19 2関数の積の超微分

19·1 超微分に関するライプニッツ則

定理19·1·1

$B(x,y)$ をベータ関数、p を非負の実数とする。そして $r=0,1,2,\cdots$ について $f^{<-p+r>}$ は $f(x)$ の任意の超原始関数であり $g^{(r)}$ は $g(x)$ の r 階導関数とする。すると次式が成立する。

$$\{f(x)g(x)\}^{(p)}=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}f^{(p-r)}(x)g^{(r)}(x)+R_m^p \tag{1.1}$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\left\{f^{<m+k>}(x)g^{(m+k)}(x)\right\}^{(p)} \tag{1.1r}$$

特に $n=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)\qquad(\text{ライプニッツ}) \tag{1.1'}$$

証明

16·1·2 の定理16·1. 2の (2.1) は次のようであった。

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<0>}g^{(0)}dx^n=&\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f^{<n+r>}g^{(r)}\\&-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}f_{a_{n-r}}^{<n-r+s>}g_{a_{n-r}}^{(s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r\\&+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\,f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle}g_{a_{n-r}}^{(m+s)}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r\\&+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^n\end{aligned}$$

$n=1$ のとき3行目のΣΣΣは存在せず $n=0$ のときは2行目のΣΣも存在しない。また4行目のΣの上限 $n-1$ は∞に置換できる。よって積分演算子のインデックス n を $-n$ に置き換えれば次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<0>}g^{(0)}dx^{-n}=&\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}f^{<-n+r>}g^{(r)}\\&+\frac{(-1)^m}{B(-n,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-n-1}{k}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^{-n}\end{aligned}$$

この式において積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続すれば

$$\begin{aligned}\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x}f^{<0>}g^{(0)}dx^{-p}=&\sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}f^{<-p+r>}g^{(r)}\\&+\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x}f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^{-p}\end{aligned}$$

そこで積分演算子 dx^{-p} , $<-p+r>$ を微分演算子 (p) , $(p-r)$ に書き換えて (1.1), (1.1r) を得る。

特に $p=m-1$, $m=1,2,3,\cdots$ のときは $B(-p,m)=B(1-m,\ m)=\pm\infty$ であるから $R_m^p=0$ 。 よって

$$\{f(x)g(x)\}^{(m-1)}=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{m-1}{r}f^{(m-1-r)}g^{(r)}$$

となり、さらに $m-1$ を n に置換して (1.1') を得る。

Q.E.D

19・2 $x^{\alpha}f(x)$ の超微分

公式19・2・0

$\Gamma(z)$ はガンマ関数、$B(n,m)$ はベータ関数、$f^{(r)}$ は $f(x)$ の任意の r 階導関数、$f_a^{(r)}$ は $f(x)$ の a における関数値とするとき、正数 p について次式が成立する。

(1)

$$\left\{x^{\alpha}f(x)\right\}^{(p)} = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}f^{(p-r)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}x^{\alpha-m-k}f^{<m+k>}\right\}^{(p)} \tag{0.1}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left\{x^{m}f(x)\right\}^{(p)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}f^{(p-r)} \tag{0.1'}$$

但し、$\alpha=-1,-2,-3,\cdots$ のときは次のように読み替えるものとする。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} \longrightarrow (-1)^{-r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)}$$

(2) $\alpha \ne -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha-p \ne -1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\left\{x^{m}f(x)\right\}^{(p)} = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r}f^{(r)}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}x^{\alpha+m+k}f^{(m+k)}\right\}^{(p)} \tag{0.2}$$

証明

微分は負の積分であるから、17・2 の公式17・2・0 において積分演算子のインデックス p をを $-p$ に置き換えて与式を得る。

19・2・1 $(ax+b)^p(cx+d)^q$ の超微分

公式19・2・1

$p-s \ne -1,-2,-3,\cdots$ なる $p>0$, $s>0$ について次式が成立する。

$$\left\{(ax+b)^p(cx+d)^q\right\}^{(s)}$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{s}{r}\frac{(1/a)^{-s+r}}{(1/c)^{r}}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p-s+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p-s+r}}{(cx+d)^{r-q}}+R_m^s \tag{1.1}$$

$$R_m^s=\frac{(-1)^m}{B(-s,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-s-1}{k}\left(\frac{c}{a}\right)^{m+k}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p+m+k)\Gamma(1+q-m-k)}$$

$$\times\left\{(ax+b)^{p+m+k}(cx+d)^{q-m-k}\right\}^{(s)} \tag{1.1r}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^s=0$$

特に　$m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left\{(ax+b)^{p}(cx+d)^{m}\right\}^{(s)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{s}{r}\frac{(1/a)^{-s+r}}{(1/c)^{r}}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p-s+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p-s+r}}{(cx+d)^{r-m}} \tag{1.1'}$$

導出

定理19･1･1において $f(x)=(ax+b)^{p}$, $g(x)=(cx+d)^{q}$ と置いて導出するのが本来であるが、ここでは17･3･1 の公式17･3･1の積分演算子 $<s>$ の符号を反転して微分演算子 (s) に置換する。

例1　$\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}$ の **1/2** 階微分

$a=1,\ b=-2,\ p=1/2,\ c=3,\ d=4,\ q=1/3,\ s=1/2$ を (1.1) に代入すれば

$$\left(\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3x+4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}3^{r}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(4/3)}{\Gamma(1+r)\Gamma(4/3-r)}(x-2)^{r}(3x+4)^{\frac{1}{3}-r}$$

左辺は Riemann-Liouville differintegral の積分と微分の順序を入れ替えた式により計算するが、積分下限は17･3･1 の例1に従い $-b/a=2$ とする。

右辺を $m=17$ まで計算すれば、任意の1点 $x=5$ における超微係は次のようになる。

```
m = 17;
```

$$\text{fl}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-1/2]}\int_{2}^{x}(x-t)^{1-1/2-1}\,\partial_t\left(\sqrt{t-2}\,\sqrt[3]{3t+4}\right)dt$$

$$\text{fr}[x\_] := \sum_{r=0}^{m}\text{Binomial}\left[\frac{1}{2},r\right]3^{r}\frac{\text{Gamma}[3/2]\,\text{Gamma}[4/3]}{\text{Gamma}[1+r]\,\text{Gamma}[4/3-r]}\times(x-2)^{r}(3x+4)^{\frac{1}{3}-r}$$

```
N[fl[5]]        N[fr[5]]
2.5601          2.5601
```

