx^n \tag{0.4}$$

特に、$a=0$ or $f^{(s)}(a)=0$ $(s=0,1,\cdots,m+n-2)$ のとき

$$\int_a^x\cdots\int_a^x x^\alpha f^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}f^{(r)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}f^{(m+k)}dx^n \tag{0.5}$$

証明 (1)

$\alpha\ne-1,-2,-3,\cdots$ のときは

$$\left(x^\alpha\right)^{(r)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\quad,\quad\left(x^\alpha\right)^{(m+k)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}x^{\alpha-m-k}$$

であるからこれらを 定理16・1・2 (2.1) に代入して

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<0>}x^\alpha dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f^{<n+r>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-s)}a_{n-r}^{\alpha-s}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}$$

$$\times f_{a_{n-r}}^{\langle m+s+n-r\rangle}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-s)}a_{n-r}^{\alpha-m-s}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<m+k>}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}x^{\alpha-m-k}dx^n \tag{0.1}$$

$\alpha=m-1$ $\quad m=0,1,2,\cdots$ のときは

$$\Gamma(1+\alpha-m-s)=\pm\infty\quad s=0,1,2,3,\cdots$$

$$\Gamma(1+\alpha-m-k)=\pm\infty\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

であるから、(0.1) の $\Sigma\Sigma\Sigma$と剰余項は消滅して次のようになる。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<0>}x^{m-1}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f^{<n+r>}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-r)}x^{m-1-r}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-s)}a_{n-r}^{m-1-s}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

そこで、$m-1$ を m に置き換えて (0.2) を得る。

次に、$f^{<r>}(a)=0 \ (r=1,2,\cdots,m+n-1)$ or $a=0$ のとき、定理16･1･2 (2.3) の条件が満たされるから (0.3) を得る。

$\alpha=-1,-2,-3,\cdots$ のときは「1･1･5 ガンマ関数の性質(その1)」の (5.5) により

$$\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z-n)}=(-1)^{-n}\frac{\Gamma(1+z+n)}{\Gamma(1+z)} \qquad (n \text{ は非負の整数})$$

であったから、$-z=1+\alpha$, $n=r$ と置けば但し書を得る。

証明 (2)

$\alpha \ne -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha+n \ne -1,-2,-3,\cdots$ のときは

$$f^{<n+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r} \quad , \quad f^{<m+k>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}$$

$$f_{a_{n-r}}^{\langle n-r+s\rangle}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}$$

$$f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+m+n-r+s}$$

であるからこれらを 定理16･1･2 (2.1) に代入して

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}x^{\alpha}g^{(0)}dx^n=&\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}g^{(r)}\\&-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}\,g_{a_{n-r}}^{(s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r\\&+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\\&\qquad\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+m+n-r+s}g_{a_{n-r}}^{(m+s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r\\&+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}g^{(m+k)}dx^n\end{aligned}$$

ここで g を f に置き換えて (0.4) を得る。

次に、$a=0$ or $f^{(s)}(a)=0 \ (s=0,1,\cdots,m+n-2)$ のとき、定理16･1･2 (2.3) の条件が満たされるから (0.5) を得る。　Q.E.D.

例1 $\displaystyle\int_2^x\int_1^x\sqrt{x}\,\log x\,dx^2$

$n=2,\ m=3$, $f=\log x$, $\alpha=1/2$, $a_1=1$, $a_2=2$ と置いて左辺を直接積分すれば

左辺: $$\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}f^{<0>}x^{\alpha}dx^2=\int_2^x\int_1^x\sqrt{x}\,\log x\,dx^2$$

$$=\left(\frac{4\log x}{15}-\frac{64}{225}\right)x^{\frac{5}{2}}-\left(\frac{4\log 2}{15}-\frac{64}{225}\right)2^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{9}(x-2)$$

次に

$$f^{<r>}=(\log x)^{<r>}=\frac{\log x-\psi(1+r)-\gamma}{\Gamma(1+r)}x^{r}\,,\qquad \int_{a_2}^{x}dx^{1}=\int_{2}^{x}dx=x-2$$

$$f^{<2+r>}=\frac{\log x-\psi(1+2+r)-\gamma}{\Gamma(1+2+r)}x^{2+r}\quad,\quad f_{a_1}^{<4>}=\frac{\log 1-\psi(1+4)-\gamma}{\Gamma(1+4)}1^{4}$$

$$f_{a_2}^{<2+s>}=\frac{\log 2-\psi(1+2+s)-\gamma}{\Gamma(1+2+s)}2^{2+s}\quad,\quad f_{a_1}^{<1+s>}=\frac{\log 1-\psi(1+1+s)-\gamma}{\Gamma(1+1+s)}1^{1+s}$$

これらを(0.1)の右辺に代入すると

右辺: $$=\sum_{r=0}^{2}\binom{-2}{r}\frac{\log x-\psi(1+2+r)-\gamma}{\Gamma(1+2+r)}x^{2+r}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-r)}x^{\frac{1}{2}-r}$$

$$-\sum_{s=0}^{2}\binom{-2}{s}\frac{\log 2-\psi(1+2+s)-\gamma}{\Gamma(1+2+s)}2^{2+s}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-s)}2^{\frac{1}{2}-s}$$

$$-\sum_{s=0}^{2}\binom{-1}{s}\frac{\log 1-\psi(1+1+s)-\gamma}{\Gamma(1+1+s)}1^{1+s}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-s)}1^{\frac{1}{2}-s}(x-2)$$

$$-3\,\frac{\log 1-\psi(1+4)-\gamma}{\Gamma(1+4)}1^{4}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-3)}1^{\frac{1}{2}-3}(x-2)$$

$$-4\int_{2}^{x}\int_{1}^{x}\frac{\log x-\psi(1+3)-\gamma}{\Gamma(1+3)}x^{3}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-3)}x^{\frac{1}{2}-3}dx^{2}$$

$$-3\int_{2}^{x}\int_{1}^{x}\frac{\log x-\psi(1+4)-\gamma}{\Gamma(1+4)}x^{3}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-4)}x^{\frac{1}{2}-4}dx^{2}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\log x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\log x-\frac{11}{6}\right)-\frac{1}{32}\left(\log x-\frac{25}{12}\right)\right\}x^{\frac{5}{2}}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\log 2-\frac{11}{6}\right)-\frac{1}{32}\left(\log 2-\frac{25}{12}\right)\right\}2^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{79}{144}(x-2)+\frac{25}{256}(x-2)$$

$$-\frac{1}{15}\left(\log x-\frac{29}{10}\right)x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{15}\left(\log 2-\frac{29}{10}\right)2^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{12}(x-2)$$

$$+\frac{1}{32}\left(\log x-\frac{63}{20}\right)x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{32}\left(\log 2-\frac{63}{20}\right)2^{\frac{5}{2}}+\frac{55}{256}(x-2)$$

$$=\left(\frac{4\log x}{15}-\frac{64}{225}\right)x^{\frac{5}{2}}-\left(\frac{4\log 2}{15}-\frac{64}{225}\right)2^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{9}(x-2)$$

これは左辺と一致している。

例2 $\displaystyle\int_{2}^{x}\int_{1}^{x}x^{3}\log x\,dx^{2}$

$n=2,\ m=3\ ,\ f=\log x\ ,\ \alpha=1/2,\ \ a_1=1\ ,\ a_2=2$ と置いて左辺を直接積分すれば

左辺: $\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f^{<0>} x^{\alpha} dx^2 = \int_{2}^{x}\int_{1}^{x} x^3 \log x\, dx^2$

$$= \left(\frac{\log x}{20} - \frac{9}{400}\right)x^5 - \left(\frac{\log 2}{20} - \frac{9}{400}\right)2^5 + \frac{1}{16}(x-2)$$

次に

$$f^{<r>} = (\log x)^{<r>} = \frac{\log x - \psi(1+r) - \gamma}{\Gamma(1+r)} x^r , \qquad \int_{a_2}^{x} dx^1 = \int_{2}^{x} dx = x-2$$

$$f^{<2+r>} = \frac{\log x - \psi(1+2+r) - \gamma}{\Gamma(1+2+r)} x^{2+r}$$

$$f_{a_2}^{<2+s>} = \frac{\log 2 - \psi(1+2+s) - \gamma}{\Gamma(1+2+s)} 2^{2+s} \quad , \quad f_{a_1}^{<1+s>} = \frac{\log 1 - \psi(1+1+s) - \gamma}{\Gamma(1+1+s)} 1^{1+s}$$

これらを (0.2) の右辺に代入すると

右辺: $= \sum_{r=0}^{3} \binom{-2}{r} \frac{\log x - \psi(1+2+r) - \gamma}{\Gamma(1+2+r)} x^{2+r} \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-r)} x^{3-r}$

$$- \sum_{s=0}^{3} \binom{-2}{s} \frac{\log 2 - \psi(1+2+s) - \gamma}{\Gamma(1+2+s)} 2^{2+s} \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-s)} 2^{3-s}$$

$$- \sum_{s=0}^{3} \binom{-1}{s} \frac{\log 1 - \psi(1+1+s) - \gamma}{\Gamma(1+1+s)} 1^{1+s} \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-s)} 1^{3-s} (x-2)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}\left(\log x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{1}\left(\log x - \frac{11}{6}\right) + \frac{3}{4}\left(\log x - \frac{25}{12}\right) - \frac{1}{5}\left(\log x - \frac{137}{60}\right) \right\} x^5$$

$$- \left(\frac{\log 2}{20} - \frac{9}{400}\right)2^5 + \frac{1}{16}(x-2)$$

$$= \left(\frac{\log x}{20} - \frac{9}{400}\right)x^5 - \left(\frac{\log 2}{20} - \frac{9}{400}\right)2^5 + \frac{1}{16}(x-2)$$

例3 $\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} \sqrt{x}\, \log x\, dx^2$

$n=2, m=3$, $f = \log x$, $\alpha = 1/2$ と置いて左辺を直接積分すれば

左辺: $\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} f^{<0>} x^{\alpha} dx^2 = \int_{0}^{x}\int_{0}^{x} \sqrt{x}\, \log x\, dx^2 = \left(\frac{4 \log x}{15} - \frac{64}{225}\right) x^{\frac{5}{2}}$

次に

$$f^{<r>} = (\log x)^{<r>} = \frac{\log x - \psi(1+r) - \gamma}{\Gamma(1+r)} x^r$$

これを(0.3) の右辺に代入すると

右辺: $= \sum_{r=0}^{2} \binom{-2}{r} \frac{\log x - \psi(1+2+r) - \gamma}{\Gamma(1+2+r)} x^{2+r} \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-r)} x^{\frac{1}{2}-r}$

$$- 4\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} \frac{\log x - \psi(1+3) - \gamma}{\Gamma(1+3)} x^3 \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-3)} x^{\frac{1}{2}-3} dx^2$$

$$-3\int_0^x\int_0^x \frac{\log x-\psi(1+4)-\gamma}{\Gamma(1+4)}x^3\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-4)}x^{\frac{1}{2}-4}dx^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\log x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\log x-\frac{11}{6}\right)-\frac{1}{32}\left(\log x-\frac{25}{12}\right)\right\}x^{\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{1}{15}\left(\log x-\frac{29}{10}\right)x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{32}\left(\log x-\frac{63}{20}\right)x^{\frac{5}{2}}$$

$$=\left(\frac{4\log x}{15}-\frac{64}{225}\right)x^{\frac{5}{2}}$$

例4 $\displaystyle\int_2^x\int_1^x \sqrt{x}\sin x\,dx^2$

$f=\sin x$ とすれば

$$f^{(r)}=\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)\quad,\quad f^{(m+k)}=\sin\left\{x+\frac{(m+k)\pi}{2}\right\}$$

$$f_{a_{n-r}}^{(s)}=\sin\left(a_{n-r}+\frac{r\pi}{2}\right)\quad,\quad f_{a_{n-r}}^{(m+s)}=\sin\left\{a_{n-r}+\frac{(m+s)\pi}{2}\right\}$$

これらを (0.4) に代入すれば

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x x^\alpha\sin x\,dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}\sin\left(a_{n-r}+\frac{r\pi}{2}\right)\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}$$

$$\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+m+n-r+s}\sin\left\{a_{n-r}+\frac{(m+s)\pi}{2}\right\}\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}\sin\left\{x+\frac{(m+k)\pi}{2}\right\}dx^n$$

この右辺は大変煩雑である。ところが幸いなことに、この関数 $f=\sin x$ の場合 $m\rightarrow\infty$ とすると $\Sigma\Sigma\Sigma$ と剰余項が 0 に収束し、次式が成立する。

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x x^\alpha\sin x\,dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}\sin\left(a_{n-r}+\frac{r\pi}{2}\right)\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r$$

これに $n=2,\ \alpha=1/2,\ a_1=1\ ,\ a_2=2$ を代入すると

$$\int_2^x\int_1^x\sqrt{x}\sin x\,dx^2=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-2}{r}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2+2+r)}x^{\frac{1}{2}+2+r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$- \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-2}{s} \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2+2+s)} 2^{\frac{1}{2}+2+s} \sin\left(2+\frac{0\pi}{2}\right)$$

$$- \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2+1+s)} 1^{\frac{1}{2}+2+s} \sin\left(1+\frac{1\pi}{2}\right)(x-2)$$

