20　多関数の積の高階微積分

20･1　多関数の積の高階微分

(1) 二項定理とライプニッツ則

3･1 の二項定理によれば、実数 x_1, x_2 と自然数 n について

$$\left(x_1+x_2\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x_1^{n-r}x_2^{r}$$

一方、ライプニッツ則は、x の関数 f_1, f_2 と自然数 n について

$$\left(f_1 f_2\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f_1^{(n-r)}f_2^{(r)}$$

であった。

(2) 多項定理と多関数の積の高階微分

3･3 の多項定理によれば、実数 $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$ と自然数 n について

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_\lambda\right)^n = \sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}x_1^{n-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_\lambda^{r_{\lambda-1}}$$

であったから、

多関数の積の高階微分は、x の関数 $f_1, f_2, \cdots, f_\lambda$ と自然数 n について

$$\left(f_1 f_2\cdots f_\lambda\right)^{(n)} = \sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{(n-r_1)}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}$$

となるに相違ない。

20･1･1　多関数の積の高階微分

定理20･1･1

関数 $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$ とするとき、次式が成立する。

$$\left(f_1 f_2\cdots f_\lambda\right)^{(n)} = \sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{(n-r_1)}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}$$

証明

18･1 の定理18･1･1(ライプニッツ則)より次式が成立する。

$$\left(f_1 f_2 f_3 f_4\cdots f_\lambda\right)^{(n)} = \sum_{r_1=0}^{n}\binom{n}{r_1}f_1^{(n-r_1)}\left(f_2 f_3 f_4\cdots f_\lambda\right)^{(r_1)} \tag{1}$$

$$\left(f_2 f_3 f_4\cdots f_\lambda\right)^{(r_1)} = \sum_{r_2=0}^{r_1}\binom{r_1}{r_2}f_2^{(r_1-r_2)}\left(f_3 f_4\cdots f_\lambda\right)^{(r_2)} \tag{2}$$

$$\left(f_3 f_4\cdots f_\lambda\right)^{(r_2)} = \sum_{r_3=0}^{r2}\binom{r_2}{r_3}f_3^{(r_2-r_3)}\left(f_4\cdots f_\lambda\right)^{(r_3)} \tag{3}$$

$\vdots$

$$\left(f_{\lambda-2}f_{\lambda-1}f_\lambda\right)^{(r_{\lambda-3})} = \sum_{r_{\lambda-2}=0}^{r_{\lambda-3}} \binom{r_{\lambda-3}}{r_{\lambda-2}} f_{\lambda-2}^{(r_{\lambda-3}-r_{\lambda-1})} \left(f_{\lambda-1}f_\lambda\right)^{(r_{\lambda-2})} \qquad (\lambda-2)$$

$$\left(f_{\lambda-1}f_\lambda\right)^{(r_{\lambda-2})} = \sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}} \binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_{\lambda-1}^{(r_{\lambda-2}-r_{\lambda-1})} f_\lambda^{(r_{\lambda-1})} \qquad (\lambda-1)$$

(2), (3), … , ($\lambda-2$), ($\lambda-1$) を順次 (1) へ代入して行けば与式を得る。

例

$$\left(f_1 f_2 f_3\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r} \binom{n}{r}\binom{r}{s} f_1^{(n-r)} f_2^{(r-s)} f_3^{(s)}$$

$$\left(f_1 f_2 f_3 f_4\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \binom{n}{r}\binom{r}{s}\binom{s}{t} f_1^{(n-r)} f_2^{(r-s)} f_3^{(s-t)} f_4^{(t)}$$

3関数の積の計算例

多関数の積の組合せは莫大あり、これらを逐一計算する訳にはいかない。そこでここではこれらのいくつかをピックアップして計算例示する。

例1 $x^\alpha e^x \sin x$ の高階微分

定理20･1･1 において $f_1 = x^\alpha$, $f_2 = e^x$, $f_3 = \sin x$ と置けば

$$\left(x^\alpha\right)^{(n-r)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)} x^{\alpha-n+r}$$

$$\left(e^x\right)^{(r-s)} = e^x$$

$$\left(\sin x\right)^{(s)} = \sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\left(x^\alpha e^x \sin x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r} \binom{n}{r}\binom{r}{s} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)} x^{\alpha-n+r} e^x \sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right) \qquad (1.1)$$

この式は手計算すると大変であるがプログラムで計算すると簡単である。
$x^\alpha e^x \sin x$ の4階微分を数式ソフトMuPADにより計算すると次のようになる。

直接計算よる微分

```
• fl := diff(x^a*E^x*sin(x) ,x,x,x,x):
• simplify(fl)
```

$$x^{a-4} \cdot e^x \cdot (11 \cdot a^2 \cdot \sin(x) - 6 \cdot a^3 \cdot \sin(x) + a^4 \cdot \sin(x) - 4 \cdot x^4 \cdot \sin(x) - 6 \cdot a \cdot \sin(x) - 12 \cdot a \cdot x^2 \cdot \cos(x) - 12 \cdot a^2 \cdot x \cdot \cos(x) + 8 \cdot a \cdot x^3 \cdot \cos(x) + 4 \cdot a^3 \cdot x \cdot \cos(x) - 12 \cdot a^2 \cdot x \cdot \sin(x) - 8 \cdot a \cdot x^3 \cdot \sin(x) + 4 \cdot a^3 \cdot x \cdot \sin(x) + 12 \cdot a^2 \cdot x^2 \cdot \cos(x) + 8 \cdot a \cdot x \cdot \cos(x) + 8 \cdot a \cdot x \cdot \sin(x))$$