例1’　$\sqrt[3]{3x+4}\,(x-2)^{2}$ の **1/2** 階微分

$a=3,\ b=4,\ p=1/3,\ c=1,\ d=-2,\ m=2,\ s=1/2$ を (1.1’) に代入すれば

$$\left\{\sqrt[3]{3x+4}\,(x-2)^{2}\right\}^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{r=0}^{2}\binom{1/2}{r}3^{\frac{1}{2}-r}\frac{\Gamma(4/3)\Gamma(3)}{\Gamma(5/6+r)\Gamma(3-r)}\frac{(3x+4)^{-\frac{1}{6}+r}}{(x-2)^{r-2}}$$

左辺は Riemann-Liouville differintegral により計算するが、積分下限は17･3･1の例1’に従い $-b/a=-4/3$ とする。任意の1点 $x=3$ における超微係数は次のとおり。

$$\text{fl}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-1/2]}\int_{-4/3}^{x}(x-t)^{1-1/2-1}\,\partial_t\left(\sqrt[3]{3t+4}\,(t-2)^{2}\right)dt$$

$$\text{fr}[x\_] := \sum_{r=0}^{2}\text{Binomial}\left[\frac{1}{2},r\right]3^{\frac{1}{2}-r}\frac{\text{Gamma}[4/3]\,\text{Gamma}[3]}{\text{Gamma}[5/6+r]\,\text{Gamma}[3-r]}\frac{(3x+4)^{-\frac{1}{6}+r}}{(x-2)^{r-2}}$$

```
N[fl[3]]        N[fr[3]]
2.79446         2.79446
```

例2 $\dfrac{\sqrt{x-2}}{3x+4}$ の**1/2**階微分

$q=-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-r)}=(-1)^{-r}\frac{\Gamma(-q+r)}{\Gamma(-q)}$$

であるから、(1.1) は次のように読み替えられる。

$$\left\{(ax+b)^{p}(cx+d)^{q}\right\}^{(s)}$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{s}{r}\frac{(1/a)^{-s+r}}{(-1/c)^{r}}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(-q+r)}{\Gamma(1+p-s+r)\Gamma(-q)}\frac{(ax+b)^{p-s+r}}{(cx+d)^{r-q}}+R_{m}^{s}$$

$a=1,\ b=-2,\ p=1/2\ ,\ c=3,\ d=4,\ q=-1\ ,\ s=1/2$ をこれに代入すれば

$$\left(\frac{\sqrt{x-2}}{3x+4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}(-3)^{r}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r)\Gamma(1)}\frac{(x-2)^{r}}{(3x+4)^{r+1}}$$

左辺の Riemann-Liouville differintegral の積分下限は 例1 と同様 $-b/a=2$ とする。右辺を $m=10$ まで計算すれば、任意の1点 $x=4$ における超微係数は次のとおり。

```
m = 10;
fl[x_] := 1/Gamma[1 - 1/2] ∫_2^x (x - t)^(1-1/2-1) ∂_t (√(t - 2)/(3 t + 4)) dt
fr[x_] := Σ_{r=0}^{m} Binomial[1/2, r] (-3)^r (Gamma[3/2] Gamma[1 + r])/(Gamma[1 + r] Gamma[1]) (x - 2)^r/(3 x + 4)^(r+1)
N[fl[4]]        N[fr[4]]
0.043789        0.043789
```

19·2·2 $x^{\alpha}\log x$ の超微分

公式19·2·2

$\Gamma(z)$, $\psi(z)$ をそれぞれ ガンマ関数、ディ·ガンマ関数とするとき次式が成立する。

(1)

$$\left(x^{\alpha}\log x\right)^{(p)}=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}\frac{\log x-\psi(1-p+r)-\gamma}{\Gamma(1-p+r)}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-p}+R_{m}^{p} \tag{2.1}$$

$$R_{m}^{p}=\frac{(-1)^{m}}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\left\{\frac{\log x-\psi(1+m+k)-\gamma}{\Gamma(1+m+k)}\frac{\Gamma(1+\alpha)x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}\right\}^{(p)} \tag{2.1r}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_{m}^{p}=0$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left(x^{m}\log x\right)^{(p)}=\sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\log x-\psi(1-p+r)-\gamma}{\Gamma(1-p+r)}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-p} \tag{2.1'}$$

(2) $\alpha\neq-1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha-p\neq-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\left(x^{\alpha}\log x\right)^{(p)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}x^{\alpha-p}\log x$$

$$+\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(r)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p} + R_m^p \tag{2.2}$$

$$R_m^p = \frac{x^{\alpha-p}}{B(-p,m)}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\binom{-p-1}{k}\frac{B(1+\alpha,m+k)}{m+k} \tag{2.2r}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^p = 0$$

導出

公式19･2･0において $f(x)=\log x$ と置いて与式を得る。

例1　$x^{3/2}\log x$ の **4/5** 階微分

$\alpha=3/2$, $p=4/5$ を上式の (2.1) に代入すれば

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\log x\right)^{(4/5)} = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{4/5}{r}\frac{\log x-\psi(1/5+r)-\gamma}{\Gamma(1/5+r)}\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2-r)}x^{\frac{7}{10}} + R_m^{\frac{4}{5}}$$

左辺の Riemann-Liouville differintegral の積分下限は $x=0$ である。

右辺を $m=120$ まで計算すれば、任意の1点 $x=3$ における超微係数は次のとおり。

```
a = 3 / 2;  p = 4 / 5;  m = 120;

fl[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_0^x (x - t)^(1-p-1) ∂_t (t^(3/2) Log[t]) dt

fr[x_] := Sum[Binomial[p, r] (Log[x] - PolyGamma[1 - p + r] - EulerGamma)/Gamma[1 - p + r]
          × Gamma[1 + a]/Gamma[1 + a - r] x^(a-p), {r, 0, m-1}]

N[fl[3]]          N[fr[3]]
5.02928           5.02928
```

例1’　$x^3\log x$ の **1.3** 階微分

$m=3$, $p=1.3$ を (2.1’) に代入すれば

$$\left(x^3\log x\right)^{(1.3)} = \sum_{r=0}^{3}\binom{1.3}{r}\frac{\log x-\psi(-0.3+r)-\gamma}{\Gamma(-0.3+r)}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-r)}x^{1.7}$$

任意の1点 $x=2.1$ における超微係数は次のとおり。

```
m = 3;  p = 1.3;

fl[x_] := 1/Gamma[2 - p] ∫_0^x (x - t)^(2-p-1) ∂_t (∂_t (t^3 Log[t])) dt

fr[x_] := Sum[Binomial[p, r] (Log[x] - PolyGamma[1 - p + r] - EulerGamma)/Gamma[1 - p + r]
          × Gamma[1 + m]/Gamma[1 + m - r] x^(m-p), {r, 0, m}]
```