この左辺を数式ソフトで直接積分し、右辺とともに図示すると次のとおりである。両辺はぴったり重なり青(左辺)は見ることができない。

左辺（直接２階積分）

- `a:=1/2:`
- `Fl := int(int(t^a*sin(t),t=1..u),u=2..x)`

$$\int_2^x \int_1^u \sqrt{t} \cdot \sin(t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u$$

右辺

- `fx := r-> sin(x+r*PI/2)`

$$r \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi \cdot r}{2}\right)$$

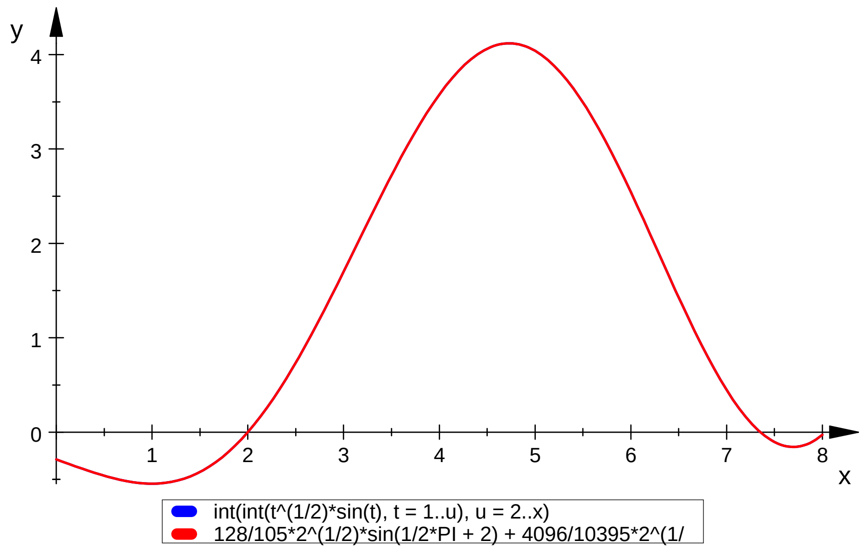
- `gx := (r,s)-> gamma(1+a)/gamma(1+a+2-r+s)*x^(a+2-r+s)`

$$(r, s) \rightarrow \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+a+2-r+s)} \cdot x^{a+2-r+s}$$

- `m:=30:`
- `f1 := sum(binomial(-2,s)*gx(0,s)*fx(s), s=0..m):`
- `f2 := -sum(binomial(-2,s)*subs(gx(0,s)*fx(s),x=2), s=0..m):`
- `f3 := -sum(binomial(-1,s)*subs(gx(1,s)*fx(s),x=1), s=0..m)*(x-2):`
- `Fr := f1+f2+f3:`

青:直接２階積分、 赤:級数

- `plotfunc2d(Fl,Fr, x=0..8)`



16・3 $x^{\alpha}f(x)$ の高階積分（各論）

本節では前節の 公式16・2・0 に色々な関数 f を代入して諸々の公式を得る。公式16・2・0 には (1) と (2) があり、どちらを選んでも等式としては問題ないのだが、我々が**欲しいのは** $x^{\alpha}f(x)$ の**直系高階積分の級数による表示**もしくは近似である。それ故 (1), (2) の選択に当ってはこのような都合の良い級数が得られる方を採用する。

またいづれの式においても、$\alpha=-1,-2,-3,\cdots$ のときは次のように読み替えるものとする。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} \quad\longrightarrow\quad (-1)^{-r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)} \qquad r=r,\ s,\ m+s\ ,\ m+k$$

16・3・1 $(ax+b)^{p}(cx+d)^{q}$ の高階積分

公式16・3・1

$p>0$ と自然数 n について次式が成立する。

$$\int_{-\frac{b}{a}}^{x}\cdots\int_{-\frac{b}{a}}^{x}(ax+b)^{p}(cx+d)^{q}dx^{n}$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(1/a)^{n+r}}{(1/c)^{r}}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p+n+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p+n+r}}{(cx+d)^{r-q}}+R_{m}^{n} \tag{1.1}$$

$$R_{m}^{n}=\frac{(-1)^{m}}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{k}}{m+k}\left(\frac{c}{a}\right)^{m+k}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p+m+k)\Gamma(1+q-m-k)}$$

$$\times\int_{-\frac{b}{a}}^{x}\cdots\int_{-\frac{b}{a}}^{x}(ax+b)^{p+m+k}(cx+d)^{q-m-k}dx^{n} \tag{1.1r}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_{m}^{n}=0$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{-\frac{b}{a}}^{x}\cdots\int_{-\frac{b}{a}}^{x}(ax+b)^{p}(cx+d)^{m}dx^{n}$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\binom{-n}{r}\frac{(1/a)^{n+r}}{(1/c)^{r}}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p+n+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p+n+r}}{(cx+d)^{r-m}} \tag{1.1'}$$

例 $\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}$ の1階積分

この原始関数の零点は $x=-4/3\ ,\ 2$ であるが、$-4/3$ を採用すると $\sqrt{x-2}$ が複素数となるため高階積分が複素関数になり具合が悪い。そこで積分下限を $x=2$ とすることにすれば

$a=1,\ b=-2,\ p=1/2\ ,\ c=3,\ d=4,\ q=1/3\ ,\ n=1$ であるから、これらを(1.1), (1.1r)に代入すれば

$$\int_{2}^{x}\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}\,dx$$

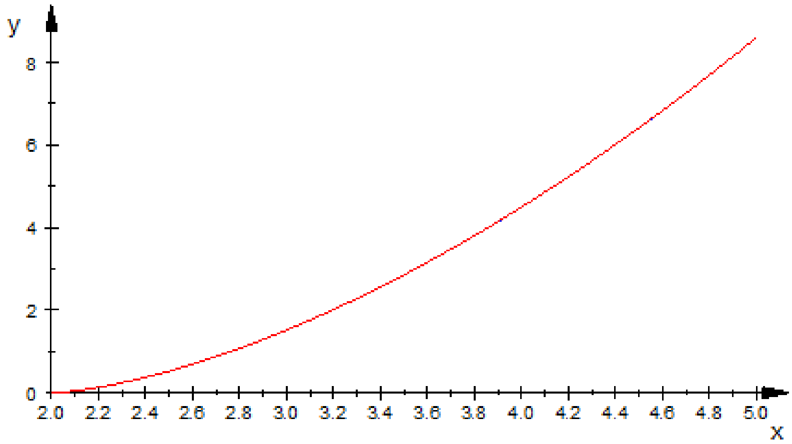
$$=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-1}{r}3^{r}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/2+r)\Gamma(4/3-r)}(x-2)^{\frac{3}{2}+r}(3x+4)^{\frac{1}{3}-r}+R_{m}^{1}$$

$$R_m^1 = (-1)^m 3^m \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(4/3)}{\Gamma(3/2+m)\Gamma(4/3-m)} \int_2^x (x-2)^{\frac{1}{2}+m}(3x+4)^{\frac{1}{3}-m} dx$$

この剰余項は $\lim_{m\to\infty} R_m^1 = 0$ となる。しかも収束は速い。$m=5$ とし、数式ソフトで両辺を計算して図示すると次のようになる。左辺は Riemann-Liouville 積分で計算している。両辺はぴったり重なっており青(左辺)は見ることができない。なお、この積分は非初等関数である。

青:左辺 , 赤:右辺

• plotfunc2d(g,f, x=2..5)



16·3·2 $x^\alpha \log x$ の高階積分

$x^\alpha \log x$ の直系高階原始関数は

$$(x^\alpha \log x)^{<1>} = \frac{x^{\alpha+1}\{(\alpha+1)\log x - 1\}}{(\alpha+1)^2}$$

$$(x^\alpha \log x)^{<2>} = \frac{x^{\alpha+2}\{(\alpha+1)(\alpha+2)\log x - 2\alpha - 3\}}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2}$$

$$(x^\alpha \log x)^{<3>} = \frac{x^{\alpha+3}\{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\log x - 3\alpha^2 - 12\alpha - 11\}}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2}$$

$\vdots$

そして $\alpha > -n$ のとき、これらの零点は $x=0$ である。

公式16·3·2

$\Gamma(z), \psi(z)$ をそれぞれガンマ関数、プサイ関数とするとき、$\alpha+n>0$ なる α と自然数 n について次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x \, dx^n = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \frac{\log x - \psi(1+n+r) - \gamma}{\Gamma(1+n+r)} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha+n} + R_m^n \tag{2.1}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_0^x \cdots \int_0^x \frac{\log x - \psi(1+m+k) - \gamma}{\Gamma(1+m+k)} \frac{\Gamma(1+\alpha)x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha-m-k)} dx^n \tag{2.1r}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_m^n = 0$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^m \log x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\log x - \psi(1+n+r) - \gamma}{\Gamma(1+n+r)} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m+n} \tag{2.1'}$$

完全自己同形

　公式16･3･2 をよく見ると剰余項の中に左辺と全く同形の積分が含まれていることに気付く。このような場合には移項処理をして目的の積分を取り出すことができる。

公式16･3･2'

　$\alpha+n>0$ なる α , n について次式が成立する。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x\, dx^n$$

$$= \frac{\dfrac{\log x - \psi(1+n) - \gamma}{\Gamma(1+n)} + n \dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(1+k)^2} \frac{\psi(2+k)+\gamma}{B(1+k,\alpha-k)}}{1 + n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(1+k)^2} \frac{1}{B(1+k,\alpha-k)}} x^{\alpha+n} \tag{2.2}$$

導出

(2.1), (2.1r) において $m=1$ とすれば

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x\, dx^n = \sum_{r=0}^{1-1} \binom{-n}{0} \frac{\log x - \psi(1+n+0) - \gamma}{\Gamma(1+n+0)} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-0)} x^{\alpha+n} + R_1^n$$

$$R_1^n = \frac{(-1)^1}{B(n,1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{1+k} \int_0^x \cdots \int_0^x \frac{\log x - \psi(1+1+k) - \gamma}{\Gamma(1+1+k)} \frac{\Gamma(1+\alpha) x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha-1-k)} dx^n$$

$$= -n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{1+k} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2+k)\Gamma(\alpha-k)} \int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x\, dx^n$$

$$+ n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{1+k} \frac{\Gamma(1+\alpha)\{\psi(2+k)+\gamma\}}{\Gamma(2+k)\Gamma(\alpha-k)} \int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha dx^n$$

ここで

$$\Gamma(2+k) = (1+k)\Gamma(1+k) \quad , \quad \int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha dx^n = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)} x^{\alpha+n}$$

を代入すれば

$$R_m^n = -n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(1+k)^2} \frac{1}{B(1+k,\alpha-k)} \int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x\, dx^n$$

$$+ n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(1+k)^2} \frac{\psi(2+k)+\gamma}{B(1+k,\alpha-k)} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)} x^{\alpha+n}$$

かくて

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x\, dx^n = \frac{\log x - \psi(1+n) - \gamma}{\Gamma(1+n)} x^{\alpha+n}$$

$$- n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(1+k)^2} \frac{1}{B(1+k,\alpha-k)} \int_0^x \cdots \int_0^x x^\alpha \log x\, dx^n$$

$$+\,n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{(1+k)^2}\frac{\psi(2+k)+\gamma}{B(1+k,\alpha-k)}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)}x^{\alpha+n}$$

となるから、これより (2.2) を得る。

例　$\boldsymbol{n=1}$ のとき

$$\int_0^x x^\alpha \log x\,dx = \frac{\dfrac{\log x-\psi(2)-\gamma}{\Gamma(2)}+\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)}\dfrac{{}_0C_0}{1^2}\dfrac{\psi(2)+\gamma}{B(1,\alpha)}}{1+\dfrac{{}_0C_0}{1^2}\dfrac{1}{B(1,\alpha)}}x^{\alpha+1}$$

$$=\frac{\log x-1+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}}{1+\alpha}x^{\alpha+1}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log x-\frac{1}{\alpha+1}\right)$$

となる。尤も、この場合は直接積分した方がはるかに楽である。

16·3·3　$\boldsymbol{x^\alpha \sin x,\ x^\alpha \cos x}$ の高階積分

$x^3\sin x$ の直系高階原始関数は

$$\left(x^3\sin x\right)^{<1>}=\left(3x^2-6\right)\sin x-\left(x^3-6x\right)\cos x$$

$$\left(x^3\sin x\right)^{<2>}=-\left(6x^2-24\right)\cos x-\left(x^3-18x\right)\sin x$$

$$\left(x^3\sin x\right)^{<3>}=-\left(9x^2-60\right)\sin x+\left(x^3-36x\right)\cos x$$

$$\left(x^3\sin x\right)^{<4>}=\left(12x^2-120\right)\cos x+\left(x^3-60x\right)\sin x$$

$$\vdots$$

となる。そしてこれらの零点は $x=0$, $4.9762\cdots$, 0 , $3.1224\cdots$, 0 , $\cdots$ である。従って $x^3\sin x$ の直系高階積分の下限は可変下限である。これは上記の超越方程式を解くことによって得られる。同様に任意の実数 α について $x^\alpha\sin x$ の直系高階積分の下限も可変下限となる。