多項係数による微分

```
• n:=4:
• delete r: fr:=0:
• for r from 0 to n do
    fs:=0:
    for s from 0 to r do
      fs := fs + binomial(n,r)*binomial(r,s)
                        *gamma(1+a)/gamma(1+a-n+r)*x^(a-n+r)
                        *E^x*sin(x+s*PI/2)
    end_for:
    fr:=fr+fs
  end_for:
• fr := expand(fr):
• simplify(fr)
```

$$x^{a-4}\cdot e^x\cdot(11\cdot a^2\cdot\sin(x)-6\cdot a^3\cdot\sin(x)+a^4\cdot\sin(x)-4\cdot x^4\cdot\sin(x)-6\cdot a\cdot\sin(x)-12\cdot a\cdot x^2\cdot\cos(x)$$
$$-12\cdot a^2\cdot x\cdot\cos(x)+8\cdot a\cdot x^3\cdot\cos(x)+4\cdot a^3\cdot x\cdot\cos(x)-12\cdot a^2\cdot x\cdot\sin(x)-8\cdot a\cdot x^3\cdot\sin(x)$$
$$+4\cdot a^3\cdot x\cdot\sin(x)+12\cdot a^2\cdot x^2\cdot\cos(x)+8\cdot a\cdot x\cdot\cos(x)+8\cdot a\cdot x\cdot\sin(x))$$

等価の検証

```
• testeq(fl,fr)
```

TRUE

例2 $\boldsymbol{x^\alpha e^x \log x}$ の高階微分

定理20・1・1 において$f_1=x^\alpha$ ， $f_2=e^x$, $f_3=\log x$ と置けば

$$(x^\alpha)^{(n-r)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)}x^{\alpha-n+r}\,,\qquad (e^x)^{(r-s)}=e^x$$

$$(\log x)^{(0)}=\log x\quad,\qquad (\log x)^{(s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,x^{-s}\ (s=1,2,3,\cdots)$$

であるから、先ず定理の式から$f_3^{(0)}$の項を分離する必要がある。すると

$$(f_1f_2f_3)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f_1^{(n-r)}f_2^{(r-s)}f_3^{(0)}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f_1^{(n-r)}f_2^{(r-s)}f_3^{(s)}$$

これに上の各式を代入すれば

$$\begin{aligned}(x^\alpha e^x\log x)^{(n)}=&\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)}x^{\alpha-n+r}e^x\log x\\&+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{s}(-1)^{s-1}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)}x^{\alpha-n+r-s}e^x\end{aligned}\qquad(1.2)$$

$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(x^\alpha e^x\log x)^{(1)}=&\sum_{r=0}^{1}\binom{1}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-1+r)}x^{\alpha-1+r}e^x\log x\\&+\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{r}\binom{1}{r}\binom{r}{s}(-1)^{s-1}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha-1+r)}x^{\alpha-1+r-s}e^x\\=&\left\{\binom{1}{0}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-1)}x^{\alpha-1}+\binom{1}{1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}x^\alpha\right\}e^x\log x\end{aligned}$$

$$+\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}(-1)^{1-1}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)}x^{\alpha-1}e^{x}$$

$$=\left(\alpha x^{\alpha-1}+x^{\alpha}\right)e^{x}\log x+x^{\alpha-1}e^{x}$$

$n=2$ のとき

$$\left(x^{\alpha}e^{x}\log x\right)^{(2)}=\sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-2+r)}x^{\alpha-2+r}e^{x}\log x$$

$$+\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{r}\binom{2}{r}\binom{r}{s}(-1)^{s-1}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha-2+r)}x^{\alpha-2+r-s}e^{x}$$

$$=\left\{\binom{2}{0}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-2)}x^{\alpha-2}+\binom{2}{1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-1)}x^{\alpha-1}+\binom{2}{2}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}x^{\alpha}\right\}e^{x}\log x$$

$$+\binom{2}{1}\binom{1}{1}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha-1)}x^{\alpha-2}e^{x}$$

$$+\binom{2}{2}\left\{\binom{2}{1}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)}x^{\alpha-1}e^{x}-\binom{2}{2}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(1+\alpha)}x^{\alpha-2}e^{x}\right\}$$

$$=\left\{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+2\alpha x^{\alpha-1}+x^{\alpha}\right\}e^{x}\log x$$

$$+\left(2\alpha x^{\alpha-2}+2x^{\alpha-1}-x^{\alpha-2}\right)e^{x}$$

20・1・2　関数の累乗の高階微分

定理20・1・1において特に$f_1=f_2=\cdots=f_\lambda$とすれば、直ちに次の定理が従う。

定理20・1・2

$f^{(r)}$ を関数 $f(x)$ の r 階導関数とし λ を自然数とするとき、次式が成立する。

$$\left\{f^{\lambda}(x)\right\}^{(n)}=\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f^{(n-r_1)}f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})}$$

例1 $(e^{x})^{\lambda}$の高階微分

$(e^{x})^{(r)}=e^{x}$ であるから、定理より直ちに

$$\left\{(e^{x})^{\lambda}\right\}^{(n)}=(e^{x})^{\lambda}\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}$$

ここで 3・3　の (1.1″) によれば

$$\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_3}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}{}_{n}C_{r_1}\,{}_{r_1}C_{r_2}\cdots{}_{r_{\lambda-2}}C_{r_{\lambda-1}}=\lambda^{n}$$

であったから、これを上式に代入すれば

$$\left\{(e^{x})^{\lambda}\right\}^{(n)}=\lambda^{n}e^{\lambda x} \tag{2.1}$$

例2 $\log^{3}x$ の高階微分

定理20・1・2において$f=\log x$と置けば

$$f^{(0)}=\log x\ ,\qquad f^{(r)}=(-1)^{r-1}(r-1)!\,x^{-r}\qquad (r=1,2,3,\cdots)$$

