18　2関数の積の高階微分

18･1　高階微分に関するライプニッツ則

定理18･1･1 (ライプニッツ)

関数$f(x)$, $g(x)$ が共にn 回微分可能なとき、次式が成立する。

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \tag{1.1}$$

証明

16･1･2 の定理16･1. 2 の (2.1) は次のようであった。

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^n &= \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)} \\ &- \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>} g_{a_{n-r}}^{(s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r \\ &+ (-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle} g_{a_{n-r}}^{(m+s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r \\ &+ \frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^n\end{aligned}$$

ここで注目すべきは次の点である。

① $n=1$ のとき3行目のΣΣΣは存在せず、$n=0$ のときは2行目のΣΣも存在しない。

② 4行目の二項係数を一般二項係数に置換すればΣの上限 $n-1$ は∞ に置換できる。

$n=0,1,2,\cdots$ のとき $1>0\geq -n$ であるから、これらを考慮して積分演算子のインデックスn を $-n$ に置き換えれば次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^{-n} &= \sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r} f^{<-n+r>}g^{(r)} \\ &+ \frac{(-1)^m}{B(-n,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-n-1}{k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^{-n}\end{aligned}$$

ここで m は任意の整数を採ることができるから、$m=n+1$ と置けば

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<0>}g^{(0)}dx^{-n} &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} f^{<-n+r>}g^{(r)} \\ &+ \frac{(-1)^{n+1}}{B(-n,n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+1+k}\binom{-n-1}{k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f^{<n+1+k>}g^{(n+1+k)}dx^{-n}\end{aligned}$$

すると $n=0,1,2,\cdots$ に対して $B(-n,n+1)=\pm\infty$ であるから

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} fg\,dx^{-n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} f^{<-n+r>}g^{(r)} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

そこで積分演算子 dx^{-n}, $<-n+r>$ を微分演算子 (n), $(n-r)$ に書き換えれば与式を得る。

18·2 $x^{\alpha}f(x)$ の高階微分

公式18·2·0

$\Gamma(z)$ はガンマ関数、$f(x)$ は n 回微分可能な連続関数とするとき、自然数 n について次式が成立する。

(1)

$$\left\{x^{\alpha}f(x)\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}f^{(n-r)}(x) \tag{0.1}$$

但し、$\alpha = -1,-2,-3,\cdots$ のときは次のように読み替えるものとする。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} \longrightarrow (-1)^{-r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)}$$

(2) 特に $m = 0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left\{x^{m}f(x)\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}f^{(n-r)}(x) \tag{0.1'}$$

(3) $\alpha \ne -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha-n \ne -1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\left\{x^{\alpha}f(x)\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)}x^{\alpha-n+r}f^{(r)}(x) \tag{0.2}$$

証明

定理18·1·1 において $g(x)=x^{\alpha}$ と置けば

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(r)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}$$

であるから直ちに

$$\left\{x^{\alpha}f(x)\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}f^{(n-r)}(x) \tag{0.1}$$

特に $\alpha = m = 0,1,2,\cdots$ のときは、(0.1) より

$$\begin{aligned}\left\{x^{m}f(x)\right\}^{(n)} &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}f^{(n-r)}(x) \qquad \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}=0 \quad for\ \ m<r\leqq n \\ &= \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}f^{(n-r)}(x) \qquad \binom{n}{r}=0 \qquad for\ \ n<r\leqq m\end{aligned}$$

となるが、数式ソフトに馴染み易い後者を採用する。

$\alpha = -1,-2,-3,\cdots$ のときは「1·1·5 ガンマ関数の性質(その1)」の (5.5) により

$$\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z-n)} = (-1)^{-n}\frac{\Gamma(1+z+n)}{\Gamma(1+z)} \qquad (n\text{ は非負の整数})$$

であったから、$-z = 1+\alpha$, $n=r$ と置けば但し書を得る。

最後に、(0.1) において r を $n-r$ に置換して(0.2)を得る。

以下では公式18·2·0 に色々な関数 f を代入して諸々の公式を得る。公式18·2·0には(1)と(2) があるが、高階微分の場合(0.2) はあまり意味がないので、原則(1)を採用する。

18·2·1　$(ax+b)^p(cx+d)^q$ の高階微分

公式18·2·1

$p>0$ と自然数 n について次式が成立する。

$$\left\{(ax+b)^p(cx+d)^q\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-q}} \tag{1.1}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left\{(ax+b)^p(cx+d)^m\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-m}} \tag{1.1'}$$

導出

定理18·1·1において $f(x)=(ax+b)^p$, $g(x)=(cx+d)^q$ と置けば

$$f^{(n-r)}=\left\{(ax+b)^p\right\}^{(n-r)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n+r}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-n+r)}(ax+b)^{p-n+r}$$

$$g^{(r)}=\left\{(cx+d)^q\right\}^{(r)}=\left(\frac{1}{c}\right)^{-r}\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-r)}(cx+d)^{q-r} \qquad q\ne -1,-2,-3,\cdots$$

であるから、これらを代入して(1.1)を得る。

そして、特に　$q=m=0,1,2,\cdots$ のときは、(1.1) より

$$\begin{aligned}\left\{(ax+b)^p(cx+d)^m\right\}^{(n)} &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-m}}\\ &= \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-m}}\end{aligned}$$

となり、後者の表式を採用して(1.1')とする。

例1　$\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}$ の2階微分

$a=1,\ b=-2,\ p=1/2$, $c=3,\ d=4,\ q=1/3$, $n=2$ を(1.1)に代入すれば

$$\left(\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}\right)^{(2)}=\sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}3^r\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(4/3)}{\Gamma(r-1/2)\Gamma(4/3-r)}(x-2)^{r-\frac{3}{2}}(3x+4)^{\frac{1}{3}-r}$$

$$= -\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}\left\{\frac{1}{4(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)(3x+4)}+\frac{2}{(3x+4)^2}\right\}$$