公式16·3·3

(1)　$m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x x^m\sin x\,dx^n=\sum_{r=0}^m\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\sin\left\{x-\frac{(n+r)\pi}{2}\right\}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^m\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-s)}a_{n-r}^{m-s}\sin\left\{a_{n-r}-\frac{(n-r+s)\pi}{2}\right\}\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r \tag{3.1}$$

特に a_1 , a_2 , $\cdots$, a_n が $x^m\sin x$ の直系高階原始関数の零点のとき

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x x^m\sin x\,dx^n=\sum_{r=0}^m\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\sin\left\{x-\frac{(n+r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1'}$$

(2)　$\alpha\ne-1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha+n\ne-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} x^{\alpha}\sin x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$
$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}\sin\left(a_{n-r}+\frac{s\pi}{2}\right)\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$
$$+R_m^n \tag{3.2}$$

$$R_m^n = (-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}$$
$$\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+m+n-r+s}\sin\left\{a_{n-r}+\frac{(m+s)\pi}{2}\right\}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$
$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}\sin\left\{x+\frac{(m+k)\pi}{2}\right\}dx^n$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^n = 0$$

なお、$x^{\alpha}\cos x$ の公式は $\sin x$ を $\cos x$ に置換するだけで得られる。

例1

$$\int_2^x\int_1^x x^3\sin x\, dx^2 = \sum_{r=0}^{3}\binom{-2}{r}\sin\left\{x-\frac{(2+r)\pi}{2}\right\}\frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-r)}x^{3-r}$$
$$-\sum_{s=0}^{3}\binom{-2}{s}\sin\left\{2-\frac{(2+s)\pi}{2}\right\}\frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-s)}2^{3-s}$$
$$-\sum_{s=0}^{3}\binom{-1}{s}\sin\left\{1-\frac{(1+s)\pi}{2}\right\}\frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-s)}1^{3-s}(x-2)$$
$$= -\left(x^3-18x\right)\sin x - \left(6x^2-24\right)\cos x$$
$$+ (3x-6)\sin 1 - (5x-10)\cos 1 - 28\sin 2$$

特に $a_1=0$, $a_2=4.9762\cdots$ のとき、次の直系積分が得られる。

$$\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x x^3\sin x\, dx^2 = \sum_{r=0}^{3}\binom{-2}{r}\sin\left\{x-\frac{(2+r)\pi}{2}\right\}\frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-r)}x^{3-r}$$
$$= -\left(x^3-18x\right)\sin x - \left(6x^2-24\right)\cos x$$

例2

前節 16･2の例4 を参章。

16･3･4 $x^{\alpha}\sinh x$, $x^{\alpha}\cosh x$ の高階積分

$x^3\sinh x$ の直系高階原始関数は

$$\left(x^3\sinh x\right)^{<1>} = e^{-x}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}+3x+3\right) + e^{x}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{2}+3x-3\right)$$
$$\left(x^3\sinh x\right)^{<2>} = -e^{-x}\left(\frac{x^3}{2}+3x^2+9x+12\right) - e^{x}\left(-\frac{x^3}{2}+3x^2-9x+12\right)$$

$\vdots$

となる。そしてこれらの零点は $x=0\ ,\ 2.7085\cdots\ ,\ 0\ ,\ 3.1224\,i\cdots\ ,\ 0\ ,\ \cdots$ である。従って $x^3 sinh\,x$ の直系高階積分の下限は可変下限である。これは上記の超越方程式を解くことによって得られる。同様に任意の実数 α について $x^\alpha sinh\,x$ の直系高階積分の下限も可変下限となる。

公式16・3・4

(1)　$m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} x^m sinh\,x\,dx^n = \sum_{r=0}^{m}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^x-(-1)^{n+r}e^{-x}}{2}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-s)}a_{n-r}^{m-s}\frac{e^{a_{n-r}}-(-1)^{n-r+s}e^{-a_{n-r}}}{2}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r \tag{4.1}$$

特に $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \cdots\ ,\ a_n$ が $x^m sinh\,x$ の直系高階原始関数の零点のとき

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} x^m sinh\,x\,dx^n = \sum_{r=0}^{m}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^x-(-1)^{n+r}e^{-x}}{2} \tag{4.1'}$$

(2)　$\alpha\ne -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha+n\ne -1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} x^\alpha sinh\,x\,dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+n-r+s}\frac{e^{a_{n-r}}-(-1)^{-s}e^{-a_{n-r}}}{2}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+R_m^n \tag{4.2}$$

$$R_m^n=(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}$$

$$\times\quad\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+n-r+s)}a_{n-r}^{\alpha+m+n-r+s}\frac{e^{a_{n-r}}-(-1)^{-m-s}e^{-a_{n-r}}}{2}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}\frac{e^x-(-1)^{-m-k}e^{-x}}{2}dx^n$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^n=0$$

なお、$x^\alpha cosh\,x$ の公式は $sinh\,x$ を $cosh\,x$ に置換し $-(-1)$ を $+(-1)$ に変更して得る。

例　$\displaystyle\int_2^x\int_1^x\sqrt{x}\,sinh\,x\,dx^2$

(4.2) より

$$\int_2^x\int_1^x\sqrt{x}\,sinh\,x\,dx^2=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-2}{r}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2+2+r)}x^{\frac{1}{2}+2+r}\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$-\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-2}{s}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2+2+s)}2^{\frac{1}{2}+2+s}\frac{e^{2}-(-1)^{-s}e^{-2}}{2}$$
$$-\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-1}{s}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2+1+s)}1^{\frac{1}{2}+2+s}\frac{e^{1}-(-1)^{-s}e^{-1}}{2}(x-2)$$

この左辺を数式ソフトで直接積分し、右辺とともに図示すると次のとおりである。両辺はぴったり重なり青(左辺)は見ることができない。

左辺（直接2階積分）

```
• a:=1/2:
• Fl := int(int(t^a*sinh(t),t=1..u),u=2..x)
```

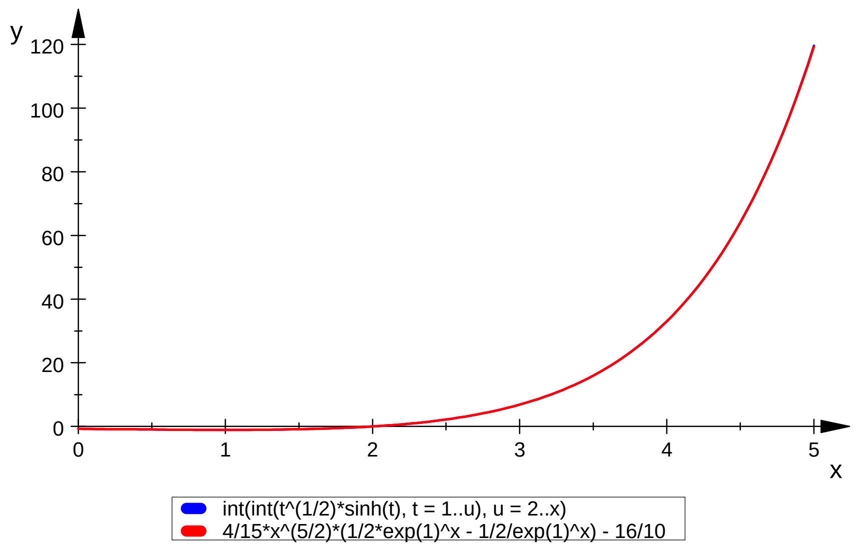
$$\int_{2}^{x}\int_{1}^{u}\sqrt{t}\cdot\sinh(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

右辺

```
• fx := r-> (E^x-(-1)^-r*E^-x)/2:
• gx := (r,s)-> gamma(1+a)/gamma(1+a+2-r+s)*x^(a+2-r+s):
• m:=15:
• f1 := sum(binomial(-2,s)*gx(0,s)*fx(s), s=0..m):
• f2 := -sum(binomial(-2,s)*subs(gx(0,s)*fx(s),x=2), s=0..m):
• f3 := -sum(binomial(-1,s)*subs(gx(1,s)*fx(s),x=1), s=0..m)*(x-2):
• Fr := f1+f2+f3:
```

青:直接2階積分、 赤:級数

```
• plotfunc2d(Fl,Fr, x=0..5)
```



16·4 $\log x\ f(x)$ の高階積分

16·4·1 $(\log x)^2$ の高階積分

$(\log x)^2$ の直系高階原始関数は

$$\{(\log x)^2\}^{<1>} = x(\log x(\log x - 2)+2)$$

$$\{(\log x)^2\}^{<2>} = \frac{1}{4}x^2(2\log x(\log x - 3)+7)$$

$$\{(\log x)^2\}^{<3>} = \frac{1}{108}x^3(6\log x(3\log x - 11)+85)$$

$$\vdots$$

となる。そしてこれらの零点は $x=0$ である。

公式16·4·1

調和数を $H_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \psi(1+n)+\gamma$ と表すとき、次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log^2 x\,dx^n = \log x(\log x - H_n)\frac{x^n}{n!}$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(1+n+r)}x^n(\log x - H_{n+r})+R_m^n \tag{1.1}$$

$$R_m^n = \frac{1}{B(n,m)}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{(m+k)^2}(\log x - H_n - H_{m+k}) \tag{1.1r}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^n = 0$$

導出

$f(x)=g(x)=\log x$ であるから $f^{<r>}(0)=0$ $(r=1,2,\cdots,m+n-1)$。よって定理16·1·2 の (2.3) が適用される。

$$(\log x)^{<n+r>} = \frac{\log x - \psi(1+n+r)-\gamma}{\Gamma(1+n+r)}x^{n+r}\ ,\quad (\log x)^{(r)} = (-1)^{r-1}\frac{\Gamma(r)}{x^r}$$

であるからこれらを代入すれば

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log^2 x\,dx^n = \frac{\{\log x - \psi(1+n)-\gamma\}\log x}{\Gamma(1+n)}x^n$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1}\binom{-n}{r}\frac{\{\log x - \psi(1+n+r)-\gamma\}\Gamma(r)}{\Gamma(1+n+r)}x^n + R_m^n$$
$$=\log x(\log x - H_n)\frac{x^n}{n!}+\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1}\binom{-n}{r}\frac{(\log x - H_{n+r})\Gamma(r)}{\Gamma(1+n+r)}x^n + R_m^n$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{\log x - \psi(1+m+k)-\gamma}{\Gamma(1+m+k)}x^{m+k}(-1)^{m+k-1}\frac{\Gamma(m+k)}{x^{m+k}}dx^n$$
$$=\frac{1}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{(m+k)^2}\int_0^x\cdots\int_0^x\{\log x - \psi(1+m+k)-\gamma\}dx^n$$

$$= \frac{1}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(m+k)^2} \left\{ \frac{\log x - \psi(1+n) - \gamma}{\Gamma(1+n)} - \frac{\psi(1+m+k)+\gamma}{\Gamma(1+n)} \right\} x^n$$

$$= \frac{1}{B(n,m)} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{(m+k)^2} \left(\log x - H_n - H_{m+k} \right)$$

と導出される。

例　$(\log x)^2$ の3階積分

(1.1) において $n=3,\ m=1000$ とし、数式ソフトで両辺を計算して図示すれば次のようになる。対数系の常で非常に収束が遅く、両辺はぴったりとは重なっていない。

左辺（直接積分）

```
• g := int(int(int(ln(x)^2,x),x),x)
```

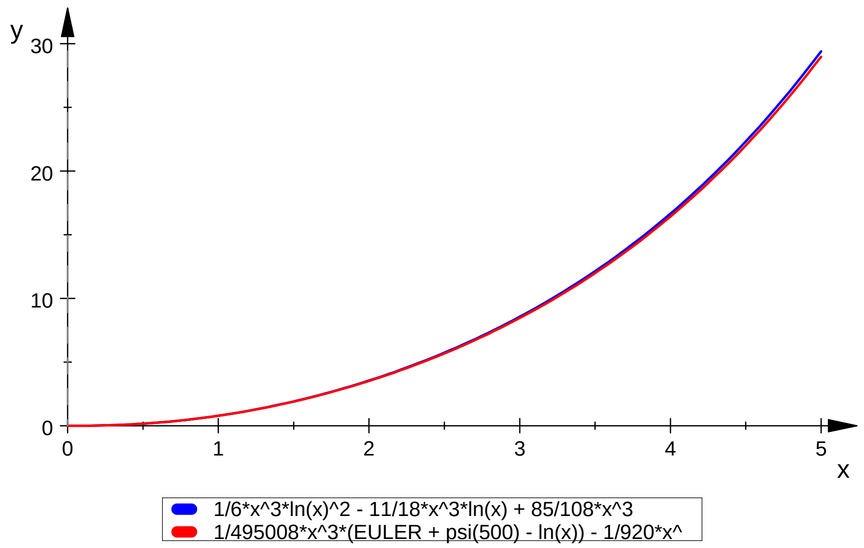
$$\frac{x^3 \cdot \ln(x)^2}{6} - \frac{11 \cdot x^3 \cdot \ln(x)}{18} + \frac{85 \cdot x^3}{108}$$