0階と1階以上とで関数型が異なるから、先ず

$$\left(f^{3}\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f^{(n-r)}f^{(r-s)}f^{(s)}$$

から $f^{(0)}$ を含む項を取り出さねばならない。すると

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^{(n-r)}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}f^{(r-s)}f^{(s)}&=\binom{n}{0}f^{(n)}\sum_{s=0}^{0}\binom{0}{s}f^{(0-s)}f^{(s)}\\&\quad+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}f^{(r-s)}f^{(s)}+\binom{n}{n}f^{(n-n)}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}f^{(n-s)}f^{(s)}\\&=f^{(n)}f^{(0)}f^{(0)}+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}f^{(r-s)}f^{(s)}+f^{(0)}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}f^{(n-s)}f^{(s)}\qquad\text{(w)}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}f^{(r-s)}f^{(s)}\\&=\binom{n}{1}f^{(n-1)}\sum_{s=0}^{1}\binom{1}{s}f^{(1-s)}f^{(s)}+\sum_{r=2}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}f^{(r-s)}f^{(s)}\\&=\binom{n}{1}f^{(n-1)}\left\{\binom{1}{0}f^{(1-0)}f^{(0)}+\binom{1}{1}f^{(1-1)}f^{(1)}\right\}\\&\qquad+\sum_{r=2}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}\left\{\binom{r}{0}f^{(r-0)}f^{(0)}+\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}f^{(r-s)}f^{(s)}+\binom{r}{r}f^{(r-r)}f^{(r)}\right\}\\&=2f^{(0)}\binom{n}{1}f^{(n-1)}f^{(1)}+2f^{(0)}\sum_{r=2}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}f^{(r)}+\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f^{(n-r)}f^{(r-s)}f^{(s)}\\&=2f^{(0)}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}f^{(r)}+\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f^{(n-r)}f^{(r-s)}f^{(s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{(0)}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}f^{(n-s)}f^{(s)}&=f^{(0)}\left\{\binom{n}{0}f^{(n-0)}f^{(0)}+\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n}{s}f^{(n-s)}f^{(s)}+\binom{n}{n}f^{(n-n)}f^{(n)}\right\}\\&=f^{(0)}\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n}{s}f^{(n-s)}f^{(s)}+2f^{(0)}f^{(0)}f^{(n)}\end{aligned}$$

であるから、これらを (w) に代入すれば

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f^{(n-r)}f^{(r-s)}f^{(s)}\\&\quad=f^{(n)}f^{(0)}f^{(0)}+f^{(0)}\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n}{s}f^{(n-s)}f^{(s)}+2f^{(0)}f^{(0)}f^{(n)}\\&\qquad+2f^{(0)}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}f^{(r)}+\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f^{(n-r)}f^{(r-s)}f^{(s)}\end{aligned}$$

即ち、

$$\begin{aligned}\left\{f^{3}(x)\right\}^{(n)}=3f^{(0)}f^{(0)}f^{(n)}+3f^{(0)}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}f^{(n-r)}f^{(r)}\\+\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{n}{r}\binom{r}{s}f^{(n-r)}f^{(r-s)}f^{(s)}\end{aligned}$$

$f(x)=\log x$ のとき

$$(\log x)^{(n-r)}=(-1)^{n-r-1}(n-r-1)!\,x^{-n+r}\qquad (r=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$(\log x)^{(r-s)}=(-1)^{r-s-1}(r-s-1)!\,x^{-r+s}\qquad (s=0,1,2,\cdots,r-1)$$

$$(\log x)^{(s)}\;=(-1)^{s-1}(s-1)!\,x^{-s}\qquad (s=1,2,3,\cdots)$$

であるから、これらを上式に代入すれば

$$\{\log^3 x\}^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{3(n-1)!}{x^n}\log^2 x+(-1)^n\frac{3\log x}{x^n}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}(n-r-1)!\,(r-1)!$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{n}{r}\binom{r}{s}(n-r-1)!\,(r-s-1)!\,(s-1)!$$

さらに

$$\binom{n}{r}(n-r-1)!\,(r-1)!=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}(n-r-1)!\,(r-1)!=\frac{n!}{(n-r)r}$$

$$\binom{n}{r}\binom{r}{s}(n-r-1)!\,(r-s-1)!\,(s-1)!=\frac{n!}{(n-r)(r-s)s}$$

を用いれば

$$\{\log^3 x\}^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{3(n-1)!}{x^n}\log^2 x+(-1)^n\frac{3\log x}{x^n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{n!}{(n-r)r}$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\frac{n!}{(n-r)(r-s)s}\tag{2.2}$$

$n=1$ のとき

$$\{\log^3 x\}^{(1)}=(-1)^{1-1}\frac{3(1-1)!}{x^1}\log^2 x=\frac{3\log^2 x}{x^1}$$

$n=2$ のとき

$$\{\log^3 x\}^{(2)}=(-1)^{2-1}\frac{3(2-1)!}{x^2}\log^2 x+(-1)^2\frac{3\cdot 2(2-2)!}{x^2}\log x$$

$$=-\frac{3\log^2 x}{x^2}+\frac{6\log x}{x^2}$$

$n=3$ のとき

$$\{\log^3 x\}^{(3)}=(-1)^{3-1}\frac{3(3-1)!}{x^3}\log^2 x+(-1)^3\frac{3\log x}{x^3}\sum_{r=1}^{3-1}\frac{3!}{(3-r)r}$$

$$+\frac{(-1)^{3-1}}{x^3}\sum_{r=2}^{3-1}\sum_{s=1}^{r-1}\frac{3!}{(3-r)(r-s)s}$$

$$=\frac{6\log^2 x}{x^3}-\frac{18\log x}{x^3}+\frac{6}{x^3}$$

20・1・3　$\cos^m x,\ \sin^m x$ の高階微分

この公式も定理20・1・2から導出することができるが、その証明は長く煩雑である。よってここでは次の補助公式を使用する。

***Lemma* 1**

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m} {}_mC_r \cos\{(m-2r)x\} \qquad m=1,2,3,\cdots \tag{3.m}$$