`N[fl[2.1]]`	`N[fr[2.1]]`
16.4712	16.4712

関数の積の超微分の剰余項は超微分の無限和となるため計算が非常に難しいのであるが、上記の (2.2r) は例外的に容易であるので次に例示する。

例2 $\sqrt[3]{x}\,\log x$ の **1/2** 階微分

$\alpha=1/3$, $p=1/2$ を上記(2)に代入すれば

$$\left(x^{\alpha}\log x\right)^{(p)}=\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/6)}x^{-\frac{1}{6}}\log x$$

$$+\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1}\binom{-1/2}{r}\frac{\Gamma(4/3)\Gamma(r)}{\Gamma(5/6+r)}x^{-\frac{1}{6}}+R_m^{\frac{1}{2}}$$

$$R_m^{\frac{1}{2}}=\frac{x^{-\frac{1}{6}}}{B(-1/2,m)}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/6)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\binom{-3/2}{k}\frac{B(4/3,m+k)}{m+k}$$

$m=10$ として任意の1点 $x=1$ におけるそれぞれの値を計算すると次のとおり。

```
a = 1 / 3;  p = 1 / 2;  m = 10;
```

Riemann-Liouville Differintegrl

$$\texttt{fl[x\_] :=}\ \frac{1}{\texttt{Gamma[1 - p]}}\int_0^x (x-t)^{1-p-1}\,\partial_t\left(t^{\frac{1}{3}}\,\texttt{Log[t]}\right)dt$$

Series

$$\texttt{Sr[x\_] :=}\ \frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a - p]}}x^{a-p}\,\texttt{Log[x]}+\sum^{m-1}(-1)^{r-1}\,\texttt{Binomial[p, r]}\,\frac{\texttt{Gamma[1 + a] Gamma[r]}}{\texttt{Gamma[1 + a - p + r]}}x^{a-p}$$

Remainder

$$\texttt{Rm[x\_] :=}\ \frac{x^{a-p}}{\texttt{Beta[-p, m]}}\frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a - p]}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\texttt{Binomial[-p-1, k]}\,\frac{\texttt{Beta[1 + a, m + k]}}{\texttt{m + k}}$$

Riemann-Liouville Differintegrl	**Series**	**Remainder**	**Series+Remainder**
`N[fl[1]]`	`N[Sr[1]]`	`N[Rm[1]]`	`N[Sr[1] + N[Rm[1]]]`
0.600201	0.590565	0.00963605	0.600201

完全自己同形

17･3･2 の 公式17･3･2 の積分演算子のインデックス p の符号を反転すれば剰余項を含まない次式を得ることができる。但し、それは煩雑で収束速度も頗る遅い。

公式19･2･2'

$$\left(x^{\alpha}\log x\right)^{(p)}$$

$$=\frac{\dfrac{\log x-\psi(1-p)-\gamma}{\Gamma(1-p)}-p\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-p-1}{k}\frac{\psi(2+k)+\gamma}{(1+k)^2B(1+k,\alpha-k)}}{1-p\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-p-1}{k}\frac{1}{(1+k)^2B(1+k,\alpha-k)}}x^{\alpha-p}$$

19·2·3　$x^{\alpha}\sin x$, $x^{\alpha}\cos x$ の超微分

公式19·2·3

$m=0,1,2,\cdots$ のとき、$p>0$ について次式が成立する。

$$\left(x^m \sin x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \sin\left\{x + \frac{(p-r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1s}$$

$$\left(x^m \cos x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \cos\left\{x + \frac{(p-r)\pi}{2}\right\} \tag{3.1c}$$

導出

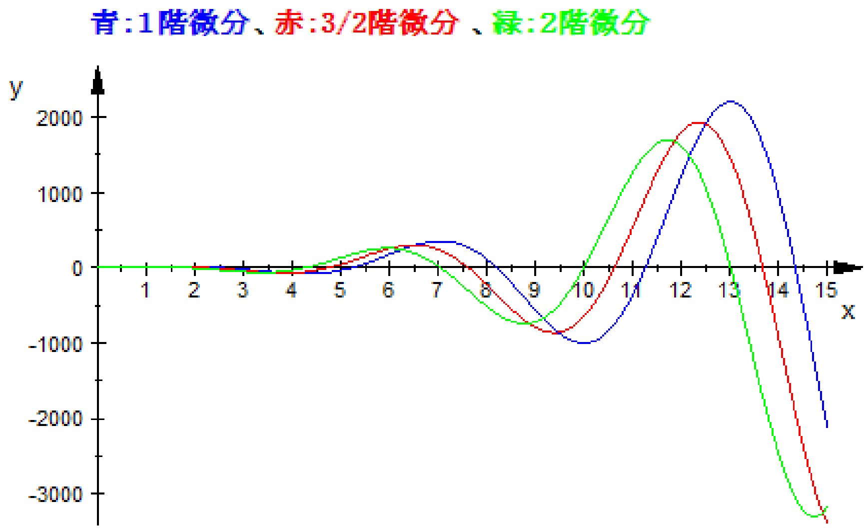
17·3·3 の公式17·3·3 の積分演算子 $<p>$ の符号を反転して微分演算子 (p) に置換する。

例　$x^3\sin x$ の $3/2$ 階微分

$m=3$, $p=3/2$ とし、これらを上式の (3.1s) に代入すれば

$$\left(x^3 \sin x\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \sum_{r=0}^{3} \binom{3/2}{r} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-r)} x^{3-r} \sin\left\{x + \frac{(3/2-r)\pi}{2}\right\}$$

この超微分は一般的には Riemann-Liouville differintegral で検証することはできない。
そこで1階微分、2階微分と共に図示すると次のようになる。



公式19·2·3'（傍系超微分）

$\alpha \neq -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha - p \neq -1,-2,-3,\cdots$ なる α , p について次式が成立する。

$$\left(x^{\alpha} \sin x\right)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)} x^{\alpha-p+r} \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right) + R_m^p \tag{3.2s}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+k} \binom{-p-1}{k} \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)} x^{\alpha+m+k} \sin\left\{x + \frac{(m+k)\pi}{2}\right\} \right\}^{(p)}$$

$$\left(x^{\alpha} \cos x\right)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)} x^{\alpha-p+r} \cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right) + R_m^p \tag{3.2c}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+k} \binom{-p-1}{k} \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)} x^{\alpha+m+k} \cos\left\{ x + \frac{(m+k)\pi}{2} \right\} \right\}^{(p)}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_m^p = 0$$