例1'　$\sqrt{x-2}\,(3x+4)^2$ の3階微分

$a=1,\ b=-2,\ p=1/2$, $c=3,\ d=4,\ m=2$, $n=3$ を (1.1') に代入すれば

$$\left\{\sqrt{x-2}\,(3x+4)^2\right\}^{(3)}=\sum_{r=0}^{2}\binom{3}{r}3^r\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3)}{\Gamma(-3/2+r)\Gamma(3-r)}\frac{(x-2)^{-\frac{5}{2}+r}}{(3x+4)^{r-2}}$$

$$=\sqrt{x-2}\,(3x+4)^2\left\{\frac{3^1}{8(x-2)^3}-\frac{3^2}{2(3x+4)(x-2)^2}+\frac{3^3}{(3x+4)^2(x-2)}\right\}$$

例2　$\dfrac{\sqrt{x-2}}{3x+4}$ の3階微分

$q=-1,-2,-3,\cdots$ のとき、(1.1) は次のように読み替えられる。

$$\left\{(ax+b)^p(cx+d)^q\right\}^{(n)}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(-1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(-q+r)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(-q)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-q}}$$

$a=1,\ b=-2,\ p=1/2\ ,\ c=3,\ d=4,\ q=-1\ ,\ n=3$ をこれに代入すれば

$$\left(\frac{\sqrt{x-2}}{3x+4}\right)^{(3)}=\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}(-3)^r\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1+r)}{\Gamma(-3/2+r)\Gamma(1)}\frac{(x-2)^{-\frac{5}{2}+r}}{(3x+4)^{r+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}}{3x+4}\left\{\frac{3}{8(x-2)^3}+\frac{9}{4(x-2)^2(3x+4)}+\frac{27}{(x-2)(3x+4)^2}-\frac{162}{(3x+4)^3}\right\}$$

18･2･2　$x^\alpha\log x$ の高階微分

公式18･2･2

$$\left(x^\alpha\log x\right)^{(n)}=-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(n-r)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-n}+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n)}x^{\alpha-n}\log x \tag{2.1}$$

特に $m=0,1,2,3,\cdots$ のとき

$$\left(x^m\log x\right)^{(n)}=-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(n-r)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-n}+\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-n)}x^{m-n}\log x \tag{2.1'}$$

（ 但し $m<n$ のとき 右辺第2項は無し。）

導出

公式18･2･0 において $f(x)=\log x$ と置けば、

$$(\log x)^{(n-r)}=-(-1)^{n-r}\Gamma(n-r)x^{-n+r}\qquad r=0,1,\cdots,n-1$$

$$=\log x\qquad r=n$$

であるから、これらを (0.1) に代入して(2.1)を得る。

$m=0,1,2,\cdots$ のときは (0.1') が適用されて次式を得る。

$$\left(x^m\log x\right)^{(n)}=-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(n-r)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-n}+\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-n)}x^{m-n}\log x$$

$$+\sum_{r=n+1}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-n}(\log x)^{(n-r)}$$

但し$m<n$ のときには$r=n$ の項に至らないから右辺第2項は存在しない。

例1　$\sqrt{x}\log x$ の3階微分

$\alpha=1/2$, $n=3$ を (2.1) に代入すると次のとおり。

$$\left(\sqrt{x}\log x\right)^{(3)}=-\sum_{r=0}^{2}(-1)^{3-r}\binom{3}{r}\frac{\Gamma(2-r)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2-r)}x^{-\frac{5}{2}}+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-3/2)}x^{-\frac{5}{2}}\log x$$

$$=-\left\{-\binom{3}{0}2!\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)}+\binom{3}{1}1!\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}-\binom{3}{2}0!\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)}\right\}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-3/2)}x^{-\frac{5}{2}}\log x$$

$$=\left(2-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{5}{2}}+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-3/2)}x^{-\frac{5}{2}}\log x=\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\log x\right)x^{-\frac{5}{2}}$$

例1'　$x^3\log x$ の2階微分

$m=3$, $n=2$ を (2.1') に代入すると次のとおり。

$$\left(x^3\log x\right)^{(2)}=-\sum_{r=0}^{1}(-1)^{2-r}\binom{2}{r}\frac{\Gamma(2-r)\Gamma(4)}{\Gamma(4-r)}x^1+\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)}x^1\log x$$

$$=-\left\{(-1)^2\binom{2}{0}\frac{1!\,3!}{3!}+(-1)^1\binom{2}{1}\frac{0!\,3!}{2!}\right\}x^1+\frac{3!}{1!}x^1\log x$$

$$=(5+6\log x)x^1$$

例1"　$x^2\log x$ の3階微分

$m=2$, $n=3$ を (2.1') に代入すると次のとおり。

$$\left(x^2\log x\right)^{(3)}=-\sum_{r=0}^{2}\binom{3}{r}(-1)^{3-r}\frac{\Gamma(3-r)\Gamma(3)}{\Gamma(3-r)}x^{-1}$$

$$=-\left\{\binom{3}{0}(-1)^3 2!+\binom{3}{1}(-1)^2 2!+\binom{3}{2}(-1)^1 2!\right\}x^{-1}$$

$$=2x^{-1}$$

例2　$\log x/x$ の3階微分

$\alpha=-1,-2,-3,\cdots$ のとき、(2.1) は次のように読み替えられる。

$$\left(x^{\alpha}\log x\right)^{(n)}=-(-1)^n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(n-r)\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-n}+(-1)^n\frac{\Gamma(-\alpha+n)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-n}\log x$$

$\alpha=-1$, $n=3$ をこれに代入すると次のとおり。

$$\left(\frac{\log x}{x}\right)^{(3)}=-(-1)^{-3}\sum_{r=0}^{2}\binom{3}{r}\frac{\Gamma(3-r)\Gamma(1+r)}{\Gamma(1)}x^{-4}+(-1)^{-3}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1)}x^{-4}\log x$$

$$=x^{-4}\left\{\binom{3}{0}\Gamma(3)\Gamma(1)+\binom{3}{1}\Gamma(2)\Gamma(2)+\binom{3}{2}\Gamma(1)\Gamma(3)-6\log x\right\}$$

$$= \frac{1}{x^4}(11 - 6\log x)$$

18·2·3　$x^\alpha \sin x,\ x^\alpha \cos x$ の高階微分

公式18·2·3

$$\left(x^\alpha \sin x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r} \sin\left\{x + \frac{(n-r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1s}$$

$$\left(x^\alpha \cos x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r} \cos\left\{x + \frac{(n-r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1c}$$