級数

```
• n:=3: m:=1000: MAXDEPTH:=1000:
• f := ln(x)*(ln(x)-psi(1+n)-EULER)*x^n/gamma(1+n) +
       sum((-1)^(r-1)*binomial(-n,r)*(ln(x)-psi(1+n+r)-EULER)
                          *gamma(r)/gamma(1+n+r)*x^n, r=1..m-1):
```

青:左辺　、赤:級数

```
• plotfunc2d(g,f, x=0..5)
```



16・5 $e^x f(x)$ の高階積分

16・5・1 $e^x x^\alpha$ の高階積分

$e^x x^\alpha$ の直系高階原始関数は不完全ガンマ関数 $\Gamma(a,x)$ を用いて次のように表される。

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{<1>} = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha,-x)x^0}{0!} \qquad \left\{= -x^{\alpha+1}E_{-\alpha}(-x)\right\}$$

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{<2>} = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\frac{\Gamma(2+\alpha,-x)x^0+\Gamma(1+\alpha,-x)x^1}{1!}$$

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{<3>} = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\frac{\Gamma(3+\alpha,-x)x^0+2\Gamma(2+\alpha,-x)x^1+\Gamma(1+\alpha,-x)x^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{<n>} = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-x)x^r}{(n-1)!}$$

これらの零点は $-\infty$ であり且つ積分定数多項式を含まないから確かに $e^x x^\alpha$ の直系高階原始関数である。そして $(-x)^\alpha$ から明らかなように、これらの関数は一般的に複素関数となる。

これらより直ちに $e^x x^\alpha$ の直系高階積分が得られそうに思えるがそうは参らない。これらを n 回微分すると確かに $e^x x^\alpha$ になるが、これらを数値計算してみると $x>0$ のときは虚数の符号が数値積分や Riemmann-Liouville 積分の結果と逆になるのである。即ち、これらは $x\leqq 0$ のときにのみ正しくて $x>0$ のときは正しくない。そこで筆者は $x>0$ のときにも成立する次の公式を発見した。

公式16・5・1

不完全ガンマ関数を $\Gamma(a,x)=\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ とするとき、$\alpha\neq -1,-2,-3,\cdots$ について次式が成立する。

(1) $x\leqq 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^x\cdots\int_{-\infty}^x x^\alpha e^x dx^n = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-x)x^r}{(n-1)!} \tag{1.n$^-$}$$

(2) $x>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^x\cdots\int_{-\infty}^x x^\alpha e^x dx^n = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-x)x^r}{(n-1)!} + 2i\sin\alpha\pi\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r\,\Gamma(n-r+\alpha)x^r}{(n-1)!} \tag{1.n$^+$}$$

証明

先に述べたように $e^x x^\alpha$ の直系高階原始関数は

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{<n>} = \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r\,\Gamma(n-r+\alpha,\ -x)\,x^r}{(n-1)!}$$

であったから、$x<0$ のときには直ちに (1.n$^-$) が成立する。

そして $\alpha \neq -1, -2, -3, \cdots$ のとき

$$\frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha} = \begin{cases} (-1)^\alpha & x \leqq 0 \\ (-1)^{-\alpha} & x>0 \end{cases}$$

であるから、$x=0$ のときにも (1.n$^-$) は $x\to -0$ の極限値として成立する。

$x>0$ のときには $[-\infty, 0]$ と $[0, x]$ とに分けて計算することにする。$e^x x^\alpha$ の直系高階積分を Riemann-Liouville 積分で分けて表示すると、

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{0}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t\,dt + \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t\,dt \qquad \text{(w)}$$

第1項の計算

$x\leqq 0$ であるから $x^\alpha/(-x)^\alpha = (-1)^\alpha$ 。よって

$$\int_{-\infty}^{0}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t\,dt$$

$$= \left[(x-t)^{n-1}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right]_{-\infty}^{0} + (n-1)\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

$$= \left[(x-t)^{n-1}\frac{t^\alpha}{(-t)^\alpha}\frac{t^0\,\Gamma(1+\alpha, -t)}{0!}\right]_{-\infty}^{0} + (n-1)\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

$$= (-1)^\alpha x^{n-1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{0!} + (n-1)\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

次に

$$\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

$$= \left[(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right]_{-\infty}^{0} + (n-2)\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-3}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right\}dt$$

$$= (-1)^\alpha x^{n-2}\frac{\Gamma(2+\alpha)}{1!} + (n-2)\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-3}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right\}dt$$

次に

$$\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-3}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right\}dt$$

$$= (-1)^\alpha x^{n-3}\frac{\Gamma(3+\alpha)}{2!} + (n-3)\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^{n-4}\left(t^\alpha e^t\right)^{<3>}\right\}dt$$

$$\vdots$$

と続けて最後 $n-1$ 回目は

$$\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^1\left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}\right\}dt$$

$$=(-1)^\alpha x^1\frac{\Gamma(n-1+\alpha)}{(n-2)!}+1\cdot\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^0\left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}\right\}dt$$

となる。これらを順次前の式に代入して行けば

$$\int_{-\infty}^{0}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t dt=(-1)^\alpha\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}\Gamma(n-r+\alpha)x^r$$

$$+(n-1)!\int_{-\infty}^{0}\left\{(x-t)^0\left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}\right\}dt$$

かくして

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{0}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t dt=(-1)^\alpha\sum_{r=1}^{n-1}{}_{n-1}C_r\frac{\Gamma(n-r+\alpha)x^r}{(n-1)!}$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}dt \tag{w1}$$

第2項の計算

$x>0$ であるから $x^\alpha/(-x)^\alpha=1/(-1)^\alpha$ 。よって

$$\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}t^\alpha e^t dt$$

$$=\left[(x-t)^{n-1}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right]_0^x+(n-1)\int_0^x\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

$$=\left[(x-t)^{n-1}\frac{t^\alpha}{(-t)^\alpha}\frac{t^0\,\Gamma(1+\alpha,-t)}{0!}\right]_0^x+(n-1)\int_0^x\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

$$=-\frac{x^{n-1}}{(-1)^\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{0!}+(n-1)\int_0^x\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

次に

$$\int_{0}^{x}\left\{(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<1>}\right\}dt$$

$$=\left[(x-t)^{n-2}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right]_0^x+(n-2)\int_0^x\left\{(x-t)^{n-3}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right\}dt$$

$$=-\frac{x^{n-2}}{(-1)^\alpha}\frac{\Gamma(2+\alpha)}{1!}+(n-2)\int_0^x\left\{(x-t)^{n-3}\left(t^\alpha e^t\right)^{<2>}\right\}dt$$

と続けて最後 $n-1$ 回目は

$$\int_{0}^{x}\left\{(x-t)^1\left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}\right\}dt$$

$$=-\frac{x^1}{(-1)^\alpha}\frac{\Gamma(n-1+\alpha)}{(n-2)!}+1\cdot\int_0^x\left\{(x-t)^0\left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}\right\}dt$$

となる。これらを順次前の式に代入して行けば

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} t^\alpha e^t dt = -\frac{1}{(-1)^\alpha}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}\Gamma(n-r+\alpha)x^r$$
$$+(n-1)!\int_0^x \left\{(x-t)^0 \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>}\right\} dt$$

かくして

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1} t^\alpha e^t dt = -\frac{1}{(-1)^\alpha}\sum_{r=1}^{n-1} {}_{n-1}C_r \frac{\Gamma(n-r+\alpha)x^r}{(n-1)!}$$
$$+\int_0^x \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>} dt \tag{w2}$$

合算

(w1), (w2) を (w) に代入すれば

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^x (x-t)^{n-1} t^\alpha e^t dt = \left\{(-1)^\alpha - \frac{1}{(-1)^\alpha}\right\}\sum_{r=1}^{n-1} {}_{n-1}C_r \frac{\Gamma(n-r+\alpha)x^r}{(n-1)!}$$
$$+\int_{-\infty}^0 \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>} dt + \int_0^x \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>} dt$$

ここで

$$(-1)^\alpha - \frac{1}{(-1)^\alpha} = 2i\sin\alpha\pi \qquad \left\{= \frac{2\pi i}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right\}$$
$$\int_{-\infty}^0 \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>} dt + \int_0^x \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>} dt = \int_{-\infty}^x \left(t^\alpha e^t\right)^{<n-1>} dt = \left(x^\alpha e^x\right)^{<n>}$$
$$= \frac{x^\alpha}{(-x)^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r \Gamma(n-r+\alpha, -x)x^r}{(n-1)!}$$

であるから、これらを上式に代入して $(1.n^+)$ を得る。

Q.E.D

例　$e^x\sqrt{x}$ の2階積分

$\alpha=1/2$, $n=2$ を上の $(1.n^-)$, $(1.n^+)$ に代入し任意の2点 $x=\pm1.7$ における値を計算するとそれぞれ次のようになる。

左辺: Riemann-Liouville integral

```
• a:=1/2: n:=2:
• G := x-> 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*t^a*E^t, t=-infinity..x)
```

$$x \to \frac{1}{\Gamma(n)}\cdot\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{n-1}\cdot t^a\cdot E^t\,dt$$

```
• float(G(-1.7)); float(G(1.7))
```

$0.3457294964\cdot i$

$2.255551158 + 2.835926162\cdot i$

右辺： 不完全ガンマ関数による高階積分

x <= 0

- `Fm := x-> x^a/(-x)^a*(1/(n-1)!)*sum(binomial(n-1,r)*igamma(n-r+a,-x)*x^r, r=0..n-1)`

$$x \to \frac{x^a}{(-x)^a} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \cdot \Gamma(n-r+a,\ -x) \cdot x^r \right)$$

- `float(Fm(-1.7))`

$$0.3457294964 \cdot \mathrm{i}$$

x > 0

- `Fp := x-> Fm(x)+2*I*sin(a*PI)/(n-1)!*sum(binomial(n-1,r)*gamma(n-r+a)*x^r, r=0..n-1)`

$$x \to \mathrm{Fm}(x) + \frac{2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi \cdot a)}{(n-1)!} \cdot \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \cdot \Gamma(n-r+a) \cdot x^r \right)$$

- `float(Fp(1.7))`

$$2.255551158 + 2.835926161 \cdot \mathrm{i}$$

α が自然数のときには x^{α} を微分し切ることができ、次式が成立する。

公式16･5･1’

$m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x x^m dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \tag{1.n'}$$

証明

公式16･2･0 の (0.2) において $f(x)=e^x$ とすれば $a_1=a_2=\cdots=a_n=-\infty$ であるから

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x x^m dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r}$$
$$- e^{-\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} \binom{-n+r}{s} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-s)} (-\infty)^{m-s} \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} dx^r$$

となるが、この2行目は明らかに0であるから直ちに (1.n’) を得る。

例　$e^x x^4$ の5階積分

$m=4$, $n=5$ とし、これらを(1.n’)に代入すれば

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x x^4 dx^5 = e^x \sum_{r=0}^{4} \binom{-5}{r} \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-r)} x^{4-r} = e^x \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4+r}{4} \frac{4!}{(4-r)!} x^{4-r}$$

この両辺を数式ソフトで計算すると次のようになる。

左辺: Riemann-Liouville integral

- m:=4: n:=5:
- g := 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*t^m*E^t, t=-infinity..x)

$$e^x\cdot\left(x^4-20\cdot x^3+180\cdot x^2-840\cdot x+1680\right)$$

右辺: 公式

- f := E^x*sum(binomial(-n,r)*gamma(1+m)/gamma(1+m-r)
  *x^(m-r), r=0..m)

$$e^x\cdot\left(x^4-20\cdot x^3+180\cdot x^2-840\cdot x+1680\right)$$

$e^x x^\alpha$ の傍系高階積分

0 を零点とする傍系高階積分に関しては 公式16･2･0 の (0.5) から次の公式が得られる。

公式16･5･1”

$\alpha \ne -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha+n>0$ なる α , n について次式が成立する。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x e^x x^\alpha dx^n = e^x\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r} + R_m^n \tag{1.n″}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}\int_0^x\cdots\int_0^x e^x x^{\alpha+m+k}dx^n$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^n = 0$$

例　$e^x\sqrt[3]{x}$ の傍系2階積分

この関数は正領域において図示することができる。青(Riemann-Liouville 積分)は赤(級数)に隠れて見ることができない。負領域では複素関数となるが勿論両辺一致している。