証明

$\cos x$ の冪に関しては次式が知られている。(「岩波　数学公式Ⅱ」 p190)

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\} + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}$$

$$\cos^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\}$$

偶数のとき、

$$\sum_{r=0}^{m-1} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\} = \sum_{r=m+1}^{2m} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\}$$

$${}_{2m}C_m = {}_{2m}C_m \cos\{(2m-2m)x\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\cos^{2m} x &= \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\} + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}} \\
&= \frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{r=0}^{m-1} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\} + \sum_{r=0}^{m-1} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\}\right] + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}} \\
&= \frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{r=0}^{m-1} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\} + \sum_{r=m+1}^{2m} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\}\right] \\
&\qquad + \frac{1}{2^{2m}}\,{}_{2m}C_m \cos\{(2m-2m)x\} \\
&= \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m} {}_{2m}C_r \cos\{(2m-2r)x\}
\end{aligned}$$

奇数のとき、

$$\sum_{r=0}^{m} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\} = \sum_{r=m+1}^{2m+1} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\cos^{2m+1} x &= \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\} \\
&= \frac{1}{2^{2m+1}}\left[\sum_{r=0}^{m} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\} + \sum_{r=0}^{m} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\}\right] \\
&= \frac{1}{2^{2m+1}}\left[\sum_{r=0}^{m} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\} + \sum_{r=m+1}^{2m+1} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\}\right] \\
&= \frac{1}{2^{2m+1}}\sum_{r=0}^{2m+1} {}_{2m+1}C_r \cos\{(2m+1-2r)x\}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

公式20･1･3

$\downarrow$ を床関数とするとき、自然数 m について次式が成立する。

$$\left(\cos^m x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}{}_mC_r\,(m-2r)^n\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\} \tag{3.mc}$$

$$\left(\sin^m x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}{}_mC_r\,(m-2r)^n\cos\left\{(m-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n\pi}{2}\right\} \tag{3.ms}$$

証明

$Lemma\,1$ の (3.m) の両辺を x で n 回微分すれば

$$\left(\cos^m x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

m が偶数のとき

$$\left(m-2\cdot\frac{m}{2}\right)^n{}_mC_{\frac{m}{2}}\cos\left\{\left(m-2\cdot\frac{m}{2}\right)x+\frac{n\pi}{2}\right\}=0$$

$$\sum_{r=0}^{m/2-1}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}=\sum_{r=m/2+1}^{m}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left(\cos^m x\right)^{(n)}&=\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\\&=\frac{2}{2^m}\sum_{r=0}^{m/2-1}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\\&\qquad+\frac{2}{2^m}\left(m-2\cdot\frac{m}{2}\right)^n{}_mC_{\frac{m}{2}}\cos\left\{\left(m-2\cdot\frac{m}{2}\right)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\end{aligned}$$

m が奇数のとき

$$\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}=\sum_{r=m/2\downarrow+1}^{m}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left(\cos^m x\right)^{(n)}&=\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\\&=\frac{2}{2^m}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}(m-2r)^n\,{}_mC_r\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\end{aligned}$$

かくして (3.mc) を得る。(3.ms) は x を $x-\pi/2$ と置いて得られる。

例　$\cos^6 x$ の7階微分

直接微分

```
• m:=6:
• f1 := diff(cos(x)^m ,x,x,x,x,x,x,x)
```

$$64896\cdot\cos(x)^5\cdot\sin(x)-174720\cdot\cos(x)^3\cdot\sin(x)^3+40320\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)^5$$

公式による微分

```
n:=7:
fr := 1/2^(m-1)*sum(binomial(m,r)*(m-2*r)^n*cos((m-2*r)*x+n*PI/2)
                                                    , r=0..floor(m/2))
```

$$60\cdot\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{2}+2\cdot x\right)+3072\cdot\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{2}+4\cdot x\right)+8748\cdot\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{2}+6\cdot x\right)$$

等価の検証

```
testeq(fl,fr)
```

TRUE

20･1･4 $\cos^{\alpha}x$, $\sin^{\alpha}x$ の高階微分

公式20･1･4

正数 α について次式が成立する。

$$\left(\cos^{\alpha}x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(\alpha-2r)^{n}\cos\left\{(\alpha-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\} \tag{4.c}$$

$$\left(\sin^{\alpha}x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(\alpha-2r)^{n}\cos\left\{(\alpha-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n\pi}{2}\right\} \tag{4.s}$$

証明

Lemma 1 の (3.m) の両辺を x で微分すれば

$$\left(\cos^{m}x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^{m}}\sum_{r=0}^{m}(m-2r)^{n}{}_{m}C_{r}\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

冪を自然数 m から正数 α に解析接続して (4.c) を得る。(4.s) は x を $x-\pi/2$ と置いて得られる。

例 $\sin^{5.3}x$ の3階微分

直接微分と公式による微分により任意の1点 $x=0.9$ における微係数を計算した。両者は極めて良く一致している。

```
a = 5.3; n = 3;
fl[x_] = ∂x ∂x ∂x Sin[x]^a;
```

$$\text{fr[x\_]} := \frac{1}{2^{a}}\sum_{r=0}^{\infty}\text{Binomial}[a,r]\,(a-2r)^{n}\,\text{Cos}\left[(a-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n\pi}{2}\right]$$