導出

17・3・3 の公式17・3・3'(傍系超積分)の積分演算子 $\langle p \rangle$ の符号を反転して微分演算子 (p) に置換する。

例　$x^{3/2}sinx$ の傍系 **1/2** 階微分

$\alpha=3/2$, $p=1/2$ を (3.2s) に代入すれば

$$\left(x^{\frac{3}{2}} sin\,x \right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{1/2}{r} \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2-r)} x^{1-r} sin\left(x + \frac{r\pi}{2} \right) + R_m^{\frac{1}{2}}$$

左辺の Riemann-Liouville differintegral の積分下限は $x=0$ である。

右辺を $m=15$ まで計算すれば、任意の1点 $x=5$ における超微係数は次のとおり。

```
a = 3 / 2;  p = 1 / 2;  m = 15;

fl[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_0^x (x - t)^(1-p-1) ∂_t (t^(3/2) Sin[t]) dt

fr[x_] := Sum_{r=0}^{m-1} Binomial[p, r] Gamma[1 + a]/Gamma[1 + a - p + r] x^(a-p+r) Sin[x + r π/2]

N[fl[5]]        N[fr[5]]
-6.80724        -6.80724
```

19・2・4　$x^\alpha sinhx$, $x^\alpha coshx$ の超微分

公式19・2・4

$m=0,1,2,\cdots$ のとき、$p>0$ について次式が成立する。

$$\left(x^m sinh\,x \right)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \frac{e^x - (-1)^{-p+r} e^{-x}}{2} \tag{4.1s}$$

$$\left(x^m cosh\,x \right)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \frac{e^x + (-1)^{-p+r} e^{-x}}{2} \tag{4.1c}$$

例　x^3coshx の **0.999** 階微分

$m=3$, $p=0.999$ を (4.1c) に代入すれば

$$\left(x^3 cosh\,x \right)^{\{0.999\}} = \sum_{r=0}^{3} \binom{0.999}{r} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-r)} x^{3-r} \frac{e^x + (-1)^{-0.999+r} e^{-x}}{2}$$

となる。この超微分は一般的には Riemann-Liouville differintegral で検証することはできない。そこで 0.999 階微分と1階微分の任意の1点 $x=2$ 上の超微係数を求めると次のようになる。前者は複素数になるが、当然その実数部は1階微係数に極めて近いものとなっている。

The 0.999th order derivative

```
m = 3;  p = 0.999;
```

$$\texttt{fp[x\_] :=} \sum_{r=0}^{m} \texttt{Binomial[p, r]} \frac{\texttt{Gamma[1 + m]}}{\texttt{Gamma[1 + m - r]}} x^{m-r} \frac{e^{x} + (-1)^{-p+r} e^{-x}}{2}$$

The 1st order derivative

$$\texttt{f1[x\_] =} \partial_x \left(x^3 \texttt{Cosh[x]}\right);$$

The 0.999th order derivative

```
N[fp[2]]
74.0981 + 0.000849271 i
```

The 1st order derivative

```
N[f1[2]]
74.1612
```

公式19･2･4’(傍系超微分)

$\alpha \neq -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha - p \neq -1,-2,-3,\cdots$ なる α , p について次式が成立する。

$$\left(x^{\alpha}\sinh x\right)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)} x^{\alpha-p+r} \frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} + R_m^p \tag{4.2s}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+k} \binom{-p-1}{k} \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)} x^{\alpha+m+k} \frac{e^{x}-(-1)^{-m-k}e^{-x}}{2} \right\}^{(p)}$$

$$\left(x^{\alpha}\cosh x\right)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)} x^{\alpha-p+r} \frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} + R_m^p \tag{4.2c}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+k} \binom{-p-1}{k} \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)} x^{\alpha+m+k} \frac{e^{x}+(-1)^{-m-k}e^{-x}}{2} \right\}^{(p)}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_m^n = 0$$

例 $\sqrt[3]{x}\,\sinh x$ の傍系 **3/2** 階微分

$\alpha=1/3$, $p=3/2$ を (4.2s) に代入すれば

$$\left(\sqrt[3]{x}\,\sinh x\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{3/2}{r} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(-1/6+r)} x^{-\frac{1}{6}+r} \frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} + R_m^{3/2}$$

左辺の Riemann-Liouville differintegral の積分下限は $x=0$ である。

右辺を $m=50$ まで計算すれば、任意の1点 $x=17$ における超微係数は次のとおり。

```
a = 1 / 3;  p = 3 / 2;  m = 50;
```

$$\texttt{f1[x\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[2 - p]}} \int_0^x (x-t)^{2-p-1}\, \partial_t \left(\partial_t \left(\sqrt[3]{t}\ \texttt{Sinh[t]}\right)\right) dt$$

$$\texttt{fr[x\_] :=} \sum_{r=0}^{m-1} \texttt{Binomial[p, r]} \frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a - p + r]}} x^{a-p+r} \frac{e^{x} - (-1)^{-r} e^{-x}}{2}$$

```
N[f1[17], 8]
3.1958852 × 10^7
```

```
N[fr[17], 8]
3.1958852 × 10^7
```

19·3 $\log x\ f(x)$ の超微分

19·3·1 $(\log x)^2$ の超微分

公式19·3·1

$$\left(\log^2 x\right)^{(p)} = \frac{x^{-p}\log x\,\{\log x - \psi(1-p) - \gamma\}}{\Gamma(1-p)}$$

$$- x^{-p}\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\binom{p}{r}\frac{\{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma\}\Gamma(r)}{\Gamma(1-p+r)} + R_m^p \tag{1.1}$$

$$R_m^p = \frac{x^{-p}}{B(-p,m)\,\Gamma(1-p)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(m+k)^2}\binom{-p-1}{k}\{\log x - \psi(1-p) - \psi(1+m+k) - 2\gamma\} \tag{1.1r}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_m^p = 0$$

導出

17·4·1 の公式17·4·1の積分演算子 $<p>$ の符号を反転して微分演算子 (p) に置換する。

例 $(\log x)^2$ の 1/2 階微分

m=4000 として任意の1点 x=2.7 における両辺の値を計算すると次のとおり。収束が遅いのでここまで計算しても両辺は小数点以下3桁までしか一致していない。

```
p = 1 / 2;  h = 10^-6;  m = 4000;
```