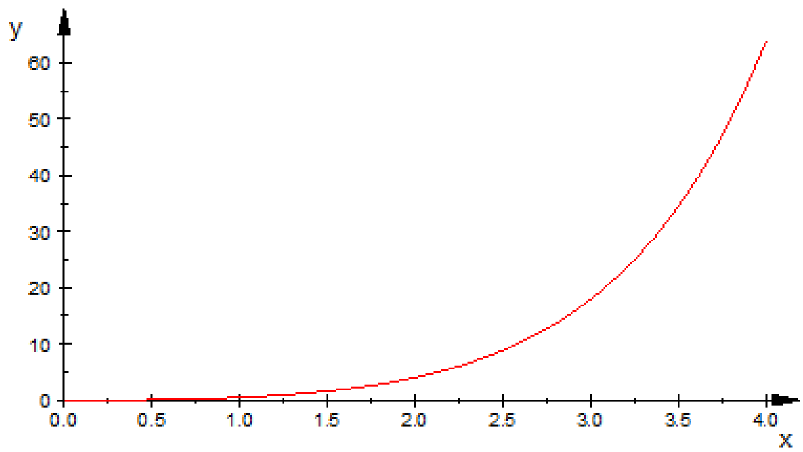
左辺: Riemann-Liouville integral

- a:=1/3: n:=2:
- g := x-> 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*t^a*E^t, t=0..x):

右辺: 級数

- m:=20:
- f := x-> E^x*sum(binomial(-n,r)*gamma(1+a)/gamma(1+a+n+r)
  *x^(a+n+r), r=0..m-1):

青:左辺、 赤:右辺



16・5・2 $e^x \log x$ の高階積分

公式16・5・2

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ とするとき、次式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{x} e^x \log x\,dx = e^x \log|x| - Ei(x)$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \log x\,dx^2 = e^x\left\{\log|x| + \frac{0!}{1!}x^0\right\} - \left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)Ei(x)$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \log x\,dx^3 = e^x\left\{\log|x| + \frac{0!}{2!}x^1 + \left(\frac{0!}{1!}+\frac{1!}{2!}\right)x^0\right\}$$
$$- \left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)Ei(x)$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \log x\,dx^4 = e^x\left\{\log|x| + \frac{0!}{3!}x^2 + \left(\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}\right)x^1 + \left(\frac{0!}{1!}+\frac{1!}{2!}+\frac{2!}{3!}\right)x^0\right\}$$
$$- \left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)Ei(x)$$

$\vdots$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \log x\,dx^n = e^x\left\{\log|x| + \sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2-r}\frac{s!\,x^r}{(r+s+1)!}\right\} - Ei(x)\sum_{r=0}^{n-1}\frac{x^r}{r!} \tag{2.n}$$

証明

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ とするとき、$e^x \log x$ の直系高階原始関数は

$$\left(e^x \log x\right)^{<1>} = e^x \log|x| - Ei(x)$$

$$\left(e^x \log x\right)^{<2>} = e^x(\log|x|+1) - (x+1)Ei(x)$$

$$\left(e^x \log x\right)^{<3>} = e^x\left(\log|x| + \frac{x+3}{2}\right) - \frac{x^2+2x+2}{2}Ei(x)$$

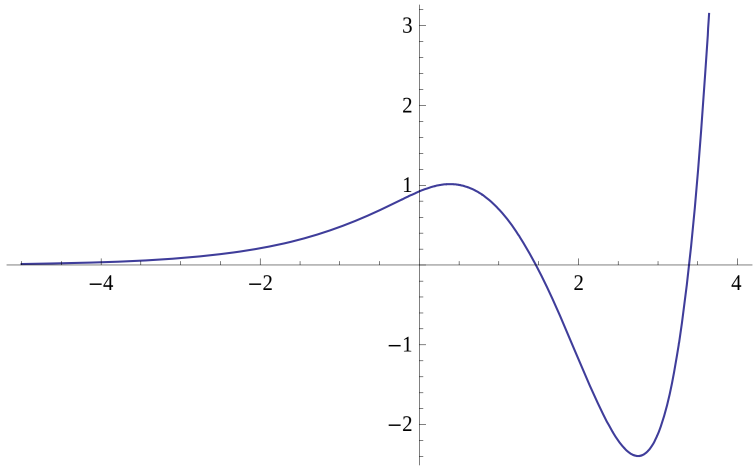
$$\left(e^x \log x\right)^{<4>} = e^x\left(\log|x| + \frac{x^2+4x+11}{3!}\right) - \frac{x^3+3x^2+6x+6}{6}Ei(x)$$

$\vdots$

となる。そしてこれらの零点は $x=-\infty$ である。それ故1階~4階は上記のように書くことができ、後は帰納法により一般式 (2.n) を得る。

例　$e^x \log x$ の3階積分

```
F[n_] := e^x (Log[Abs[x]] + Sum[Sum[s! x^r/(r + s + 1)!, {s, 0, n-2-r}], {r, 0, n-2}]) - ExpIntegralEi[x] Sum[x^r/r!, {r, 0, n-1}]
Plot [F[3], {x, -5, 4}]
```



Note

$e^x \log x$ に 定理16･1･2 を適用して得られる多項式は全て漸近展開となり、ほとんど役に立たない。

16･5･3 $e^x \sin x,\ e^x \cos x$ の高階積分

公式16･5･3

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^n = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n e^x \cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

導出

$e^x \sin x$ の高階微分について次なる公式が知られている。(共立 数学公式 187p)。

$$\left(e^x \sin x\right)^{(n)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^x \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

そこで n を $-n$ に置換すれば

$$\left(e^x \sin x\right)^{(-n)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n} e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

微分演算子 $(-n)$ は積分演算子 $<n>$ であるから

$$\left(e^x \sin x\right)^{<n>} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n} e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

となる。そして $x=-\infty$ はあきらかにこの零点であるから左辺を書き直して与式を得る。

$e^x \cos x$ についても

$$\left(e^x \cos x\right)^{(n)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^x \cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

に同様の変換を施して与式を得る。

例

$$\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\,dx = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right) e^x \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^x \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\,dx^2 = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 e^x \sin\left(x-\frac{2\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} e^x \cos x$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\,dx^3 = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^3 e^x \cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^x \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} e^x \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^x (\sin x - \cos x)$$

$e^x \sin x$, $e^x \sin x$ の高階積分はこれで終わりである。定理16・1・2の出る幕はない。ところがあえて定理16・1・2を適用すると面白い結果が得られる。

公式16・5・3'

(1)

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\,dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) + R_m^n \tag{3.1}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin\left\{x+\frac{(m+k)\pi}{2}\right\} dx^n \tag{3.1r}$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\,dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \sin\left\{x-\frac{(n+r)\pi}{2}\right\} + R_m^n \tag{3.2}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin\left\{x-\frac{(m+k)\pi}{2}\right\} dx^n \tag{3.2r}$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\,dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) + R_m^n \tag{3.3}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos\left\{x+\frac{(m+k)\pi}{2}\right\} dx^n \tag{3.3r}$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\,dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \cos\left\{x-\frac{(n+r)\pi}{2}\right\} + R_m^n \tag{3.4}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos\left\{x-\frac{(m+k)\pi}{2}\right\} dx^n \tag{3.4r}$$

導出

定理16・1・2 において $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$ とすれば、

$$(\sin x)^{(r)} = \sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

であるからこれらを代入して (3.1), (3.1r) を得、

定理16･1･2において $f(x)=\sin x$, $g(x)=e^x$ とすれば、

$$(\sin x)^{<n+r>} = \sin\left\{x-\frac{(n+r)\pi}{2}\right\}$$

であるからこれらを代入して (3.2), (3.2r) を得る。

$e^x\cos x$ についても同様の方法で (3.3)~(3.4r) が得られる。

例　$e^x\sin x$ の2階積分

(3.1), (3.1r) において $n=2$, $m=10$ とし、任意の1点 $x=3$ における関数値を数式ソフトにより計算すれば次のようになる。

左辺

```
• g := -E^x/2*cos(x):
• float(subs(g, x=3))
```

9.942265422

級数

```
• n:=2: m:=100:
• f := E^x*sum(binomial(-n,r)*sin(x+r*PI/2), r=0..m-1):
• float(subs(f, x=3))
```

−1135.950099

剰余

```
• r0 := -1/(m+0)*binomial(n-1,0)*E^x/2*cos(x+(m+0)*PI/2):
• r1 := -1/(m+1)*binomial(n-1,1)*E^x/2*cos(x+(m+1)*PI/2):
• R := (-1)^m/beta(n,m)*(r0+r1):
• float(subs(R, x=3))
```

1145.892364

級数＋剰余

```
• float(subs(f+R, x=3))
```

9.942265422

完全自己同形

上の例で分かるように (3.1), (3.1r) は等式としては成立しても全く役に立たない。(3.2), (3.2r) も同様である。ところが、これらを併せて使用すると $e^x\sin x$ の高階積分の完全自己同形に導くことが出来、次のような有用な公式が得られる。このことは $e^x\cos x$ についても同様である。

公式16･5･3”

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x\sin x\,dx^n = \frac{e^x\sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{4}}{1+n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\cos\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.5}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^n = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\sin\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.6}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^n = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{4}}{1+n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\cos\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.7}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = \frac{e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\sin\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.8}$$

導出

(3.1)～(3.2r) において $m=1$ と置けば $B(n,1)=1/n$ であるから

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x \sin x - n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin\left\{x+\frac{(1+k)\pi}{2}\right\}dx^n$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) - n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin\left\{x-\frac{(1+k)\pi}{2}\right\}dx^n$$

ここで　$C_k=\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}$,　$B_k=\frac{(1+k)\pi}{2}$ 　と置けば

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x \sin x - n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin(x+B_k)dx^n$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) - n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin(x-B_k)dx^n$$

加法定理を適用して

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x \sin x - n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x (\sin x\cos B_k + \cos x\sin B_k)dx^n \tag{a}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) - n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x (\sin x\cos B_k - \cos x\sin B_k)dx^n \tag{b}$$

(a), (b) を辺々加えれば

$$2\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = e^x\left\{\sin x + \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\} - 2n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\cos B_k dx^n$$

$$= 2e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{4} - 2n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\cos B_k\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n$$

これより

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = \frac{e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{4}}{1+n\sum_{k=0}^{n-1}C_k\cos B_k}$$

C_k , B_k を書き戻せば

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^n = \frac{e^x \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{4}}{1+n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\cos\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.5}$$

を得る。 次に (a), (b) を辺々引けば

$$0 = e^x\left\{\sin x\, dx^n - \sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\} -2n\sum_{k=0}^{n-1} C_k \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x \sin B_k\, dx^n$$

$$= 2\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi}{4} -2n\sum_{k=0}^{n-1} C_k \sin B_k \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^n$$

これより

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^n = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sum_{k=0}^{n-1} C_k \sin B_k}$$

C_k , B_k を書き戻せば

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^n = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{1+k}\sin\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.6}$$

を得る。$e^x \cos x$ についても同様の計算により (3.7), (3.8) を得る。

例　$\boldsymbol{n=2}$ のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \sin x\, dx^2 = \frac{e^x \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}}{1+2\sum_{k=0}^{1}\frac{{}_1C_k}{k+1}\cos\frac{(1+k)\pi}{2}} = \frac{e^x \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}}{1+2\left\{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2}\right\}}$$

$$= \frac{e^x \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}}{1+2\left\{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right\}} = \frac{e^x \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = -\frac{e^x \cos x}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} e^x \cos x\, dx^2 = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}}{2\sum_{k=0}^{1}\frac{{}_1C_k}{1+k}\sin\frac{(1+k)\pi}{2}} = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}}{2\left\{\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}\right\}}$$

$$= \frac{e^x \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{e^x \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{e^x \sin x}{2}$$

16･5･4 有限三角級数と有限二項級数

(1) 有限三角級数

公式16･5･3" は役には立つが何とも恐ろしい煩雑さである。公式16･5･3 とは比ぶべきもない。ところがこれらを互いに比較すると次のような有限三角級数が得られる。

公式16･5･4

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n-1}C_{k-1}}{k}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\sin\frac{n\pi}{4} \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n-1}C_{k-1}}{k}\cos\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{1}{n} \tag{4.2}$$

導出

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}e^{x}\cos x\,dx^{n}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n}e^{x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}e^{x}\cos x\,dx^{n}=\frac{e^{x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{k}}{1+k}\sin\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.6}$$

より

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n}=\sin\frac{n\pi}{4}\Big/\left\{n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{k}}{1+k}\sin\frac{(1+k)\pi}{2}\right\}$$

よって k を1スライドして (4.1) を得る。次に

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}e^{x}\sin x\,dx^{n}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n}e^{x}\sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}e^{x}\sin x\,dx^{n}=\frac{e^{x}\sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{4}}{1+n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{k}}{1+k}\cos\frac{(1+k)\pi}{2}} \tag{3.5}$$

より

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n}=\cos\frac{n\pi}{4}\Big/\left\{1+n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{k}}{1+k}\cos\frac{k\pi}{2}\right\}$$

よって k を1スライドして (4.2) を得る。

(2) 有限二項級数

しかしながら自然数 n に対しては公式16･5･4 は冗長で面白くない。そこで $\sin\frac{k\pi}{2}$, $\cos\frac{k\pi}{2}$ を除くと次のような面白い有限二項級数が得られる。