特に　$m = 0, 1, 2, \cdots$ のとき

$$\left(x^m \sin x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{m} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \sin\left\{x + \frac{(n-r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1's}$$

$$\left(x^m \cos x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{m} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \cos\left\{x + \frac{(n-r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1'c}$$

例1　$\sqrt[3]{x}\ \sin x$ の2階微分

$\alpha=1/3$，$n=2$ を (3.1s) に代入すれば

$$\left(\sqrt[3]{x}\ \sin x\right)^{(2)} = \sum_{r=0}^{2} \binom{2}{r} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(4/3-r)} x^{\frac{1}{3}-r} \sin\left\{x + \frac{(2-r)\pi}{2}\right\}$$

$$= \binom{2}{0} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(4/3)} x^{\frac{1}{3}} \sin(x+\pi) + \binom{2}{1} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(1/3)} x^{-\frac{2}{3}} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \binom{2}{2} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(-2/3)} x^{-\frac{5}{3}} \sin x$$

$$= -x^{\frac{1}{3}} \sin x + \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cos x - \frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} \sin x$$

例1'　$x^2 \sin x$ の3階微分

$m=2$，$n=3$ を (3.1's) に代入すれば

$$\left(x^2 \sin x\right)^{\{3\}} = \sum_{r=0}^{2} \binom{3}{r} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-r)} x^{2-r} \sin\left\{x + \frac{(3-r)\pi}{2}\right\}$$

$$= \binom{3}{0} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)} x^2 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \binom{3}{1} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} x^1 \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$+ \binom{3}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)} x^0 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \cos x$$

18·2·4　$x^\alpha \sinh x,\ x^\alpha \cosh x$ の高階微分

公式18·2·4

$$\left(x^\alpha \sinh x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r} \frac{e^x - (-1)^{-(n-r)} e^{-x}}{2} \tag{4.1s}$$

$$\left(x^{\alpha}\cosh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\frac{e^{x}+(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2} \tag{4.1c}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left(x^{m}\sinh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^{x}-(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2} \tag{4.1's}$$

$$\left(x^{m}\cosh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^{x}+(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2} \tag{4.1'c}$$

例1 $\sqrt[3]{x}\,\sinh x$ の2階微分

$\alpha=1/3$, $n=2$ を(4.1s)に代入すれば

$$\left(\sqrt[3]{x}\,\sinh x\right)^{(2)}=\sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(4/3-r)}x^{\frac{1}{3}-r}\frac{e^{x}-(-1)^{-(2-r)}e^{-x}}{2}$$

$$=\binom{2}{0}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(4/3)}x^{\frac{1}{3}}\sinh x+\binom{2}{1}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(1/3)}x^{-\frac{2}{3}}\cosh x+\binom{2}{2}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(-2/3)}x^{-\frac{5}{3}}\sinh x$$

$$=x^{\frac{1}{3}}\sinh x+\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cosh x-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\sinh x$$

例1' $x^{2}\sinh x$ の3階微分

$m=2$, $n=3$ を(4.1's)に代入すれば

$$\left(x^{2}\sinh x\right)^{\{3\}}=\sum_{r=0}^{2}\binom{3}{r}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-r)}x^{2-r}\frac{e^{x}-(-1)^{-(3-r)}e^{-x}}{2}$$

$$=\binom{3}{0}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)}x^{2}\cosh x+\binom{3}{1}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)}x^{1}\sinh x+\binom{3}{2}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}x^{0}\cosh x$$

$$=x^{2}\cosh x+6\,x\sinh x+6\cosh x$$

18･3　$\log x\ f(x)$ の高階微分

18･3･1　$(\log x)^2$ の高階微分

公式18･3･1

$$\left(\log^2 x\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{2\Gamma(n)\log x - \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\Gamma(n-r)\Gamma(r)\right\} \tag{1.1}$$

導出

定理18･1･1において $f(x)=g(x)=\log x$ とすれば、

$$(\log x)^{(n-r)} = (-1)^{n-r-1}\frac{\Gamma(n-r)}{x^{n-r}}\ ,\ \ (\log x)^{(r)} = (-1)^{r-1}\frac{\Gamma(r)}{x^r} \qquad n=1,2,\cdots$$

であるから

$$\begin{aligned}
\left(\log^2 x\right)^{(n)} &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\log x)^{(n-r)}(\log x)^{(r)} \\
&= \binom{n}{0}(\log x)^{(n)}(\log x)^{(0)} + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}(\log x)^{(n-r)}(\log x)^{(r)} \\
&\qquad + \binom{n}{n}(\log x)^{(n-n)}(\log x)^{(n)} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2}{x^n}\Gamma(n)\log x + \frac{(-1)^n}{x^n}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\Gamma(n-r)\Gamma(r) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{2\Gamma(n)\log x - \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\Gamma(n-r)\Gamma(r)\right\}
\end{aligned}$$

例　$(\log x)^2$ の3階微分

$$\begin{aligned}
\left(\log^2 x\right)^{(3)} &= \frac{(-1)^{3-1}}{x^3}\left\{2\Gamma(3)\log x - \sum_{r=1}^{2}\binom{3}{r}\Gamma(3-r)\Gamma(r)\right\} \\
&= \frac{1}{x^3}\left\{2\cdot 2\log x - \binom{3}{1}\Gamma(2)\Gamma(1) - \binom{3}{2}\Gamma(1)\Gamma(2)\right\} \\
&= \frac{1}{x^3}(4\log x - 6)
\end{aligned}$$

18･3･2　$\log x\cdot\sin x,\ \log x\cdot\cos x$ の高階微分

公式18･3･2

$$\begin{aligned}
(\log x\cdot\sin x)^{(n)} &= \log x\cdot\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\
&\qquad + \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}
\end{aligned} \tag{2.0s}$$

$$(\log x \cdot \cos x)^{(n)} = \log x \cdot \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\} \qquad (2.0c)$$