Riemann-Liouville Differintegrl

$$f[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]}\int_0^x (x-t)^{1-p-1}\,\text{Log}[t]^2\,dt \qquad \text{Rld} = \frac{f[2.7+h]-f[2.7]}{h};$$

Series

$$\text{Sr}[x\_] := \frac{x^{-p}\,\text{Log}[x]\,(\text{Log}[x]-\text{PolyGamma}[1-p]-\text{EulerGamma})}{\text{Gamma}[1-p]} -$$

$$x^{-p}\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\,\text{Binomial}[p, r]\,\frac{(\text{Log}[x]-\text{PolyGamma}[1-p+r]-\text{EulerGamma})\,\text{Gamma}[r]}{\text{Gamma}[1-p+r]}$$

```
N[Rld]          N[Sr[2.7]]
0.814566        0.814946
```

19·4 $e^x f(x)$ の超微分

19·4·1 $e^x x^\alpha$ の超微分

公式19·4·1

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{(p)} = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r} + R_m^p \tag{1.1}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+k} \binom{-p-1}{k} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)} \left(e^x x^{\alpha-m-k}\right)^{(p)} \tag{1.1r}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left(e^x x^m\right)^{(p)} = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \tag{1.1'}$$

導出

定理19·1·1において $f(x)=e^x$, $g(x)=x^\alpha$ とすれば、

$$\left(x^\alpha\right)^{(r)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r} \qquad (\alpha \ne -1,-2,-3,\cdots)$$

であるからこれらを代入して (1.1), (1.1r) を得る。なお、(1.1) は漸近展開である。

$\alpha=m-1 \quad m=1,2,3,\cdots$ のときは $\Gamma(1+\alpha-m-k) = \pm\infty \quad k=0,1,2,3,\cdots$

であるから、剰余項は消滅して(1.1)は次のようになる。

$$\left(e^x x^{m-1}\right)^{(p)} = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+m-1)}{\Gamma(1+m-1-r)} x^{m-1-r}$$

そこで、$m-1$ を m に置き換えて(1.1')を得る。

例1 $e^x x^{3/4}$ の $1/2$ 階微分

$\alpha=3/4$, $p=1/2$ を (1.1) に代入すれば次のようになる。

$$\left(e^x x^{3/4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{1/2}{r} \frac{\Gamma(1+3/4)}{\Gamma(1+3/4-r)} x^{\frac{3}{4}-r} + R_m^{1/2}$$

左辺は Riemann-Liouville differintegral の積分と微分の順序を入れ替えた式により計算する。$m=10$ として任意の1点 $x=-10$ における超微係数を求めると次のようになる。

```
a = 3 / 4; p = 1 / 2; m = 10;
fl[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_{-∞}^{x} (x - t)^(1-p-1) ∂_t (t^a e^t) dt
fr[x_] := e^x Σ_{r=0}^{m-1} Binomial[p, r] Gamma[1 + a]/Gamma[1 + a - r] x^(a-r)
N[fl[-10]]                                  N[fr[-10]]
-0.000173796 + 0.000173796 i                -0.000173796 + 0.000173796 i
```

例1’ $e^x x^7$ の **5/2** 階微分

$m=7$, $p=5/2$ を(1.1’)に代入すれば

$$\left(e^x x^7\right)^{\left(\frac{5}{2}\right)} = e^x \sum_{r=0}^{7} \binom{5/2}{r} \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(8-r)} x^{7-r}$$

両辺の任意の1点 $x=0.5$ における超微係数を求めると次のようになる。

```
m = 7; p = 5 / 2;
fl[x_] := 1/Gamma[3 - p] ∫_{-∞}^{x} (x - t)^(3-p-1) ∂t (∂t (∂t (t^m e^t))) dt
fr[x_] := e^x Σ_{r=0}^{m} Binomial[p, r] Gamma[1 + m]/Gamma[1 + m - r] x^(m-r)

N[fl[0.5]]                                N[fr[0.5]]
16.6933  - 4.89299 × 10^-16 i             16.6933
```

公式19･4･1”(傍系超微分)

$\alpha \neq -1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha - p \neq -1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\left(e^x x^{\alpha}\right)^{(p)} = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{p}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)} x^{\alpha-p+r} + R_m^p \tag{1.1″}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+k} \binom{-p-1}{k} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)} \left(e^x x^{\alpha+m+k}\right)^{(p)}$$

$$\lim_{m \to \infty} R_m^p = 0$$

例1” $e^x x^{3/4}$ の傍系 **1/2** 階微分

$\alpha=3/4$, $p=1/2$ を (1.1″) に代入すれば

$$\left(e^x x^{3/4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = e^x \sum_{r=0}^{m-1} \binom{1/2}{r} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+r)} x^{\frac{3}{4}+r} + R_m^{1/2}$$

例1と同じ点 $x=-10$ における両辺の超微係数を求めると次のようになる。両辺は一致しているが、例1(直系1/2階微分)の値とはかなり異なっている。

```
a = 3 / 4; p = 1 / 2; m = 30;
fl[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_0^x (x - t)^(1-p-1) ∂t (t^a e^t) dt
fr[x_] := e^x Σ_{r=0}^{m-1} Binomial[p, r] Gamma[1 + a]/Gamma[1 + a - p + r] x^(a-p+r)

N[fl[-10]]                                N[fr[-10]]
-0.00839073  - 0.00839073 i               -0.00839073  - 0.00839073 i
```

19･4･2 $e^x \log x$ の超微分

$e^x \log x$ に定理19･1･1 を適用して得られる級数は全て漸近展開となり、ほとんど役に立たない

19·4·3 $e^x \sin x,\ e^x \cos x$ の超微分

公式19·4·3

$$\left(e^x \sin x\right)^{(p)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^x \sin\left(x+\frac{p\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\left(e^x \cos x\right)^{(p)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^x \cos\left(x+\frac{p\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

導出

18·4·3 の公式18·4·3の微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

例　$e^x \sin x$ の1/3階微分

任意の1点 $x=1.2$ における (3.0s) の両辺の超微係数は次のとおり。

```
p = 1 / 3;
fl[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_{-∞}^{x} (x - t)^{1-p-1} ∂_t (e^t Sin[t]) dt
fr[x_] := (Sin[π/4])^{-p} e^x Sin[x + pπ/4]
N[fl[1.2]]          N[fr[1.2]]
3.70458  + 0. i     3.70459
```

三角級数

18·4·3 の公式18·4·3'を 実数化すると次の三角級数が得られる。

公式19·4·3'