N[fl[0.9]]	N[fr[0.9]]
-5.72269	$-5.72269+3.60713\times10^{-16}\,i$

20・2　多関数の積の高階積分

(1) 一般二項定理と2関数の積の高階積分

3・2 の一般二項定理によれば、$|x_1|>|x_2|$ なる実数 x_1, x_2 と自然数 n について

$$(x_1+x_2)^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}x_1^{-n-r}x_2^{r}$$

一方、16・1 の定理16・1・2によれば、x の関数 $f_1,\ f_2$ と自然数 n について

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1 f_2\,dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f_1^{<n+r>}f_2^{(r)}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{<m+k>}f_2^{(m+k)}dx^n$$

であった。これはまたライプニッツ則において微分演算子 (n) の符号を反転して

$$(f_1 f_2)^{(-n)}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}f_1^{(-n-r)}f_2^{(r)}$$

とし、この負の微分演算子 $(-n)$ を正の積分演算子 $<n>$ に置換した上、無限級数を有限級数と剰余項に分割表示したものに他ならない。

(2) 一般多項定理と多関数の積の高階積分

3・4 の一般多項定理によれば、$|x_1|>|x_2+x_3+\cdots+x_\lambda|$ なる実数 $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$ と自然数 n について

$$(x_1+x_2+\cdots+x_\lambda)^{-n}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}x_1^{-n-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_\lambda^{r_{\lambda-1}}$$

であったから、
x の関数 $f_1, f_2, \cdots, f_\lambda$ と自然数 n について次式が成立するに違いない。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x(f_1 f_2\cdots f_\lambda)dx^n=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{(n-r_1)}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}+R_m^n$$

20・2・1　多関数の積の高階積分

定理20・2・1

関数 $f_k(x)\ \ (k=0,1,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$ 、$f_k(x)$ の任意の r 階原始関数を $f_k^{<r>}$ 、m, n を自然数、$B(m,n)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して
$f_1^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m+n-1)$ であるか、もしくは、少なくとも1つの $k>1$ について
$f_k^{(s)}(a)=0\ \ (s=0,1,\cdots,m+n-2)$ であるならば、次式が成立する。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1 f_2\cdots f_\lambda dx^n=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{\langle n+r_1\rangle}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}$$

$$+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{{}_{n-1}C_{k_1}}{m+k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$

$$\times\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{\langle m+k_1\rangle}f_2^{(m+k_1-k_2)}f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})}dx^n$$

証明

関数 $f_1 f_2 f_3 \cdots f_\lambda$ の n 階積分を求めると、16・1の定理16・1・2より

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1 f_2 f_3\cdots f_\lambda dx^n=\sum_{r_1=0}^{m-1}\binom{-n}{r_1}f_1^{\langle n+r_1\rangle}\left(f_2 f_3\cdots f_\lambda\right)^{(r_1)}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{k_1}}{m+k_1}\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{\langle m+k_1\rangle}\left(f_2 f_3\cdots f_\lambda\right)^{(m+k_1)}dx^n$$

前節の 定理20・1・1 より

$$\left(f_2 f_3\cdots f_\lambda\right)^{(r_1)}=\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{r_1}{r_2}\binom{r_2}{r_3}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_2^{(r_1-r_2)}f_3^{(r_2-r_3)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}$$

$$\left(f_2 f_3\cdots f_\lambda\right)^{(m+k_1)}=\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}f_2^{(k_1-k_2)}f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})}$$

であるからこれらを代入して与式を得る。

例

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1 f_2 f_3\,dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}f_1^{<n+r>}f_2^{(r-s)}f_3^{(s)}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{{}_{n-1}C_r}{m+r}\binom{m+r}{s}\binom{r}{s}\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{<m+r>}f_2^{(m+r-s)}f_3^{(s)}dx^n$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1 f_2 f_3 f_4 dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\binom{s}{t}f_1^{<n+r>}f_2^{(r-s)}f_3^{(s-t)}f_4^{(t)}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m+r}\sum_{t=0}^{s}\frac{{}_{n-1}C_r}{m+r}\binom{m+r}{s}\binom{r}{s}\binom{s}{t}$$

$$\times\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{<m+r>}f_2^{(m+r-s)}f_3^{(s-t)}f_4^{(t)}dx^n$$

3関数の積の計算例

多関数の積の組合せは莫大あり、これらを逐一計算する訳にはいかない。そこでここではこれらのいくつかをピックアップして計算例示する。

例1 $x^\alpha e^x \sin x$ の高階積分

$x^\alpha e^x \sin x$ の直系高階積分の共通零点は $x=-\infty$ である。

そこで 定理20･2･1 において$f_1=x^{\alpha}$, $f_2=e^x$, $f_3=\sin x$ と置けば

$$\left(x^{\alpha}\right)^{<n+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r} \ , \quad \left(x^{\alpha}\right)^{<m+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}$$

$$\left(e^x\right)^{(r-s)}=\left(e^x\right)^{(m+r-s)}=e^x$$

$$(\sin x)^{(s)}=\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha}e^x\sin x\,dx^n$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)+R_m^n \tag{1.1}$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{1}{m+r}\binom{n-1}{r}\binom{m+r}{s}$$
$$\times\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)dx^n \tag{1.1r}$$