公式16･5･4'

$\downarrow, \uparrow$ をそれぞれ床関数、天井関数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_{2k} = \frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4} \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^k}{2k}{}_nC_{2k-1} = \frac{1}{n+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} - 1\right\} \tag{4.4}$$

導出

(4.1) において n, k を $n+1$, $k+1$ に置換すると

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k+1}\sin\frac{(k+1)\pi}{2} = \frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

この左辺の偶数項は0であるから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k+1}\sin\frac{(k+1)\pi}{2} = \frac{{}_nC_0}{1} - \frac{{}_nC_2}{3} + \frac{{}_nC_4}{5} -+ \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_{2k} \qquad 2k \leqq n$$

$$= \sum_{k=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_{2k}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_{2k} = \frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4} \tag{4.3}$$

(4.2) において n, k を $n+1$, $k+1$ に置換すると

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{2} = \frac{1}{n+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} - 1\right\}$$

この左辺の奇数項は0であるから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{2} = -\frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_3}{4} - \frac{{}_nC_5}{6} +- \cdots + \frac{(-1)^k}{2k}{}_nC_{2k-1} \qquad 2k-1 \leqq n$$

$$= \sum_{k=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^k}{2k}{}_nC_{2k-1}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^k}{2k}{}_nC_{2k-1} = \frac{1}{n+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} - 1\right\} \tag{4.4}$$

例

$$\frac{{}_9C_0}{1} - \frac{{}_9C_2}{3} + \frac{{}_9C_4}{5} - \frac{{}_9C_6}{7} + \frac{{}_9C_8}{9} = \frac{1}{9+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-9-1}\sin\frac{(9+1)\pi}{4} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{{}_8C_0}{1} - \frac{{}_8C_2}{3} + \frac{{}_8C_4}{5} - \frac{{}_8C_6}{7} + \frac{{}_8C_8}{9} = \frac{1}{8+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-8-1}\sin\frac{(8+1)\pi}{4} = \frac{16}{9}$$

$$-\frac{{}_7C_1}{2} + \frac{{}_7C_3}{4} - \frac{{}_7C_5}{6} + \frac{{}_7C_7}{8} = \frac{1}{7+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-7-1}\cos\frac{(7+1)\pi}{4} - 1\right\} = \frac{15}{8}$$

$$-\frac{{}_8C_1}{2} + \frac{{}_8C_3}{4} - \frac{{}_8C_5}{6} + \frac{{}_8C_7}{8} = \frac{1}{8+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-8-1}\cos\frac{(8+1)\pi}{4} - 1\right\} = \frac{5}{3}$$

16･6　$e^{-x}f(x)$ の高階積分

16･6･1　$e^{-x}x^{\alpha}$ の高階積分

公式16･6･1

　不完全ガンマ関数を $\Gamma(a,x)=\int_x^{\infty}t^{a-1}e^{-t}dt$ とするとき、次式が成立する。

$$\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{\alpha}dx \quad = -\frac{1}{0!}\Gamma(1+\alpha,x)$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{\alpha}dx^2 = \frac{1}{1!}\{\Gamma(2+\alpha,x)-\Gamma(1+\alpha,x)x\}$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{\alpha}dx^3 = -\frac{1}{2!}\{\Gamma(3+\alpha,x)-2\Gamma(2+\alpha,x)x+\Gamma(1+\alpha,x)x^2\}$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{\alpha}dx^4 = \frac{1}{3!}\{\Gamma(4+\alpha,x)-3\Gamma(3+\alpha,x)x+3\Gamma(2+\alpha,x)x^2-\Gamma(1+\alpha,x)x^3\}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{\alpha}dx^n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\Gamma(n-r+\alpha,x)x^r \tag{1.n}$$

導出

　素直に積分を続けると自然に導かれる。なお、これらの零点は $x=\infty$ である。それ故これらは直系高階積分である。

例　$e^{-x}\sqrt{x}$ の2階積分

　$\alpha=1/2$, $n=2$ を (1.n) に代入し任意の1点 $x=-2.3$ における値を計算すると次のようになる。両辺はぴったり一致している。

左辺 : Riemann-Liouville 積分

```
• a := 1/2: n:=2:
• g := x-> 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*t^a/E^t,t=infinity..x):
• float(g(-2.3))
```

$3.367662317+6.637309509\cdot i$

右辺 : 不完全ガンマ関数による積分

```
• f := x-> (-1)^n/(n-1)! *
      sum((-1)^r*binomial(n-1,r)*igamma(n-r+a,x)*x^r, r=0..n-1)
```

$$x\rightarrow\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\cdot\left(\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\cdot\binom{n-1}{r}\cdot\Gamma(n-r+a,x)\cdot x^r\right)$$

```
• float(f(-2.3))
```

$3.367662317+6.637309509\cdot i$

　α が自然数のときには x^{α} を微分し切ることができ、次式が成立する。

公式16･6･1’

$m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{m}dx^{n}=\frac{(-1)^{n}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{r}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r} \tag{1.n'}$$

例　$e^{-x}x^{4}$ の5階積分

$m=4$, $n=5$ とし、これらを (1.n’) に代入すれば

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}e^{-x}x^{4}dx^{5}=\frac{(-1)^{5}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{4}(-1)^{r}\binom{-5}{r}\frac{\Gamma(1+4)}{\Gamma(1+4-r)}x^{4-r}$$

この両辺を数式ソフトで計算すると次のようになる。当然ながら両辺は一致している。

左辺: Riemann-Liouville 積分

```
• m:=4: n:=5:
• g := 1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*t^m/E^t,t=infinity..x):
• expand(g)
```

$$-\frac{840\cdot x}{e^{x}}-\frac{180\cdot x^{2}}{e^{x}}-\frac{20\cdot x^{3}}{e^{x}}-\frac{x^{4}}{e^{x}}-\frac{1680}{e^{x}}$$

右辺:多項式による積分

```
• f := (-1)^n/E^x*sum((-1)^r*binomial(-n,r)*gamma(1+m)
                          /gamma(1+m-r)*x^(m-r), r=0..m):
• expand(f)
```

$$-\frac{180\cdot x^{2}}{e^{x}}-\frac{20\cdot x^{3}}{e^{x}}-\frac{x^{4}}{e^{x}}-\frac{1680}{e^{x}}-\frac{840\cdot x}{e^{x}}$$

$e^{-x}x^{\alpha}$ の傍系高階積分

0 を零点とする傍系高階積分に関しては次の公式が成立する。

公式16･6･1”

$\alpha\neq-1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha+n>0$ なる α , n について次式が成立する。

$$\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}e^{-x}x^{\alpha}dx^{n}=\frac{1}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{-r}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}+R_{m}^{n}$$

$$R_{m}^{n}=\frac{1}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{-k}\frac{{}_{n-1}C_{k}}{m+k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}\frac{x^{\alpha+m+k}}{e^{x}}dx^{n}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_{m}^{n}=0$$

例　$e^{-x}\sqrt{x}$ の傍系2階積分

この関数は正領域において図示することができる。青(Riemmann-Liouville 積分)は赤(級数)に隠れて見ることができない。負領域では複素関数となるが勿論両辺一致している。

左辺: Riemann-Liouville 積分

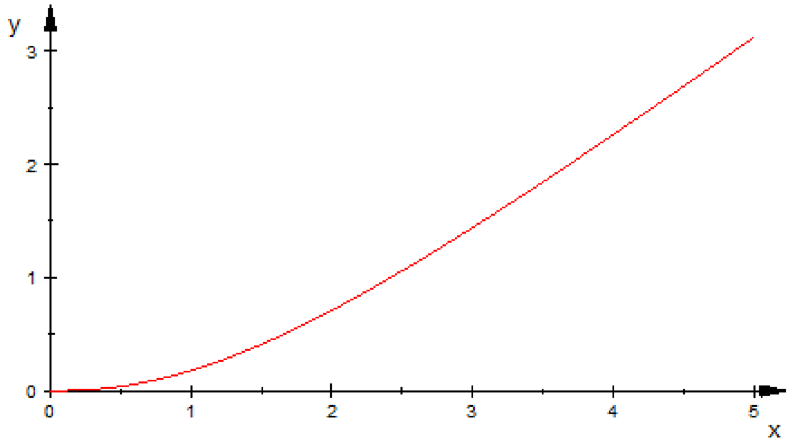
```
• a := 1/2: n:=2:
• g := x->1/gamma(n)*int((x-t)^(n-1)*t^a/E^t,t=0..x):
```

右辺: 級数

```
• m:=20:
• f := x->sum((-1)^-r*binomial(-n,r)*gamma(1+a)/gamma(1+a+n+r)
                                        *x^(a+n+r)/E^x, r=0..m-1):
```

青:左辺 、赤:右辺

```
• plotfunc2d(g(x),f(x), x=0..5)
```



16·6·2 $e^{-x}\log x$ の高階積分

公式16·6·2

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ とするとき、次式が成立する。

$$\int_{\infty}^{x} e^{-x}\log x\,dx = -e^{-x}\log|x| + Ei(-x)$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} e^{-x}\log x\,dx^2 = e^{-x}\left\{\log|x| + \frac{0!}{1!}x^0\right\} - \left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^1}{1!}\right)Ei(-x)$$

$$\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x} e^{-x}\log x\,dx^3 = -e^{-x}\left\{\log|x| - \frac{0!}{2!}x^1 + \left(\frac{0!}{1!}+\frac{1!}{2!}\right)x^0\right\}$$
$$+\left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)Ei(-x)$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} e^{-x}\log x\,dx^4 = e^{-x}\left\{\log|x| + \frac{0!}{3!}x^2 - \left(\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}\right)x^1 + \left(\frac{0!}{1!}+\frac{1!}{2!}+\frac{2!}{3!}\right)x^0\right\}$$
$$-\left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)Ei(-x)$$

$\vdots$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} e^{-x}\log x\,dx^n = (-1)^n e^{-x}\left\{\log|x| + \sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2-r}\frac{s!\,(-x)^r}{(r+s+1)!}\right\}$$
$$-(-1)^n Ei(-x)\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-x)^r}{r!} \qquad (2.n)$$

証明

$e^{x}\log x$ の直系高階原始関数は

$$\left(e^{-x}\log x\right)^{<1>} = -e^{-x}\log|x| + Ei(-x)$$

$$\left(e^{-x}\log x\right)^{<2>} = e^{-x}(\log|x|+1) + (x-1)Ei(-x)$$

$$\left(e^{-x}\log x\right)^{<3>} = -e^{-x}\left(\log|x| - \frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \frac{x^2-2x+2}{2!}Ei(-x)$$

$$\left(e^{-x}\log x\right)^{<4>} = e^{-x}\left(\log|x| + \frac{x^2-4x}{3!}+\frac{11}{6}\right) + \frac{x^3-3x^2+6x-6}{3!}Ei(-x)$$

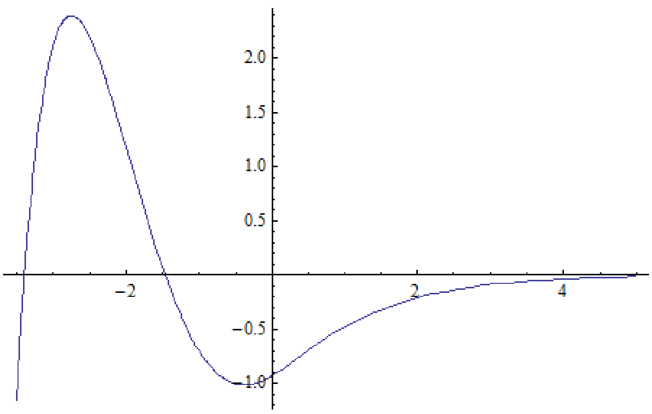
$$\vdots$$

となる。そしてこれらの零点は $x=\infty$ である。それ故1階～4階は上記のように書くことができ、後は帰納法により一般式 (2.n) を得る。

例　$e^{-x}\log x$ の3階積分

$$F[n\_]:=(-1)^n e^{-x}\left(\text{Log}[\text{Abs}[x]]+\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2-r}\frac{s!\,(-x)^r}{(r+s+1)!}\right)-(-1)^n\text{ExpIntegralEi}[-x]\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-x)^r}{r!}$$

```
Plot[F[3], {x, -3.5, 5}]
```



Note

$e^{-x}\log x$ に定理16･1･2 を適用して得られる多項式は全て漸近展開となり、ほとんど役に立たない。

16･6･3　$e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x$ の高階積分

公式16･6･3

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} e^{-x}\sin x\,dx^n = (-1)^n\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n e^{-x}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} e^{-x}\cos x\,dx^n = (-1)^n\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n e^{-x}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

証明

$e^x sin\,x$ の高階微分について次なる公式が知られている。(共立 数学公式 187p)。

$$\left(e^x sin\,x\right)^{(n)} = \left(sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^x sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

そこで x を $-x$ に置換すれば

$$(-1)^n\left\{e^{-x}sin(-x)\right\}^{(n)} = \left(sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^{-x} sin\left(-x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