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p}\sin\left(x+\frac{p\pi}{4}\right) \tag{3.1s}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p}\cos\left(x+\frac{p\pi}{4}\right) \tag{3.1c}$$

特に $x=0$ のとき

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\sin\frac{r\pi}{2} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p}\sin\frac{p\pi}{4} \tag{3.1's}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{p}{r}\cos\frac{r\pi}{2} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p}\cos\frac{p\pi}{4} \tag{3.1'c}$$

交代二項級数

(3.1's), (3.1'c) から冗長な $\sin\frac{r\pi}{2},\ \cos\frac{r\pi}{2}$ を除くと次の交代二項級数が得られる。

公式19･4･3”

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k+1} = 2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{p\pi}{4} \tag{3.2s}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k} = 2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4} \tag{3.2c}$$

導出

(3.1’s) の左辺の奇数項は0であるから

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\sin\frac{r\pi}{2} = \binom{p}{1}-\binom{p}{3}+\binom{p}{5}-\binom{p}{7}+-\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k+1}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k+1} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p}\sin\frac{p\pi}{4} = 2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{p\pi}{4}$$

次に(3.1’c) の左辺の偶数項は0であるから

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{p}{r}\cos\frac{r\pi}{2} = \binom{p}{0}-\binom{p}{2}+\binom{p}{4}-\binom{p}{6}+-\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p}\cos\frac{p\pi}{4} = 2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4}$$

p を横軸に採ってこれらを図示すれば次のとおり。左辺を青、右辺を赤で描いているが、両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

m = 20;

sin x series

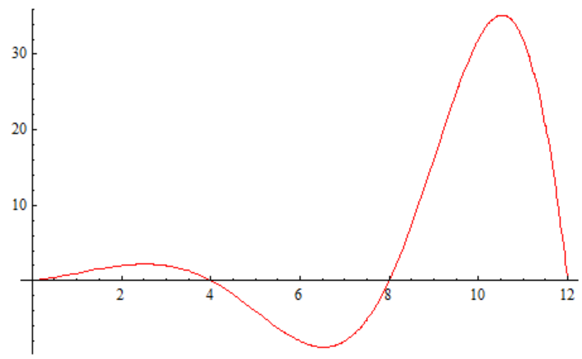
$sl[p\_] := \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \, \mathrm{Binomial}[p, 2k+1]$

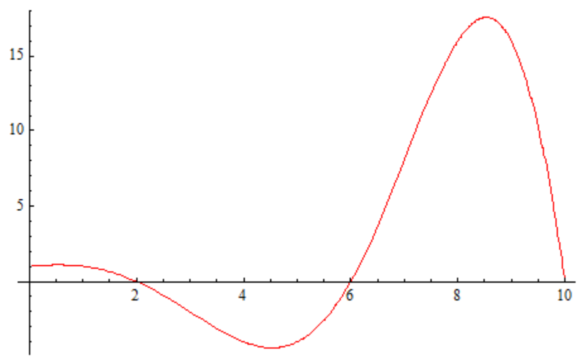
$sr[p\_] := 2^{\frac{p}{2}} \, \mathrm{Sin}\left[\frac{p\pi}{4}\right]$

cos x series

$cl[p\_] := \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \, \mathrm{Binomial}[p, 2k]$

$cr[p\_] := 2^{\frac{p}{2}} \, \mathrm{Cos}\left[\frac{p\pi}{4}\right]$





19･4･4 $e^x\sinh x$, $e^x\cosh x$ の超微分

公式19･4･4

$$\left(e^x\sinh x\right)^{(p)} = e^x\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\frac{e^x-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0s}$$

$$\left(e^x \cosh x\right)^{(p)} = e^x \sum_{r=0}^{\infty} \binom{p}{r} \frac{e^x + (-1)^{-r} e^{-x}}{2} \tag{4.0c}$$

例　$\boldsymbol{e^x \cosh x}$ の3/2階微分

任意の1点 x=1.3 における (4.0c) の両辺の超微係数は次のとおり。

```
p = 3 / 2;  m = 200;
```

$$\texttt{fl[x\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[2 - p]}} \int_{-\infty}^{x} (x - t)^{2-p-1}\, \partial_t \left(\partial_t \left(e^t\, \texttt{Cosh[t]}\right)\right) dt$$

$$\texttt{fr[x\_] :=} e^x \sum_{r=0}^{m} \texttt{Binomial[p, r]} \frac{e^x + (-1)^{-r} e^{-x}}{2}$$

```
N[fl[1.3]]      N[fr[1.3]]
19.0406         19.0406
```

19·5 $e^{-x}f(x)$ の超微分

19·5·1 $e^{-x}x^{\alpha}$ の超微分

公式19·5·1

$$\left(e^{-x}x^{\alpha}\right)^{(p)}=\frac{(-1)^{-p}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}+R_{m}^{p} \tag{1.1}$$

$$R_{m}^{p}=\frac{1}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{m+k}\binom{-p-1}{k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}\left(\frac{x^{\alpha-m-k}}{e^{x}}\right)^{(p)} \tag{1.1r}$$

特に $m=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\left(e^{-x}x^{m}\right)^{(p)}=\frac{(-1)^{-p}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{r}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r} \tag{1.1'}$$

例1 $e^{-x}\sqrt{x}$ の **1/2** 階微分

(1.1) において $a=1/2,\ p=1/2,\ m=10$ とし、任意の1点 $x=10$ における超微係数を計算すれば次のとおり。なお、これは漸近展開である。

```
a = 1 / 2; p = 1 / 2; m = 10;
```

$$\mathtt{fl[x\_]} := \frac{1}{\mathtt{Gamma[1-p]}}\int_{\infty}^{x}(x-t)^{1-p-1}\,\partial_t\left(e^{-t}t^{a}\right)dt$$

$$\mathtt{fr[x\_]} := \frac{(-1)^{-p}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r}\,\mathtt{Binomial[p,r]}\,\frac{\mathtt{Gamma[1+a]}}{\mathtt{Gamma[1+a-r]}}\,x^{a-r}$$

```
N[fl[10]]                    N[fr[10]]
0. - 0.00014002 i            0. - 0.00014002 i
```

例1' $e^{-x}x^{7}$ の **5/2** 階微分

(1.1') において $m=7$, $p=5/2$ とし、両辺の任意の1点 $x=6$ における値を計算すれば次のようになる。

```
m = 7; p = 5 / 2;
```

$$\mathtt{fl[x\_]} := \frac{1}{\mathtt{Gamma[3-p]}}\int_{\infty}^{x}(x-t)^{3-p-1}\,\partial_t\left(\partial_t\left(\partial_t\left(e^{-t}t^{m}\right)\right)\right)dt$$

$$\mathtt{fr[x\_]} := \frac{(-1)^{-p}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{r}\,\mathtt{Binomial[p,r]}\,\frac{\mathtt{Gamma[1+m]}}{\mathtt{Gamma[1+m-r]}}\,x^{m-r}$$

```
N[fl[6]]                N[fr[6]]
0. + 43.4887 i          0. + 43.4887 i
```