例　$\boldsymbol{\log x \cdot \sin x}$ の3階微分

$$(\log x \cdot \sin x)^{(3)} = \log x \cdot \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) + \sum_{r=1}^{3}(-1)^{r-1}\binom{3}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\sin\left\{x+\frac{(3-r)\pi}{2}\right\}$$

$$= -\log x \cdot \cos x + \binom{3}{1}\frac{\Gamma(1)}{x^1}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) - \binom{3}{2}\frac{\Gamma(2)}{x^2}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)$$

$$+\binom{3}{3}\frac{\Gamma(3)}{x^3}\sin\left(x+\frac{0\pi}{2}\right)$$

$$= -\log x \cdot \cos x - \frac{3}{x^1}\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x + \frac{2}{x^3}\sin x$$

18·3·3　$\boldsymbol{\log x \cdot \sinh x}$, $\boldsymbol{\log x \cdot \cosh x}$ の高階微分

公式18·3·3

$$(\log x \cdot \sinh x)^{(n)} = \log x \cdot \frac{e^x - (-1)^{-n}e^{-x}}{2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\frac{e^x - (-1)^{r-n}e^{-x}}{2} \qquad (3.0s)$$

$$(\log x \cdot \cosh x)^{(n)} = \log x \cdot \frac{e^x + (-1)^{-n}e^{-x}}{2}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\frac{e^x + (-1)^{r-n}e^{-x}}{2} \qquad (3.0c)$$

例　$\boldsymbol{\log x \cdot \cosh x}$ の4階微分

$$(\log x \cdot \cosh x)^{(4)} = \log x \cdot \frac{e^x+(-1)^{-4}e^{-x}}{2} + \sum_{r=1}^{4}(-1)^{r-1}\binom{4}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\frac{e^x+(-1)^{r-4}e^{-x}}{2}$$

$$= \log x \cdot \cosh x + \binom{4}{1}\frac{\Gamma(1)}{x^1}\sinh x - \binom{4}{2}\frac{\Gamma(2)}{x^2}\cosh x$$

$$+\binom{4}{3}\frac{\Gamma(3)}{x^3}\sinh x - \binom{4}{4}\frac{\Gamma(4)}{x^4}\cosh x$$

$$= \log x \cdot \cos x + \frac{4}{x^1}\sinh x - \frac{6}{x^2}\cosh x + \frac{8}{x^3}\sinh x - \frac{6}{x^4}\cosh x$$

18･4 $e^x f(x)$ の高階微分

18･4･1 $e^x x^\alpha$ の高階微分

公式18･4･1

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{(n)} = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r} \qquad for\ \alpha \ne -1,-2,-3,\cdots \tag{1.1}$$

$$= e^x \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-r} \qquad for\ \alpha = -1,-2,-3,\cdots \tag{1.2}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left(e^x x^m\right)^{(n)} = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \tag{1.2}$$

導出

公式18･2･0において $f(x)=e^x$ と置けば $\left(e^x\right)^{(n-r)} = e^x$ であるから直ちに与式を得る。

例1 $e^x\sqrt{x}$ の2階微分

$$\left(e^x\sqrt{x}\right)^{(2)} = e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{2}{r} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2-r)} x^{\frac{1}{2}-r}$$

$$= e^x\left\{ \binom{2}{0} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)} x^{\frac{1}{2}} + \binom{2}{1} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} x^{-\frac{1}{2}} + \binom{2}{2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)} x^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= e^x\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \right) = e^x\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}\right)$$

例2 e^x/x の2階微分

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)^{(2)} = e^x \sum_{r=0}^{2} (-1)^r \binom{2}{r} \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1)} x^{-1-r}$$

$$= e^x\left\{ \binom{2}{0} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} x^{-1} - \binom{2}{1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} x^{-2} + \binom{2}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)} x^{-3} \right\}$$

$$= \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

18･4･2 $e^x \log x$ の高階微分

公式18･4･2

$$\left(e^x \log x\right)^{(n)} = e^x \log x + e^x \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(r)}{x^r} \tag{2.1}$$

導出

定理18･1･1において $f(x)=e^x$, $g(x)=\log x$ と置けば、

$$(\log x)^{(r)}=(-1)^{r-1}\frac{\Gamma(r)}{x^r} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

であるから

$$\left(e^x\log x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^x(\log x)^{(r)}=\binom{n}{0}e^x(\log x)^{(0)}+\sum_{r=1}^{n}e^x(\log x)^{(r)}$$

$$=e^x\log x+e^x\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}$$

例　$\boldsymbol{e^x\log x}$ の4階微分

$$\left(e^x\log x\right)^{(4)}=e^x\log x+e^x\sum_{r=1}^{4}(-1)^{r-1}\binom{4}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}$$

$$=e^x\log x+e^x\left\{\binom{4}{1}\frac{\Gamma(1)}{x^1}-\binom{4}{2}\frac{\Gamma(2)}{x^2}+\binom{4}{3}\frac{\Gamma(3)}{x^3}-\binom{4}{4}\frac{\Gamma(4)}{x^4}\right\}$$

$$=e^x\log x+e^x\left(\frac{4}{x^1}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$$

18･4･3　$\boldsymbol{e^x\sin x,\ e^x\cos x}$ の高階微分

公式18･4･3

$$\left(e^x\sin x\right)^{(n)}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\left(e^x\cos x\right)^{(n)}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

導出

「共立 数学公式 p187」のものをそのまま転記。

例

$$\left(e^x\sin x\right)^{(2)}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-2}e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)=2e^x\cos x$$

$$\left(e^x\cos x\right)^{(3)}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-3}e^x\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=-2e^x(\sin x+\cos x)$$

$e^x\sin x$, $e^x\sin x$ の高階微分はこれで終わりである。定理18･1･1の出る幕はない。ところがあえて定理18･1･1を適用すると面白い結果が得られる。

有限三角級数

公式18･4･3’

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.1s}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.1c}$$

特に $x=0$ のとき

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\frac{r\pi}{2}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\sin\frac{n\pi}{4} \tag{3.1's}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\frac{r\pi}{2}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\cos\frac{n\pi}{4} \tag{3.1'c}$$

導出

定理18･1･1において、$f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x,\ \cos x$ と置けば次式を得る。