$sin(-x) = -sin\,x$ を用いて

$$\left(e^{-x} sin\,x\right)^{(n)} = (-1)^n\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^{-x} sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

を得る。そして次に n を $-n$ に置換すれば

$$\left(e^{-x} sin\,x\right)^{(-n)} = (-1)^n\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^{n} e^{-x} sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

となり、さらに $(-n)$ を $<n>$ に置換すれば

$$\left(e^{-x} sin\,x\right)^{<n>} = (-1)^n\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^{n} e^{-x} sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

となる。そして $x=\infty$ はあきらかにこの零点であるから左辺を書き直して与式を得る。

$e^{-x} cos\,x$ についても

$$\left(e^x cos\,x\right)^{(n)} = \left(sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^x cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

に同様の変換を施して与式を得る。

例

$$\int_\infty^x e^{-x} sin\,x\,dx = (-1)^1\left(sin\frac{\pi}{4}\right)e^{-x} sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\frac{sin\,x + cos\,x}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}(sin\,x + cos\,x)$$

$$\int_\infty^x\int_\infty^x e^{-x} sin\,x\,dx^2 = (-1)^2\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^2 e^{-x} sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{-x} cos\,x$$

$$\int_\infty^x\cdots\int_\infty^x e^x cos\,x\,dx^3 = (-1)^3\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^3 e^{-x} cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-x} sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}e^x\frac{cos\,x + sin\,x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}e^{-x}(sin\,x + cos\,x)$$

16・7 高階積分の級数展開

定理16・1・2の 関数の積のf, g の一方に1, e^x 等の簡単な関数を用いることにより、いろいろな関数項級数が得られる。

16・7・1 固定下限の高階積分の級数展開

最初に、定理16・1・2 の f に1 を与えて次の定理を得る。

定理16・7・1

自然数をm, nとし、$f^{(r)}$ $r=0,1,\cdots,m+n$は 関数$f(x)$の r 階導関数、a は fの定義域上の任意の定数、$B(x,y)$ はベータ関数とするとき、次式が成立する。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(r)}(x)+R_m^n \tag{1.1}$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-a)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}(t)dt^n \tag{1.1r}$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(r)}(a)+R_m^n \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}R_m^n=&\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{n-r+s}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\cdot{}_{m+n+s}C_r\frac{(x-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!}f^{(m+s)}(a)\\&+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-x)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}(t)dt^n\end{aligned} \tag{1.2r}$$

但し $n<2$ のときΣΣの項は無いものとする。

証明

定理16・1・2 においてf, g 入をれ替えると

$$\begin{aligned}\int_a^x\cdots\int_a^x g^{<0>}f^{(0)}dx^n=&\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}g^{<n+r>}f^{(r)}\\&-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}g_a^{<n-r+s>}f_a^{(s)}\frac{(x-a)^r}{r!}\\&+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\,g_a^{\langle m+n-r+s\rangle}f_a^{(m+s)}\frac{(x-a)^r}{r!}\\&+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x g^{<m+k>}f^{(m+k)}dx^n\end{aligned}$$

これに $g^{<r>}=\dfrac{(x-c)^r}{r!}$ ($a\leqq c$) を代入すれば

$$\begin{aligned}\int_a^x\cdots\int_a^x 1\cdot f^{(0)}dx^n=&\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(x-c)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(r)}\\&-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{(a-c)^{n-r+s}}{(n-r+s)!}\frac{(x-a)^r}{r!}f_a^{(s)}\end{aligned}$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\frac{(a-c)^{m+n-r+s}}{(m+n-r+s)!}\frac{(x-a)^r}{r!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x\frac{(x-c)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dx^n$$

これを a から b $(\geqq c)$ までの高階定積分に直し、剰余項の変数を x から t に変更すると

$$\int_a^b\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(b-c)^{n+r}}{(n+r)!}f_b^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{(a-c)^{n-r+s}}{(n-r+s)!}\frac{(b-a)^r}{r!}f_a^{(s)}$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\frac{(a-c)^{m+n-r+s}}{(m+n-r+s)!}\frac{(b-a)^r}{r!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-c)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n \qquad (1.0)$$

ここで $c=a$ と置けば、

$$\int_a^b\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(b-a)^{n+r}}{(n+r)!}f_b^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{(a-a)^{n-r+s}}{(n-r+s)!}\frac{(b-a)^r}{r!}f_a^{(s)}$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\frac{(a-a)^{m+n-r+s}}{(m+n-r+s)!}\frac{(b-a)^r}{r!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-a)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(b-a)^{n+r}}{(n+r)!}f_b^{(r)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-a)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n$$

かくて b を x に書き戻して (1.1), (1.1r)を得る。

次に (1.0) において $c=b$ と置けば

$$\int_a^b\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(b-b)^{n+r}}{(n+r)!}f_b^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}\frac{(a-b)^{n-r+s}}{(n-r+s)!}\frac{(b-a)^r}{r!}f_a^{(s)}$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\frac{(a-b)^{m+n-r+s}}{(m+n-r+s)!}\frac{(b-a)^r}{r!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-b)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n$$

$$= \quad -\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{n-r+s}\binom{-n+r}{s}\frac{(b-a)^{n+s}}{r!\,(n-r+s)!}f_a^{(s)}$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}(-1)^{n-r+s}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\frac{(b-a)^{m+n+s}}{r!\,(m+n-r+s)!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-b)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n$$

そして

$$(-1)^s\binom{-n+r}{s}={}_{n-r-1+s}C_s \quad , \quad \frac{1}{r!\,(n-r+s)!}=\frac{{}_{n+s}C_r}{(n+s)!}$$

を代入して

$$\int_a^b\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(0)}dx^n=-\sum_{s=0}^{m-1}\left(\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1-r+s}C_s\cdot{}_{n+s}C_r\right)\frac{(b-a)^{n+s}}{(n+s)!}f_a^{(s)}$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{n-r+s}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\cdot{}_{m+n+s}C_r\frac{(b-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-b)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n$$

ここで自然数 n と非負数 s について次のようになる。

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1-r+s}C_s\cdot{}_{n+s}C_r=-1$$

何故ならば

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1-r+s}C_s\cdot{}_{n+s}C_r=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\frac{(n-1-r+s)!}{(n-1-r)!\,s!}\frac{(n+s)!}{(n-r+s)!\,r!}$$

$$=\frac{(n+s)!}{(n-1)!\,s!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,r!}\frac{1}{n-r+s}$$

$$=-\frac{(n+s)!}{(n-1)!\,s!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1-r}\frac{{}_{n-1}C_{n-1-r}}{s+1+n-1-r}$$

$$=-\frac{(n+s)!}{(n-1)!\,s!}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{s+1+r}{}_{n-1}C_r$$

であるが、岩波数学公式Ⅱの12p によると

$$\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^r}{a+r}{}_mC_r=\frac{m!\,\Gamma(a)}{\Gamma(m+a+1)} \quad a\neq 0,-1,-2,\cdots$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{s+1+r}{}_{n-1}C_r=\frac{(n-1)!\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(n-1+s+1+1)}=\frac{(n-1)!\,s!}{(n+s)!}$$

となるからである。 よって

$$\int_a^b\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(0)}dx^n=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(b-a)^{n+s}}{(n+s)!}f_a^{(s)}$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{n-r+s}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\cdot{}_{m+n+s}C_r\frac{(b-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!}f_a^{(m+s)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^b\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-b)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}dt^n$$

2行目のΣΣはこれ以上簡単にすることが出来ない上に撹乱項であるから、3行目とともに剰余項とする。n が2より小さいときにこの2行目が存在しないことは言うまでもない。かくて1行目の s を r に書き換え b を x に書き戻して (1.2), (1.2r)を得る。

Riemann-Liouville 積分の級数展開

固定下限の高階積分は Riemann-Liouville 積分そのものである。従って上の公式は Riemann-Liouville 積分を級数展開する公式でもある。左辺および剰余項もRiemann-Liouville積分を使って書き表せば次のようになる。

定理16･7･1'

自然数 n と f の定義域上の任意の数 a について次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(r)}(x)+R_m^n \tag{1.1'}$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)\Gamma(n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}(t-a)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}(t)dt^n \tag{1.1'r}$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(r)}(a)+R_m^n \tag{1.2'}$$

$$R_m^n=\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{n-r+s}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\cdot{}_{m+n+s}C_r\frac{(x-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!}f^{(m+s)}(a)$$
$$-\frac{(-1)^{m+n}}{B(n,m)\Gamma(n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\frac{(t-x)^{m+n+k}}{(m+k)!}f^{(m+k)}(t)dt^n \tag{1.2'r}$$

但し $n<2$ のときΣΣの項は無いものとする。

例1 e^x の傍系2階積分の級数展開

$f(x)=e^x$ とすると

$$f(x)=e^x \quad , \quad f^{(r)}(x)=e^x \ , \quad f^{(r)}(0)=1 \qquad r=1,2,3,\cdots$$

であるから、これらを 定理16･7･1 に代入すると次のようになる。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^n=e^x\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-a)^{m+k}}{(m+k)!}e^t dt^n$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}e^a+R_m^n$$

$$R_m^n=\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{n-r+s}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\cdot{}_{m+n+s}C_r\frac{(x-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!}e^a$$
$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-x)^{m+k}}{(m+k)!}e^t dt^n$$

e^x の直系高階積分の零点は $a=-\infty$ であるが、これらの式はこの零点をもつことができない。
つまり上記公式では e^x の直系高階積分は級数展開できない。
そこで $a=0$ としてこれらの傍系高階積分を級数展開する。$n=2$ のとき

$$\int_0^x\int_0^x e^x dx^2 = e^x \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-2}{r}\frac{(x-0)^{2+r}}{(2+r)!} + R_m^2$$

$$R_m^2 = \frac{(-1)^m}{B(2,m)}\sum_{k=0}^{2-1}\frac{{}_{2-1}C_k}{m+k}\int_0^x\int_0^t \frac{(t-0)^{m+k}}{(m+k)!}e^t dt^2$$

$$\int_0^x\int_0^x e^x dx^2 = \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-0)^{2+r}}{(2+r)!}e^0 + R_m^2$$

$$R_m^2 = -{}_mC_{m-1}\cdot{}_{m+2}C_1\frac{(x-0)^{m+2}}{(m+2)!}e^0$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(2,m)}\sum_{k=0}^{2-1}\frac{{}_{2-1}C_k}{m+k}\int_0^x\int_0^t \frac{(t-x)^{m+k}}{(m+k)!}e^t dt^2$$

例2　$\log x$ の3階積分の級数展開

$f(x)=\log x$ とすると

$$f^{(0)} = \log x \quad , \quad f^{(r)} = (-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^r} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

であるからこれらを 定理16･7･1 に代入すると次のようになる。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x \log x\, dx^n = \frac{(x-a)^n}{n!}\log x - \sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\binom{-n}{r}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}\frac{(r-1)!}{x^r} + R_m^n$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x \log x\, dx^n = \frac{(x-a)^n}{n!}\log a - \sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}\frac{(r-1)!}{a^r} + R_m^n$$

そして $a=0$ のとき最初の式は直系高階積分となり、そうでないとき傍系高階積分となるが、2番目の式は直系高階積分となることができない。

最初の式により直系3階積分を級数展開しこれらを直接積分したものと比べると次のようになる。この級数は収束が遅いが、m を非常に大きく採った結果両辺は何とか重なった。

左辺（直接積分）

```
• g := n-> x^n/n!*(ln(x) - sum(1/k,k=1..n))
```

$$n \to \frac{x^n}{n!}\cdot\left(\ln(x) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)$$

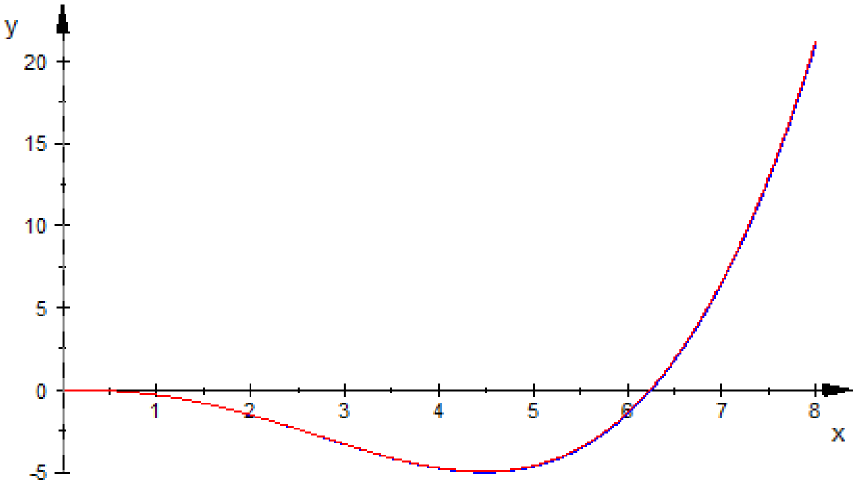
級数1

```
• m:=1000: a:=0:
• f := n-> (x-a)^n/n!*ln(x)-sum((-1)^r*binomial(-n,r)
                                *((x-a)^(n+r)/(n+r)!)
                                *((r-1)!/x^r),r=1..m-1)
```

$$n \to \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot\ln(x) - \left(\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\cdot\binom{-n}{r}\cdot\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}\cdot\frac{(r-1)!}{x^r}\right)$$