そして$n=2$のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha}e^x\sin x\,dx^2=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{-2}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3+r)}x^{\alpha+2+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)+R_m^2$$

$$R_m^2=\frac{(-1)^m}{B(2,m)}\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{1}{m+r}\binom{1}{r}\binom{m+r}{s}$$
$$\times\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)dx^2$$

この剰余項は自己同型であり、m が大きいときは項数が多くて計算が困難である。
そこで$m=1$と置けば上式はさらに簡単になる。

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha}e^x\sin x\,dx^2=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)}x^{\alpha+2}e^x\sin x+R_1^2$$

$$R_1^2=\frac{(-1)^1}{B(2,1)}\sum_{s=0}^{1}\frac{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{s}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)dx^2$$
$$+\frac{(-1)^1}{B(2,1)}\sum_{s=0}^{2}\frac{1}{2}\binom{1}{1}\binom{2}{s}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+3)}x^{\alpha+2}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)dx^2$$
$$=-\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha+1}e^x\sin x\,dx^2+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha+1}e^x\cos x\,dx^2\right)$$
$$-\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha+2}e^x\cos x\,dx^2$$

$\alpha=3$のとき、任意の1点$x=4$における両辺の値を計算すれば次のようになる。$m=1$なので剰余項R_1^2は大きいが、両辺はぴったり一致している。

x^3・e^x・sin x の2階積分

左辺(直接計算よる積分)

```
• a:=3:
• fl := int(int(x^a*E^x*sin(x) ,x),x):
• float(subs(fl, x=4))
```

20.68491162

級数

```
• fr := gamma(a+1)/gamma(a+3)*x^(a+2)*E^x*sin(x):
• float(subs(fr, x=4))
```

-2115.584829

剰余

```
• S10 := int(int(x^(a+1)*E^x*sin(x) ,x),x):
• S11 := int(int(x^(a+1)*E^x*cos(x) ,x),x):
• S21 := int(int(x^(a+2)*E^x*cos(x) ,x),x):
• R21 := -2*gamma(a+1)/gamma(a+2)*(S10+S11)
         -2*gamma(a+1)/gamma(a+3)*S21:
• float(subs(R21,x=4))
```

2136.26974

右辺(級数+剰余)

```
• float(subs(fr+R21, x=4))
```

20.68491162

$m\to\infty$ のとき

それならば $m\to\infty$ とすれば $R_\infty^2=0$ となるかと言うと、残念ながらそうはならない。驚いたことに $\alpha=3$ のときには x の値に関わらず $R_\infty^2=-3$ となる。従って

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} x^3e^x\sin x\,dx^2=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{-2}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3+3+r)}x^{3+2+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)-3$$

となる。 散々計算した結果、次の公式が成立することが判った。

公式20・2・1’

$\alpha=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} x^\alpha e^x\sin x\,dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\,c_{\alpha+r}x^{n-1-r} \qquad (1.1')$$

但し

$$c_{4k+0}=-(-1)^k2^{k-1}k!\cdot(2k-1)!!\cdot(4k-1)!!$$
$$c_{4k+1}=\ (-1)^k2^{k-1}k!\cdot(2k-1)!!\cdot(4k+1)!!$$
$$c_{4k+2}=-(-1)^k2^{k-1}k!\cdot(2k+1)!!\cdot(4k+1)!!$$
$$c_{4k+3}=\ 0$$

この公式により、$\alpha=3$ のとき R_∞^2 は次のように得られる。

$$R_\infty^2=\frac{1}{(2-1)!}\sum_{r=0}^{2-1}(-1)^r{}_{2-1}C_r\,c_{3+r}\,x^{2-1-r}={}_1C_0\,c_{3+0}\,x^1-{}_1C_1\,c_{3+1}\,x^0$$

ここで但し書きにより

$$c_{3+0}=c_{4\cdot 0+3}=0$$

$$c_{3+1}=c_{4\cdot 1+0}=-(-1)^1 2^{1-1}1!\cdot(2\cdot 1-1)!!\cdot(4\cdot 1-1)!!=3$$

であるから、これらを上式に代入すれば $R_\infty^2=-3$ となる。

参考までに $n=1,2,3$, $\alpha=1,2,\cdots,10$ について R_∞^n を示すと次表のとおりである。

α	$R_\infty^1(=c_\alpha)$	R_∞^2	R_∞^3
1	1/2	$x/2+1/2$	$x^2/4+x/2$
2	-1/2	$-x/2$	$-x^2/4+3/2$
3	0	-3	$-3x-15/2$
4	3	$3x+15$	$3x^2/2+15x+45/2$
5	-15	$-15x-45$	$-15x^2/2-45x$
6	45	$45x$	$45x^2/2-630$
7	0	1260	$1260x+5670$
8	-1260	$-1260x-11340$	$-630x^2-11340x-28350$
9	11340	$11340x+56700$	$5670x^2+56700x$
10	-56700	$-56700x$	$-28350x^2+1871100$

例2 $x^\alpha e^x \log x$ の高階積分

$x^\alpha e^x \log x$ の直系高階積分の共通零点は $x=-\infty$ である。

そこで 定理20･2･1 において $f_1=x^\alpha$, $f_2=e^x$, $f_3=\log x$ と置けば

$$(x^\alpha)^{<n+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}\quad,\quad(e^x)^{(r-s)}=e^x$$

$$(x^\alpha)^{<m+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}\quad,\quad(e^x)^{(m+r-s)}=e^x$$

$$(\log x)^{(0)}=\log x\quad(s=0)\quad,\quad(\log x)^{(s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,x^{-s}\quad(s\neq 0)$$