公式19·5·1"(傍系超微分)

$\alpha\neq-1,-2,-3,\cdots$ & $\alpha-p\neq-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\left(e^{-x}x^{\alpha}\right)^{(p)}=\frac{1}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r}+R_{m}^{p} \tag{1.1''}$$

$$R_m^p = \frac{1}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-k}}{m+k}\binom{-p-1}{k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+k)}\left(\frac{x^{\alpha-m-k}}{e^x}\right)^{(p)}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_m^p = 0$$

例1” $e^{-x}\sqrt{x}$ の傍系1/2階微分

(1.1″)において $\alpha=1/2,\ p=1/2,\ m=30$ とし、任意の1点 $x=10$ における超微係数を計算すれば次のようになる。両辺は一致しているが、例1(直系1/2階微分)の値とは全く異なっている。

```
a = 1 / 2;  p = 1 / 2;  m = 30;
```

$$\text{fl}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[1-p]}\int_0^x (x-t)^{1-p-1}\,\partial_t\left(e^{-t}\,t^a\right)dt$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{1}{e^x}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\,\text{Binomial}[p,r]\,\frac{\text{Gamma}[1+a]}{\text{Gamma}[1+a-p+r]}\,x^{a-p+r}$$

```
N[fl[10]]        N[fr[10]]
-0.0107629       -0.0107629
```

19・5・2 $e^{-x}\log x$ の超微分

$e^{-x}\log x$ に定理19・1・1 を適用して得られる級数は全て漸近展開となり、ほとんど役に立たない。

19・5・3 $e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x$ の超微分

公式19・5・3

$$\left(e^{-x}\sin x\right)^{(p)} = (-1)^{-p}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^{-x}\sin\left(x-\frac{p\pi}{4}\right) \tag{3.0s}$$

$$\left(e^{-x}\cos x\right)^{(p)} = (-1)^{-p}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^{-x}\cos\left(x-\frac{p\pi}{4}\right) \tag{3.0c}$$

例 $e^{-x}\sin x$ の3/2階微分

任意の1点 $x=1.7$ における(3.0s)の両辺の超微係数は次のとおり。

```
p = 3 / 2;
```

$$\text{fl}[x\_] := \frac{1}{\text{Gamma}[2-p]}\int_\infty^x (x-t)^{2-p-1}\,\partial_t\left(\partial_t\left(e^{-t}\,\text{Sin}[t]\right)\right)dt$$

$$\text{fr}[x\_] := (-1)^{-p}\left(\text{Sin}\left[\frac{\pi}{4}\right]\right)^{-p} e^{-x}\,\text{Sin}\left[x-\frac{p\,\pi}{4}\right]$$

```
N[fl[1.7]]            N[fr[1.7]]
0. + 0.153166 i       0. + 0.153166 i
```

19・5・4 $e^{-x}\sinh x,\ e^{-x}\cosh x$ の超微分

公式19･5･4

$$\left(e^{-x}\sinh x\right)^{(p)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{-p+r}\binom{p}{r}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0s}$$

$$\left(e^{-x}\cosh x\right)^{(p)}=e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{-p+r}\binom{p}{r}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{4.0c}$$

例　$e^{-x}\cosh x$ の3/2階微分

任意の1点 $x=1.3$ における (4.0c) の両辺の超微係数は次のとおり。

$$p = 3/2;\ m = 2500;$$

$$fl[x\_] := \frac{1}{Gamma[2-p]}\int_{\infty}^{x}(x-t)^{2-p-1}\,\partial_t\left(\partial_t\left(e^{-t}\,Cosh[t]\right)\right)dt$$

$$fr[x\_] := e^{-x}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{-p+r}\,Binomial[p,r]\,\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

```
N[fl[1.3]]              N[fr[1.3]]
0. + 0.105039 i         0. + 0.105038 i
```

19･6　$\sin x\, f(x)$, $\cos x\, f(x)$の超微分

19･6･1　$\sin^2 x$, $\cos^2 x$ の超微分

公式19･6･1

$$\left(\sin^2 x\right)^{(p)} = -2^{p-1}\cos\left(2x+\frac{p\pi}{2}\right) \tag{1.0s}$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(p)} = 2^{p-1}\cos\left(2x+\frac{p\pi}{2}\right) \tag{1.0c}$$

導出

18･6･1の公式18･6･1の微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

例

$$\left(\sin^2 x\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = -2^{\frac{1}{2}-1}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = 2^{\frac{3}{2}-1}\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right) = -(\sin 2x+\cos 2x)$$

18･6 の公式18･6･1’と公式18･6･1”の微分演算子のインデックスをそれぞれ $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続して次の2つの公式を得る。

公式19･6･1’

$$\left(\sin^2 x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\sin\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) \tag{1.1s}$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\cos\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{r\pi}{2}\right) \tag{1.1c}$$

公式19･6･1”

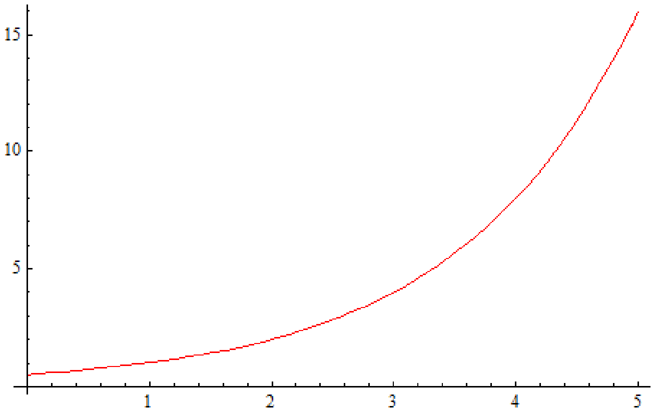
$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{2r} = 2^{p-1} \qquad p>0 \tag{1.2e}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{2r+1} = 2^{p-1} \qquad p>0 \tag{1.2o}$$

p を横軸に採ってこれらを図示すれば次のとおり。偶数級数、奇数級数、2^{p-1} をそれぞれ青、緑、赤で描いているが、3本の曲線はぴったり重なっていて赤（2^{p-1}）のみ見えている。

```
fe[p_] := Sum[Binomial[p, 2 r], {r, 0, ∞}]    fo[p_] := Sum[Binomial[p, 2 r], {r, 0, ∞}]    f2[p_] := 2^(p-1)
```

```
Plot[{fe[p], fo[p], f2[p]}, {p, 0, 5}, PlotStyle → {Blue, Green, Red}]
```