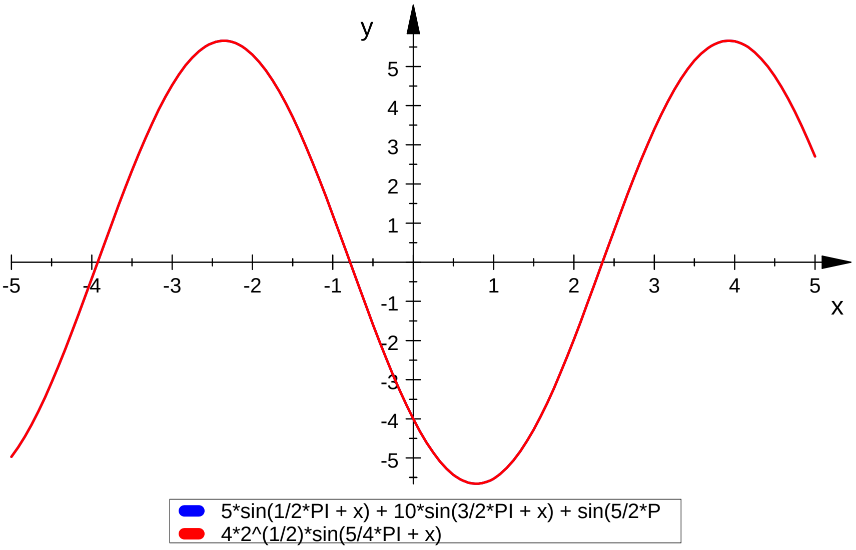
$$\left(e^x\sin x\right)^{(n)}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

$$\left(e^x\cos x\right)^{(n)}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

そしてこれらを公式18･4･3 と比べることにより直ちに与式を得る。

(3.1s)の両辺を $n=5$ の場合について図示すると次のようになる。青が左辺でが右辺であるが、両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

- plotfunc2d(sl(5),sr(5))



有限交代二項級数

(3.1's), (3.1'c) から冗長な $\sin\dfrac{r\pi}{2}$, $\cos\dfrac{r\pi}{2}$ を除くと次の有限交代二項級数が得られる。

公式18・4・3"

$$\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r+1} = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} \tag{3.2s}$$

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r} = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \tag{3.2c}$$

導出

(3.1's) の左辺の奇数項は全て0であるから、

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\frac{r\pi}{2} = \binom{n}{0}\sin\frac{0\pi}{2}+\binom{n}{1}\sin\frac{1\pi}{2}+\binom{n}{2}\sin\frac{2\pi}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \binom{n}{1}\sin\frac{1\pi}{2}+\binom{n}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\binom{n}{5}\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots\pm\binom{n}{\frac{n-1}{2}\downarrow}\sin\frac{\frac{n-1}{2}\downarrow\pi}{2}$$

$$= \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots\pm\binom{n}{\frac{n-1}{2}\downarrow} = \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r+1}$$

また、(3.1's) の右辺において $\{\sin(\pi/4)\}^{-n} = 2^{n/2}$ であるから

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r+1} = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} \tag{3.2s}$$

次に(3.1'c) の左辺の偶数項は全て0であるから、

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\frac{r\pi}{2} = \binom{n}{0}\cos\frac{0\pi}{2}+\binom{n}{1}\cos\frac{1\pi}{2}+\binom{n}{2}\cos\frac{2\pi}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$= \binom{n}{0}\cos\frac{0\pi}{2}+\binom{n}{2}\cos\frac{2\pi}{2}+\binom{n}{4}\cos\frac{4\pi}{2}+\cdots\pm\binom{n}{n/2\downarrow}\cos\frac{n/2\downarrow\pi}{2}$$

$$= \binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots\pm\binom{n}{n/2\downarrow} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r}$$

また、(3.1'c) の右辺において $\{\sin(\pi/4)\}^{-n} = 2^{n/2}$ であるから

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r} = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \tag{3.2c}$$

なお、この公式は既出である。(岩波　数学公式Ⅱ p11)

Note

$n=4k-3$, $k=1,2,3,\cdots$ のとき

$$\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r+1} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r}$$

例

$$\binom{5}{1}-\binom{5}{3}+\binom{5}{5}=5-10+1=2^{\frac{5}{2}}\sin\frac{5\pi}{4}=-4$$

$$\binom{5}{0}-\binom{5}{2}+\binom{5}{4}=1-10+5=2^{\frac{5}{2}}\cos\frac{5\pi}{4}=-4$$

18·4·4 $\boldsymbol{e^x \sinh x,\ e^x \cosh x}$ の高階微分

公式18·4·4

$$\left(e^x \sinh x\right)^{(n)}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0s}$$

$$\left(e^x \cosh x\right)^{(n)}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^x+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0c}$$

例

$$\left(e^x \sinh x\right)^{(0)}=e^x\sum_{r=0}^{0}\binom{0}{r}\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2}=e^x \sinh x$$

$$\begin{aligned}\left(e^x \cosh x\right)^{(3)}&=e^x\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}\frac{e^x+(-1)^{-r}e^{-x}}{2}\\&=e^x\left\{\binom{3}{0}\sinh x+\binom{3}{1}\cosh x+\binom{3}{2}\sinh x+\binom{3}{3}\cosh x\right\}\\&=4e^x(\sinh x+\cosh x)\end{aligned}$$

Note

自然数 n については

$$\left(e^x \sinh x\right)^{(n)}=\left(e^x \cosh x\right)^{(n)}=2^{n-1}e^x(\sinh x+\cosh x)$$

となる。しかしこれは $n=0$ については成立しない。よってこの式は自然数 n を実数 p に解析接続できず、一般式として採用するには不十分である。

18･5 $e^{-x}f(x)$ の高階微分

18･5･1 $e^{-x}x^{\alpha}$ の高階微分

公式18･5･1

$$\left(e^{-x}x^{\alpha}\right)^{(n)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{-(n-r)}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\quad for\ \alpha\neq-1,-2,-3,\cdots \tag{1.1}$$

$$=(-1)^{-n}e^{-x}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-r}\qquad for\ \alpha=-1,-2,-3,\cdots \tag{1.2}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left(e^{-x}x^{m}\right)^{(n)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{-(n-r)}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r} \tag{1.1'}$$