であるから、先ず定理20･2･1から $f_3^{(0)}$ の項を分離する必要がある。すると

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1f_2f_3dx^n=f_3^{(0)}\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f_1^{<n+r>}f_2^{(r)}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{r}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}f_1^{<n+r>}f_2^{(r-s)}f_3^{(s)}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r}{m+r}\binom{m+r}{0}\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{<m+r>}f_2^{(m+r)}f_3^{(0)}dx^n$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m+r}\frac{{}_{n-1}C_r}{m+r}\binom{m+r}{s}\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{<m+r>}f_2^{(m+r-s)}f_3^{(s)}dx^n$$

これに上の諸式を代入すれば

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} x^{\alpha} e^{x} \log x\, dx^{n} = e^{x}\log x \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}$$

$$- e^{x}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r-s} + R_{m}^{n} \qquad (1.2)$$

$$R_{m}^{n} = \frac{(-1)^{m}}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}}{m+r}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^{x}\log x\, dx^{n}$$

$$+ \frac{(-1)^{m}}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m+r}(-1)^{s-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}}{m+r}\binom{m+r}{s}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r-s}e^{x}dx^{n}$$

$\alpha=3/2$, $n=3$ の場合を $m=80$ まで計算してかなり大きな1点 $x=25$ における両辺の値を求めると次のようになる。(1.2) の右辺は漸近展開のようである。

```
a = 3 / 2;  n = 3;  m = 80;
fl[x_] := 1/Gamma[n] ∫_{-∞}^{x} (x - t)^(n-1) t^a e^t Log[t] dt
fr[x_] := e^x Log[x] Σ_{r=0}^{m-1} Binomial[-n, r] Gamma[1 + a]/Gamma[1 + a + n + r] x^(a+n+r) -
   e^x Σ_{r=1}^{m-1} Σ_{s=1}^{r} (-1)^s Binomial[-n, r] Binomial[r, s] Gamma[1 + a] Gamma[s]/Gamma[1 + a + n + r] x^(a+n+r-s)
```

```
N[fl[25]]
2.30674 ×10^13 - 391.836 i
```

```
N[fr[25]]
2.30674 ×10^13
```

20·2·2　関数の累乗の高階積分

定理20·2·1において特に $f_1 = f_2 = \cdots = f_\lambda$ とすれば、直ちに次の定理が従う。

定理20·2·2

関数 $f(x)$ の r 階導関数を $f^{(r)}$、$f(x)$ の任意の r 階原始関数を $f^{<r>}$、m, n を自然数、$B(m,n)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$$f^{<r>}(a)=0 \quad (r=1,2,\cdots,m+n-1) \qquad or \qquad f^{(s)}(a)=0 \quad (s=0,1,\cdots,m+n-2)$$

であるならば、2以上の自然数 λ について次式が成立する。

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{\lambda}dx^{n} = \sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f^{\langle n+r_1\rangle}f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})} + R_{m}^{n}$$

$$R_{m}^{n} = \frac{(-1)^{m}}{B(n,m)}\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{{}_{n-1}C_{k_1}}{m+k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$

$$\times\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f^{\langle m+k_1\rangle}f^{(m+k_1-k_2)}f^{(k_2-k_3)}\cdots f^{(k_{\lambda-1})}dx^{n}$$

例　$\log^{3}x$ の高階積分

定理20·2·2において $f = \log x$ と置けば

$$(\log x)^{<n+r>} = \frac{\log x - \psi(1+n+r) - \gamma}{\Gamma(1+n+r)} x^{n+r}$$

$$(\log x)^{(r-s)} = \log x \quad (r=s) \ , \quad (\log x)^{(r-s)} = (-1)^{r-s-1}(r-s-1)!\, x^{-r+s} \quad (r \neq s)$$

$$(\log x)^{(0)} = \log x \quad (s=0) \ , \quad (\log x)^{(s)} = (-1)^{s-1}(s-1)!\, x^{-s} \quad (r \neq 0)$$

$f^{(0)}$ は $f^{(r)}$ $r=1,2,3,\cdots$ とは関数形が異なるから、先ず

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f^3 dx^n = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{r} \binom{-n}{r} \binom{r}{s} f^{<n+r>} f^{(r-s)} f^{(s)} + R_m^n$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m+r} \frac{1}{m+r} \binom{n-1}{r} \binom{m+r}{s} \int_a^x \cdots \int_a^x f^{<m+r>} f^{(m+r-s)} f^{(s)} dx^n$$

から $f^{(0)}$ を含む項を取り出さねばならない。すると

$$\sum_{r=0}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} f^{(r-s)} f^{(s)}$$

$$= \binom{-n}{0} f^{<n+0>} \binom{0}{0} f^{(0)} f^{(0)} + \binom{-n}{1} f^{<n+1>} \left\{ \binom{1}{0} f^{(1)} f^{(0)} + \binom{1}{1} f^{(0)} f^{(1)} \right\}$$

$$+ \sum_{r=2}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} \left\{ \binom{r}{0} f^{(r)} f^{(0)} + \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} f^{(r-s)} f^{(s)} + \binom{r}{r} f^{(0)} f^{(r)} \right\}$$

$$= f^{<n>} f^{(0)} f^{(0)} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} f^{(r)} f^{(0)} + \sum_{r=2}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} f^{(r-s)} f^{(s)}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} f^{<m+r>} \sum_{s=0}^{m+r} \binom{m+r}{s} f^{(m+r-s)} f^{(s)}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} f^{<m+r>} \left\{ f^{(m+r)} f^{(0)} + \sum_{s=1}^{m+r-1} \binom{m+r}{s} f^{(m+r-s)} f^{(s)} + f^{(0)} f^{(m+r)} \right\}$$

$$= 2 \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} f^{<m+r>} f^{(m+r)} f^{(0)} + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} f^{<m+r>} \sum_{s=1}^{m+r-1} \binom{m+r}{s} f^{(m+r-s)} f^{(s)}$$