一般二項係数の無限和

公式19･6･1” より直ちに次の公式が従う。

公式19･6･1'''

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r} = 2^p \qquad p>0 \tag{1.3}$$

Note

実は、公式19･6･1” も 公式19･6･1”' も $p>-1$ について成立する。

19･6･2 $\sin^3 x, \cos^3 x$ の超微分

公式19･6･2

$$\left(\sin^3 x\right)^{(p)} = \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) - \frac{3^p}{4}\sin\left(3x+\frac{p\pi}{2}\right) \tag{2.0s}$$

$$\left(\cos^3 x\right)^{(p)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) + \frac{3^p}{4}\cos\left(3x+\frac{p\pi}{2}\right) \tag{2.0c}$$

例

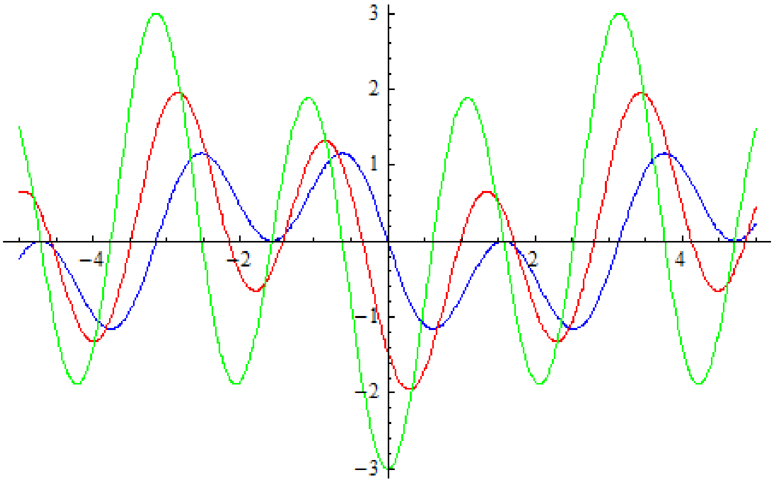
$$\left(\sin^3 x\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\cos^3 x\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

後者を1階微分、2階微分と共に図示すると次のとおり。

```
f1[x_] = ∂x Cos[x]^3;
fp[p_, x_] := 3/4 Cos[x + p π/2] + 3^p/4 Cos[3 x + p π/2]
f2[x_] = ∂x f1[x];
```

```
Plot[{f1[x], fp[3 / 2, x], f2[x]}, {x, -5, 5}, PlotStyle → {Blue, Red, Green}]
```



19･6･3　三角関数と双曲線関数の積の超微分

公式19･6･3

$$\left(\sin x\cdot\sinh x\right)^{(p)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\sin\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.1}$$

$$\left(\sin x\cdot\cosh x\right)^{(p)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\sin\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.2}$$

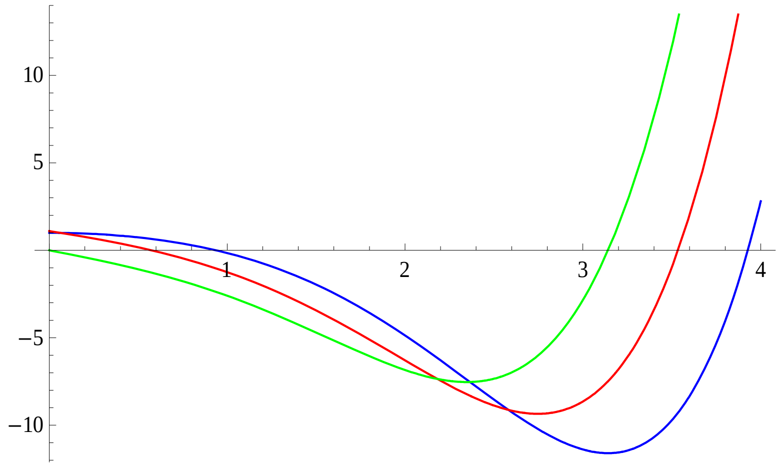
$$\left(\cos x\cdot\sinh x\right)^{(p)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\cos\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.3}$$

$$\left(\cos x\cdot\cosh x\right)^{(p)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\cos\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}+(-1)^{-r}e^{-x}}{2} \tag{3.4}$$

例　$\boldsymbol{\cos x\cdot\sinh x}$ の **3/2** 階微分

$$\left(\cos x\cdot\sinh x\right)^{(3/2)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3/2}{r}\cos\left\{x+\frac{(3/2-r)\pi}{2}\right\}\frac{e^{x}-(-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

これを1階微分、2階微分と共に図示すると次のとおり。



19·7 $\sinh x\, f(x)$, $\cosh x\, f(x)$ の超微分

19·7·1 $\sinh^2 x$, $\cosh^2 x$ の超微分

公式19·7·1

$$\left(\sinh^2 x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{p}{r} \frac{e^x - (-1)^{-p+r} e^{-x}}{2} \frac{e^x - (-1)^{-r} e^{-x}}{2} \tag{1.1s}$$

$$\left(\cosh^2 x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{p}{r} \frac{e^x + (-1)^{-p+r} e^{-x}}{2} \frac{e^x + (-1)^{-r} e^{-x}}{2} \tag{1.1c}$$

導出

18·7·1の公式18·7·1の微分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

例 $\sinh^2 x$ の 0.01 階微分と 0.99 階微分

(1.1s)により、被微分関数、0.01 階微分、0.99 階微分、1階微分の任意の1点 $x=2$ における各微係数を計算すると次のようになる。当然ながら超微係数は複素数となる。

```
f0[x_] = Sinh[x]^2;          f1[x_] = ∂x f0[x];

fp[p_, x_] := Sum[Binomial[p, r] (e^x - (-1)^(-p+r) e^(-x))/2 (e^x - (-1)^(-r) e^(-x))/2, {r, 0, 100}]

N[f0[2]]          N[fp[0.01, 2]]
13.1541           13.2739 + 0.00731029 i

N[f1[2]]          N[fp[0.99, 2]]
27.2899           27.1014 - 0.00028484 i
```

2010.11.11

K. Kono

宇宙人の数学