導出

公式18･2･0において $f(x)=e^{-x}$ と置けば $\left(e^{-x}\right)^{(n-r)}=(-1)^{-(n-r)}e^{-x}$ であるから直ちに与式を得る。

例1 e^{-x}/x の3階微分

$$\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)^{(3)}=(-1)^{-3}e^{-x}\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1)}x^{-1-r}$$

$$=-e^{-x}\left\{\binom{3}{0}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)}x^{-1}+\binom{3}{1}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}x^{-2}+\binom{3}{2}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}x^{-3}+\binom{3}{3}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1)}x^{-4}\right\}$$

$$=-\frac{e^{-x}}{x}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)$$

例1' $e^{-x}x^{7}$ の3階微分

$$\left(e^{-x}x^{7}\right)^{(3)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{7}(-1)^{-(3-r)}\binom{3}{r}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(8-r)}x^{7-r}$$

$$=e^{-x}\left\{-\binom{3}{0}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(8)}x^{7}+\binom{3}{1}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(7)}x^{6}-\binom{3}{2}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(6)}x^{5}+\binom{3}{3}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(5)}x^{4}\right\}$$

$$=e^{-x}x^{4}\left(-x^{3}+21x^{2}-126x^{1}+210\right)$$

18･5･2 $e^{-x}\log x$ の高階微分

公式18･5･2

$$\left(e^{-x}\log x\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{-n}}{e^{x}}\left\{\log x-\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^{r}}\right\} \tag{2.1}$$

導出

定理18･1･1において $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=log\,x$ と置けば、

$$\left(e^{-x}\right)^{(n-r)}=(-1)^{-n+r}e^{-x}$$

$$(log\,x)^{(r)}=(-1)^{r-1}\frac{\Gamma(r)}{x^r} \qquad\qquad r=1,2,3,\cdots$$

であるから

$$\left(e^{-x}log\,x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{-n+r}e^{-x}(log\,x)^{(r)}$$

$$=\binom{n}{0}(-1)^{-n}e^{-x}(log\,x)^{(0)}+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{-n+r}e^{-x}(log\,x)^{(r)}$$

$$=\frac{(-1)^{-n}}{e^x}\left\{log\,x-\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\right\}$$

例　$\boldsymbol{e^{-x}log\,x}$ の4階微分

$$\left(e^{x}log\,x\right)^{(4)}=\frac{(-1)^{-4}}{e^x}\left\{log\,x-\sum_{r=1}^{4}\binom{4}{r}\frac{\Gamma(r)}{x^r}\right\}$$

$$=\frac{log\,x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\left\{\binom{4}{1}\frac{\Gamma(1)}{x^1}+\binom{4}{2}\frac{\Gamma(2)}{x^2}+\binom{4}{3}\frac{\Gamma(3)}{x^3}+\binom{4}{r}\frac{\Gamma(4)}{x^4}\right\}$$

$$=\frac{log\,x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\left(\frac{4}{x^1}+\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{6}{x^4}\right)$$

18･5･3　$\boldsymbol{e^{-x}sin\,x,\ e^{-x}cos\,x}$ の高階積分

公式18･5･3

$$\left(e^{-x}sin\,x\right)^{(n)}=\left(-sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}e^{-x}sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\left(e^{-x}cos\,x\right)^{(n)}=\left(-sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}e^{-x}cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

導出

前節の公式18･4･3において x を $-x$ に置換して与式を得る。

例

$$\left(e^{-x}sin\,x\right)^{(2)}=\left(-sin\frac{\pi}{4}\right)^{-2}e^{-x}sin\left(x-\frac{2\pi}{4}\right)=-2e^{-x}cos\,x$$

$$\left(e^{-x}cos\,x\right)^{(3)}=\left(-sin\frac{\pi}{4}\right)^{-3}e^{-x}cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=-2e^{-x}(sin\,x-cos\,x)$$

$e^{-x}\sin x$, $e^{-x}\cos x$ の高階微分はこれで終わりである。定理18･1･1の出る幕はない。しかし前節でしたように $\left(e^{-x}\sin x\right)^{(n)}$, $\left(e^{-x}\cos x\right)^{(n)}$ にあえて定理18･1･1を適用すれば先ず

$$\left(e^{-x}\sin x\right)^{(n)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

となり、これと (3.0s) より有限交代三角関数項級数

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{-r}\binom{n}{r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n}\sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

が得られる。$e^{-x}\cos x$ についても同様である。そしてこれらの特殊値から $\sin\dfrac{r\pi}{2}$, $\cos\dfrac{r\pi}{2}$ を除去すれば前節の公式18･4･3"と全く同じ有限二項級数が得られる。

18･5･4 $e^{-x}\sinh x$, $e^{-x}\cosh x$ の高階微分

公式18･5･4

$$\left(e^{-x}\sinh x\right)^{(n)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{-n+r}\binom{n}{r}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0s}$$

$$\left(e^{-x}\cosh x\right)^{(n)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{-n+r}\binom{n}{r}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0c}$$

導出

定理18･1･1において $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=\sinh x$, $\cosh x$ と置いて与式を得る。

例

$$\left(e^{-x}\sinh x\right)^{(0)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{0}(-1)^{-0+r}\binom{0}{r}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2}=e^{-x}\sinh x$$

$$\begin{aligned}\left(e^{-x}\cosh x\right)^{(3)}&=e^{-x}\sum_{r=0}^{3}(-1)^{-3+r}\binom{3}{r}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2}\\&=e^{-x}\left\{-\binom{3}{0}\cosh x+\binom{3}{1}\sinh x-\binom{3}{2}\cosh x+\binom{3}{3}\sinh x\right\}\\&=-4e^{-x}(\cosh x-\sinh x)\end{aligned}$$

Note

自然数 n については

$$\left(e^{-x}\sinh x\right)^{(n)}=\left(e^{-x}\cosh x\right)^{(n)}=(-2)^{n-1}e^{x}(\cosh x-\sinh x)$$