青:左辺　、赤:級数1

```
• plotfunc2d(g(3),f(3), x=0..8)
```



16・7・2　関数の級数展開

定理16・7・1 において積分演算子のインデクスをスライドさせることにより、関数の級数展開を得る。もちろんこの中にはテイラー展開も含まれる。

定理16・7・2

自然数をm, nとし、$f^{(r)}$ $r=0,1,\cdots,m+n$は 関数$f(x)$の r 階導関数、a は fの定義域上の任意の定数、$B(x,y)$ はベータ関数とするとき、次式が成立する。

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!} f^{(n+r)}(x) + R_m^n \tag{2.1}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_a^x \int_a^t \cdots \int_a^t \frac{(t-a)^{m+k}}{(m+k)!} f^{(n+m+k)}(t) dt^n \tag{2.1r}$$

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m+n-1} \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + R_m^n \tag{2.2}$$

$$R_m^n = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{n-r+s} \sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1} \cdot {}_{m+n+s}C_r \frac{(x-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!} f^{(m+n+s)}(a)$$
$$+ \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_a^x \int_a^t \cdots \int_a^t \frac{(t-x)^{m+k}}{(m+k)!} f^{(n+m+k)}(t) dt^n \tag{2.2r}$$

但し $n<2$ のときΣΣの項は無いものとする。

証明

定理16・7・1 において関数$f^{(0)}(x)$ の微分演算子のインデックスにn を加えれば

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f^{(n)}(x) dx^n = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!} f^{(n+r)}(x) + R_m^n$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_k}{m+k} \int_a^x \int_a^t \cdots \int_a^t \frac{(t-a)^{m+k}}{(m+k)!} f^{(n+m+k)}(t) dt^n$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(n)}(x)dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(n+r)}(a) + R_m^n$$

$$R_m^n = \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{n-r+s}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\cdot{}_{m+n+s}C_r\frac{(x-a)^{m+n+s}}{(m+n+s)!}f^{(n+m+s)}(a)$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\int_a^t\cdots\int_a^t\frac{(t-x)^{m+k}}{(m+k)!}f^{(n+m+k)}(t)dt^n$$

ところが

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{(n)}dx^n = \int_a^x\cdots\int_a^x\left\{f^{(n-1)}-\frac{(x-a)^0}{0!}f_a^{(n-1)}\right\}dx^{n-1}$$

$$=\int_a^x\cdots\int_a^x\left\{f^{(n-2)}-\frac{(x-a)^0}{0!}f_a^{(n-2)}-\frac{(x-a)^1}{1!}f_a^{(n-1)}\right\}dx^{n-2}$$

$$=\int_a^x\cdots\int_a^x\left\{f^{(n-3)}-\frac{(x-a)^0}{0!}f_a^{(n-3)}-\frac{(x-a)^1}{1!}f_a^{(n-2)}-\frac{(x-a)^2}{2!}f_a^{(n-1)}\right\}dx^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$=f^{(0)}-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(x-a)^r}{r!}f_a^{(r)}$$

であり、

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(x-a)^r}{r!}f^{(r)}(a)+\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}f^{(n+r)}(a)=\sum_{r=0}^{m+n-1}\frac{(x-a)^r}{r!}f^{(r)}(a)$$

あるから、これらを上式に代入して与式を得る。

Remark

(2.2), (2.2r) において $n=1$ と置けば

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m}\frac{(x-a)^r}{r!}f^{(r)}(a) + (-1)^m\int_a^x\frac{(t-x)^m}{m!}f^{(1+m)}(t)dt$$

となりこれが通常のテイラーの定理であることは言うまでもない。
しかしながら実は (2.2), (2.2r) が既に通常のテイラーの定理なのである。
何故ならば、定理4･1･3 の (1.2) から、この恐ろしい剰余項は

$$R_m^n = \int_a^x\cdots\int_a^x f^{(m+n)}(x)dx^{m+n} = \frac{1}{\Gamma(m+n)}\int_a^x(x-t)^{m+n-1}f(t)dt$$

とならねばならないからである。(2.2), (2.2r) はトレビアである。

結局、この定理から明らかになったことは次の2点である。
(1)　関数 f の点 a の周りでの関数項級数展開は無数に存在し得る。
(2)　関数 f の点 a の周りでのテイラー展開は1つしか存在し得ない。

例1　e^x の 0の周りでの級数展開

$$f(x)=e^x \quad , \quad f^{(r)}(x)=e^x \ , \quad f^{(r)}(0)=1 \qquad r=1,2,3,\cdots$$

であるから、これらを (2.1) に代入して次式を得る。

$$e^{x} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x^{r}}{r!} + e^{x}\sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} \frac{x^{n+r}}{(n+r)!} + R_{m}^{n}$$

この式は自己同型であるので面白くない。そこで $\lim_{m\to\infty} R_{m}^{n} = 0$ なることを利用して

$$e^{x}\left\{1 - \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} \frac{x^{n+r}}{(n+r)!}\right\} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x^{r}}{r!}$$

これより次式を得る。

$$e^{x} = \left\{1 - \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} \frac{(-x)^{n+r}}{(n+r)!}\right\} \bigg/ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-x)^{r}}{r!}$$

そしてこれに $n=1,2,3,\cdots$ を与えることによって次式を得る。

$$e^{x} = \left\{1 - \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-1}{r} \frac{(-x)^{1+r}}{(1+r)!}\right\} \bigg/ 1 \qquad = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r}}{r!}$$

$$= \left\{1 - \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-2}{r} \frac{(-x)^{2+r}}{(2+r)!}\right\} \bigg/ \left(1 - \frac{x^{1}}{1!}\right)$$

$$= \left\{1 - \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-3}{r} \frac{(-x)^{3+r}}{(3+r)!}\right\} \bigg/ \left(1 - \frac{x^{1}}{1!} + \frac{x^{2}}{2!}\right)$$

$$\vdots$$

例2　$\log x$ の 1の周りでの級数展開

$$f(x) = \log x\ , \quad f(1) = 0\ , \qquad f^{(r)}(x) = (-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^{r}} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

であるから、これらを (2.1) に代入して次式を得る。

$$\log x = -\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(1-x)^{r}}{r} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{n+r} \binom{-n}{r} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{n+r} + R_{m}^{n} \qquad \frac{1}{2} < x$$

そしてこれに $n=1,2,3,\cdots$ を与えることによって次式を得る。

$$\log x = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{1+r} \binom{-1}{r} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1+r} \qquad \frac{1}{2} < x$$

$$= -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2+r} \binom{-2}{r} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2+r} - \frac{(1-x)^{1}}{1}$$

$$= -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3+r} \binom{-3}{r} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{3+r} - \frac{(1-x)^{1}}{1} - \frac{(1-x)^{2}}{2}$$

$$\vdots$$

16･8　パスカル型三角形

数の三角形のうち、2辺上の数が与えられ他の数は上段の2数の和で計算されるものをパスカル型三角形と呼ぶことにする。

***Lemma* 16.8.1**

次のような数の三角形において、c_{r0} $(r=0,1,2,\cdots)$ が与えられ、且つ $c_{rr}=c_{00}$ ，

$c_{rs}=c_{r-1\,s}+c_{r-1\,s-1}$　$r,s\geqq 1$ とする。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & c_{00} & & & & \\
 & & & c_{10} & & c_{11} & & & \\
 & & c_{20} & & c_{21} & & c_{22} & & \\
 & c_{30} & & c_{31} & & c_{32} & & c_{33} & \\
c_{40} & & c_{41} & & c_{42} & & c_{43} & & c_{44} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

このとき、次式が成立する。

$$c_{rs}=\sum_{t=0}^{r-s}{}_{r-1-t}C_{s-1}\,c_{t0}=\sum_{t=s-1}^{r-1}{}_{t}C_{s-1}\,c_{r-1-t\,0}$$

証明

条件式 $c_{rs}=c_{r-1\,s}+c_{r-1\,s-1}$ により逐次計算すると次のようになる。

0	c_{00}	1	2	3	4
1	c_{10}	c_{11}			
2	c_{20}	$c_{10}+c_{11}$	c_{22}		
3	c_{30}	$c_{10}+c_{11}+c_{20}$	$c_{10}+c_{11}+c_{22}$	c_{33}	
4	c_{40}	$c_{10}+c_{11}+c_{20}+c_{30}$	$2c_{10}+2c_{11}+c_{20}+c_{22}$	$c_{10}+c_{11}+c_{22}+c_{33}$	c_{44}
	$\vdots$				

そして $c_{rr}=c_{00}$　$r=1,2,3,\cdots$ のときは

0	c_{00}	1	2	3	4
1	c_{10}	c_{00}			
2	c_{20}	$c_{00}+c_{10}$	$1c_{00}$		
3	c_{30}	$c_{00}+c_{10}+c_{20}$	$2c_{00}+1c_{10}$	$1c_{00}$	
4	c_{40}	$c_{00}+c_{10}+c_{20}+c_{30}$	$3c_{00}+2c_{10}+1c_{20}$	$3c_{00}+c_{10}$	$1c_{00}$
	$\vdots$				

二項係数 ${}_rC_s$ で表せば

0	c_{00}	1	2	3
1	c_{10}	${}_0C_0\,c_{00}$		
2	c_{20}	${}_1C_0\,c_{00}+{}_0C_0\,c_{10}$	${}_1C_1\,c_{00}$	
3	c_{30}	${}_2C_0\,c_{00}+{}_1C_0\,c_{10}+{}_0C_0\,c_{20}$	${}_2C_1\,c_{00}+{}_1C_1\,c_{10}$	${}_2C_2\,c_{00}$

$\vdots$

すなわち

0	c_{00}	1	2	3	4
1	c_{10}	$\sum_{t=0}^{0} {}_{0-t}C_0\, c_{t0}$			
2	c_{20}	$\sum_{t=0}^{1} {}_{1-t}C_0\, c_{t0}$	$\sum_{t=0}^{0} {}_{1-t}C_1\, c_{t0}$		
3	c_{30}	$\sum_{t=0}^{2} {}_{2-t}C_0\, c_{t0}$	$\sum_{t=0}^{1} {}_{2-t}C_1\, c_{t0}$	$\sum_{t=0}^{0} {}_{2-t}C_2\, c_{t0}$	
4	c_{40}	$\sum_{t=0}^{3} {}_{3-t}C_0\, c_{t0}$	$\sum_{t=0}^{2} {}_{3-t}C_1\, c_{t0}$	$\sum_{t=0}^{1} {}_{3-t}C_2\, c_{t0}$	$\sum_{t=0}^{0} {}_{3-t}C_3\, c_{t0}$

$\vdots$

かくして次式を得る。

$$c_{rs} = \sum_{t=0}^{r-s} {}_{r-1-t}C_{s-1}\, c_{t0} \qquad r, s \geqq 1$$

そして

$$\begin{aligned} c_{rs} &= \sum_{t=0}^{r-s} {}_{r-1-t}C_{s-1}\, c_{t0} \\ &= {}_{r-1-(r-s)}C_{s-1}\, c_{r-s\,0} + {}_{r-1-(r-s-1)}C_{s-1}\, c_{r-s-1\,0} + \cdots + {}_{r-1-1}C_{s-1}\, c_{10} + {}_{r-1-0}C_{s-1}\, c_{00} \\ &= {}_{s-1}C_{s-1}\, c_{r-s\,0} + {}_{s}C_{s-1}\, c_{r-s-1\,0} + \cdots + {}_{r-2}C_{s-1}\, c_{10} + {}_{r-1}C_{s-1}\, c_{00} \\ &= \sum_{t=s-1}^{r-1} {}_{t}C_{s-1}\, c_{r-1-t\,0} \end{aligned}$$

例 $c_{00} = 4$, $c_{10} = 3$, $c_{20} = 2$, $c_{30} = 1$ のとき

$c_{00} = {}_4C_1$, $c_{10} = {}_3C_1$, $c_{20} = {}_2C_1$, $c_{30} = {}_1C_1$ であるから $c_{t0} = {}_{4-t}C_1$ 、よって

```
• C2 := (r,s)-> sum(binomial(r-1-t,s-1)*binomial(4-t,1), t=0..r-s)
```

$$(r, s) \rightarrow \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r-1-t}{s-1} \cdot \binom{4-t}{1}$$

```
• C2(3,0);C2(3,1);C2(3,2);C2(3,3)
```

1 9 11 4

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 3 & & 4 & & \\ & 2 & & 7 & & 4 & \\ 1 & & 9 & & 11 & & 4 \end{array}$$

Note

$c_{t0} = 1 \quad t=0,1,2,\cdots$ のとき、この数の三角形はパスカルの三角形に帰着する。

2009.02.18

K. Kono

宇宙人の数学