となる。しかしこれは $n=0$ については成立しない。よってこの式は自然数 n を実数 p に解析接続できず、一般式として採用するには不十分である。

18・6 $\sin x\, f(x),\ \cos x\, f(x)$の高階微分

18・6・1 $\sin^2 x,\ \cos^2 x$ の高階微分

公式18・6・1

$$\left(\sin^2 x\right)^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right) \tag{1.0s}$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right) \tag{1.0c}$$

証明

次の公式18・6・1'より

$$\left(\cos^2 x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)$$

ここで

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2^1}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$

であるから、

$$\left(\cos^2 x\right)^{(n)} = \frac{1}{2^1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left\{\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}-r\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2^1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} + \frac{1}{2^1}\cos\frac{n\pi}{2}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}$$

そして

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = 2^n\ ,\qquad \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = 0$$

であるからこれらを代入してを (1.0c) を得る。(1.0s) も類似の方法で得られる。

例

$$\left(\sin^2 x\right)^{(2)} = -2^{2-1}\cos\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right) = 2\cos 2x = 2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(3)} = 2^{3-1}\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right) = 4\sin 2x = 8\sin x\cos x$$

公式18・6・1'

$$\left(\sin^2 x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) \tag{1.1s}$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) \tag{1.1c}$$

導出

定理18･1･1において $f(x)=g(x)=\sin x$ と置いて (1.1s) を得る。(1.1s) も同様。

公式18･6･1”

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r} = 2^{n-1} \tag{1.2e}$$

$$\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1} = 2^{n-1} \tag{1.2o}$$

導出

(1.1s) は次のように変形される。

$$\begin{aligned}\left(\sin^2 x\right)^{(n)} &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)\\ &= \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r}\sin\left\{x+\frac{(n-2r)\pi}{2}\right\}\sin\left(x+\frac{2r\pi}{2}\right)\\ &\quad+\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}\sin\left\{x+\frac{(n-2r-1)\pi}{2}\right\}\sin\left\{x+\frac{(2r+1)\pi}{2}\right\}\\ &= \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r}\sin\left\{x+\frac{(n-2r)\pi}{2}\right\}\sin x\\ &\quad+\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r+1}\sin\left\{x+\frac{(n-2r-1)\pi}{2}\right\}\cos x\end{aligned}$$

即ち

$$\left(\sin^2 x\right)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sin x\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r} - \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cos x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}$$

一方、(1.0s) もまた次のように変形される。

$$\left(\sin^2 x\right)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sin x - 2^{n-1}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cos x$$

これらより次式が従う。

$$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sin x\left\{\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r}-2^{n-1}\right\} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cos x\left\{\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}-2^{n-1}\right\}$$

任意の x についてこの等式が成立するためには

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r}-2^{n-1}=0 \quad , \quad \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}-2^{n-1}=0$$

でなければならない。 なお、この公式は既出である。(岩波 数学公式Ⅱ p11)

18･6･2 $\sin^3 x, \cos^3 x$ の高階微分

公式18･6･2

$$\left(\sin^3 x\right)^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right) \tag{2.0s}$$

$$\left(\cos^3 x\right)^{(n)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right) \tag{2.0c}$$

導出

次の公式18･6･2'から2次の場合と類似の方法で得られる。但し2次の場合ほど簡単ではない。(20･1･3 参照。)

例

$$\left(\sin^3 x\right)^{(2)} = \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) - \frac{3^2}{4}\sin\left(3x+\frac{2\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4}\sin x + \frac{9}{4}\sin 3x$$

$$\left(\cos^3 x\right)^{(3)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3^3}{4}\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\sin x + \frac{27}{4}\sin 3x$$

公式18･6･2'

$$\begin{aligned}\left(\sin^3 x\right)^{(n)} &= \left(\sin^2 x\right)^{(0)}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\\ &\quad - \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}2^{r-1}\cos\left(2x+\frac{r\pi}{2}\right)\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\end{aligned} \tag{2.1s}$$

$$\begin{aligned}\left(\cos^3 x\right)^{(n)} &= \left(\cos^2 x\right)^{(0)}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\\ &\quad + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}2^{r-1}\cos\left(2x+\frac{r\pi}{2}\right)\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\end{aligned} \tag{2.1c}$$

導出

定理18･1･1において $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=\sin x$ と置いて(2.1s) を得る。(2.1c) も同様。

公式18･6･2"

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} 2^{2r-1}\binom{n}{2r} = \frac{3^n+(-1)^n}{4} \tag{2.2e}$$

$$\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} 2^{2r}\binom{n}{2r+1} = \frac{3^n-(-1)^n}{4} \tag{2.2o}$$

導出

(2.1s) より

$$\begin{aligned}\left(\sin^3 x\right)^{(n)} &= \left(\sin^2 x\right)^{(0)}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}2^{r-1}\cos\left(2x+\frac{r\pi}{2}\right)\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\\ &= \left(\sin^2 x\right)^{(0)}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\\ &\quad - \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}2^{2r}\cos\left\{2x+\frac{(2r+1)\pi}{2}\right\}\sin\left\{x+\frac{(n-2r-1)\pi}{2}\right\}\end{aligned}$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r}2^{2r-1}\cos\left(2x+\frac{2r\pi}{2}\right)\sin\left\{x+\frac{(n-2r)\pi}{2}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-2^{-1}\cos 2x\right)\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r+1}2^{2r}\sin 2x\sin\left\{x+\frac{(n-2r-1)\pi}{2}\right\}$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r\binom{n}{2r}2^{2r-1}\cos 2x\sin\left\{x+\frac{(n-2r)\pi}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}2^{2r}\sin 2x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$-\binom{n}{0}2^{-1}\cos 2x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r}2^{2r-1}\cos 2x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\binom{n}{2r+1}2^{2r}\sin 2x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$-\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n}{2r}2^{2r-1}\cos 2x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$n=1$ のとき

$$\left(\sin^3 x\right)^{(1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)-\cos 2x\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)2^{-1}\binom{1}{0}-\sin 2x\cos\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)2^{0}\binom{1}{1}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos 2x\cos x+1\sin 2x\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin 2x\sin x-\frac{1}{2}(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin 2x\sin x-\frac{1}{2}\cos 3x$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)-\frac{1}{2}\cos 3x$$

$$=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)-\frac{3^1}{4}\sin\left(3x+\frac{1\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad\sum_{r=0}^{1/2\downarrow}2^{2r-1}\binom{1}{2r}=\frac{3^1-1}{4}=\frac{1}{2}=\frac{3^1+(-1)^1}{4}$$

$$\therefore\quad\sum_{r=0}^{(1-1)/2\downarrow}2^{2r}\binom{1}{2r+1}=\frac{3^1-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3^1+1}{4}=1=\frac{3^1-(-1)^1}{4}$$

$n=2$ のとき

$$\left(\sin^3 x\right)^{(2)}=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)-\cos 2x\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\left\{2^{-1}\binom{2}{0}+2^{1}\binom{2}{2}\right\}$$

$$- \sin 2x \cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) 2^{0} \binom{2}{1}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{5}{2}\cos 2x \sin x + 2 \sin 2x \cos x$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) + 2\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{9}{4}\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) - \frac{3^2}{4}\sin\left(3x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

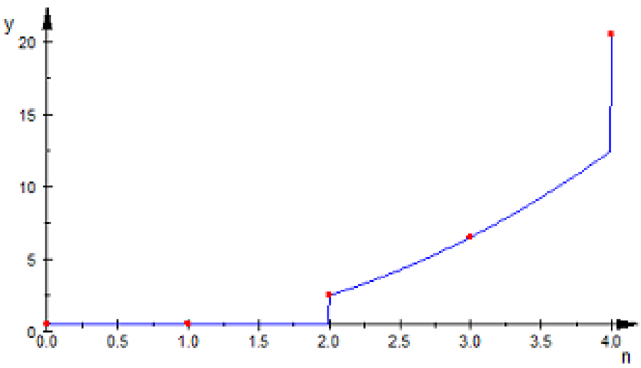
$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{2/2\downarrow} 2^{2r-1}\binom{2}{2r} = \frac{3^2-1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{3^2+1}{4} = \frac{3^2+(-1)^2}{4}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{(2-1)/2\downarrow} 2^{2r}\binom{2}{2r+1} = \frac{3^2-1}{4} = 2 = \frac{3^2-(-1)^2}{4}$$

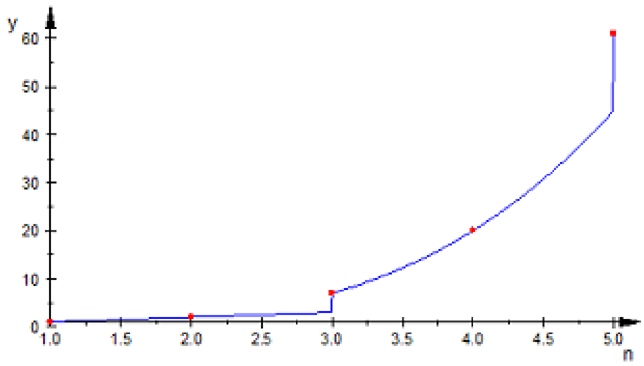
以下、帰納法により与式を得る。

公式18･6･2” の両辺を図示すると次のようになる。左辺が青線、右辺が赤点である。

- Se := $n \rightarrow \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} 2^{2\cdot r-1}\cdot\binom{n}{2\cdot r}$
- Ser := $n \rightarrow \frac{3^n+(-1)^n}{4}$



- So := $n \rightarrow \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} 2^{2\cdot r}\cdot\binom{n}{2\cdot r+1}$
- Sor := $n \rightarrow \frac{3^n-(-1)^n}{4}$



18・6・3　三角関数と双曲線関数の積の高階微分

公式18・6・3

$$\left(\sin x\cdot\sinh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.1}$$

$$\left(\sin x\cdot\cosh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.2}$$

$$\left(\cos x\cdot\sinh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.3}$$

$$\left(\cos x\cdot\cosh x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.4}$$

導出

定理18・1・1において $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sinh x$ と置いて(3.1)を得る。他の式も同様。

例

$$\left(\sin x\cdot\cosh x\right)^{(0)}=\sum_{r=0}^{0}\binom{0}{r}\sin\left\{x+\frac{(0-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}+(-1)^{-0}e^{-x}}{2}=\sin x\cdot\cosh x$$

$$\left(\cos x\cdot\cosh x\right)^{(2)}=\sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}\cos\left\{x+\frac{(2-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\cosh x+2\cos\left(x+\frac{1\pi}{2}\right)\sinh x+\cos\left(x+\frac{0\pi}{2}\right)\cosh x$$

$$=-\cos x\cdot\cosh x-2\sin x\cdot\sinh x+\cos x\cdot\cosh x=-2\sin x\cdot\sinh x$$

18·7 $\sinh x\, f(x),\ \cosh x\, f(x)$の高階微分

18·7·1 $\sinh^2 x,\ \cosh^2 x$ の高階微分

公式18·7·1

$$\left(\sinh^2 x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^x-(-1)^{-n+r}e^{-x}}{2}\,\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \qquad (1.1s)$$

$$\left(\cosh^2 x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^x+(-1)^{-n+r}e^{-x}}{2}\,\frac{e^x+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \qquad (1.1c)$$

導出

定理18·1·1において $f(x)=g(x)=\sinh x$ と置いて (1.1s) を得る。(1.1c) も同様。

例

$$\left(\sinh^2 x\right)^{(0)} = \sum_{r=0}^{0}\binom{0}{r}\frac{e^x-(-1)^{-0+r}e^{-x}}{2}\,\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} = \sinh^2 x$$

$$\left(\cosh^2 x\right)^{(3)} = \sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}\frac{e^x+(-1)^{-3+r}e^{-x}}{2}\,\frac{e^x+(-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$= \binom{3}{0}\sinh x\cdot\cosh x+\binom{3}{1}\cosh x\cdot\sinh x+\binom{3}{2}\sinh x\cdot\cosh x+\binom{3}{3}\cosh x\cdot\sinh x$$

$$= 8\sinh x\cdot\cosh x = 4\sinh(2x)$$

2007.05.06

K. Kono

宇宙人の数学