であるから

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f^3 dx^n = f^{<n>} f^{(0)} f^{(0)} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \binom{-n}{r} f^{<n+r>} f^{(r)} f^{(0)}$$

$$+ \sum_{r=2}^{m-1} \sum_{s=1}^{r-1} \binom{-n}{r} \binom{r}{s} f^{<n+r>} f^{(r-s)} f^{(s)}$$

$$R_m^n = \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2}{m+r} \binom{n-1}{r} \int_a^x \cdots \int_a^x f^{<m+r>} f^{(m+r)} f^{(0)} dx^n$$

$$+ \frac{(-1)^m}{B(n,m)} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{m+r-1} \frac{1}{m+r} \binom{n-1}{r} \binom{m+r}{s} \int_a^x \cdots \int_a^x f^{<m+r>} f^{(m+r-s)} f^{(s)} dx^n$$

これに上記の諸式及び

$$(\log x)^{<m+r>} = \frac{\log x - \psi(1+m+r) - \gamma}{\Gamma(1+m+r)} x^{m+r}$$

$$(\log x)^{(m+r)} = (-1)^{m+r-1}(m+r-1)!\, x^{-m-r} \quad (r=0, \cdots, n-1)$$

$$(\log x)^{(m+r-s)} = (-1)^{m+r-s-1}(m+r-s-1)!\, x^{-m-r+s} \quad (s=1, \cdots, m+r-1)$$

を代入すれば

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log^3 x\,dx^n = \frac{\log x - \psi(1+n) - \gamma}{\Gamma(1+n)}x^n(\log x)^2$$

$$- 2x^n\log x\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\binom{-n}{r}\frac{\log x - \psi(1+n+r)-\gamma}{\Gamma(1+n+r)}\Gamma(r)$$

$$+ x^n\sum_{r=2}^{m-1}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^r\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\frac{\log x - \psi(1+n+r)-\gamma}{\Gamma(1+n+r)}\Gamma(r-s)\Gamma(s)$$

$$+ R_m^n \tag{2.1}$$

$$R_m^n = -\frac{2}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{(m+r)^2}\binom{n-1}{r}\int_0^x\cdots\int_0^x\{\log x - \psi(1+m+r) - \gamma\}\log x\,dx^n$$

$$+ \frac{1}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m+r-1}\frac{(-1)^r}{m+r}\binom{n-1}{r}\binom{m+r}{s}$$

$$\times\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{\log x - \psi(1+m+r)-\gamma}{\Gamma(1+m+r)}\Gamma(m+r-s)\Gamma(s)\,dx^n \tag{2.1r}$$

この式はややこしいが、幸いなことに $\lim_{m\to\infty}R_m^n = 0$ となる。但し証明は困難な上に収束速度は非常に遅い。

$n=2$ としてこれを $m=275$ まで計算し任意の1点 $x=0.3$ における両辺の値をもとめると次のようになる。ここまで計算して小数点以下1位までしか一致していない。m を大きくすればもっと精度を上げることができるが大変な時間を要する。

```
n = 2; m = 275;

f1[x_] := 1/Gamma[n] ∫_0^x (x - t)^(n-1) Log[t]^3 dt

fr[x_] := (Log[x] - PolyGamma[1 + n] - EulerGamma)/Gamma[1 + n] x^n Log[x]^2 -
    2 x^n Log[x] Σ_{r=1}^{m-1} (-1)^r Binomial[-n, r] (Log[x] - PolyGamma[1 + n + r] - EulerGamma)/Gamma[1 + n + r] Gamma[r] +
    x^n Σ_{r=2}^{m-1} Σ_{s=1}^{r-1} (-1)^r Binomial[-n, r] Binomial[r, s] (Log[x] - PolyGamma[1 + n + r] - EulerGamma)/Gamma[1 + n + r]
        × Gamma[r - s] Gamma[s]

N[f1[0.3]]          N[fr[0.3]]
-1.44719            -1.40044
```

20·2·3 $\cos^m x$, $\sin^m x$ の高階積分

公式20·2·3c

(1) 奇数乗

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^x\cdots\int_{\frac{1\pi}{2}}^x\int_{\frac{0\pi}{2}}^x \cos^{2m+1}x\,dx^n = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\cos\left\{(2m-2r+1)x - \frac{n\pi}{2}\right\}$$

(3.co)

(2) 偶数乗

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}\cos^{2m}x\,dx^n = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{(2m-2r)^n}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$
$$+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}dx^n \qquad (3.\mathrm{ce})$$

ここで $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は次の超越方程式の解である。

$$\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{(2m-2r)^k}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{k\pi}{2}\right\} = 0 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

特に $m=1$ のとき、

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{4}}^{x}\cdots\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{0\pi}{4}}^{x}\cos^2 x\,dx^n = \frac{1}{2^{n+1}}\cos\left(2x-\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{\frac{(n-1)\pi}{4}}^{x}\cdots\int_{\frac{1\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{0\pi}{4}}^{x}dx^n \qquad (3.\mathrm{c2})$$

証明

Lemma 1 より次式が従う。

$$\cos^{2m+1}x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}{}_{2m+1}C_r\cos\{(2m-2r+1)x\}$$

両辺を x について n 回積分すれば

$$\left(\cos^{2m+1}x\right)^{<n>} = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

ここで超越方程式

$$\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^k}\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{k\pi}{2}\right\} = 0 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

の解を考えると

$$x = a_k = \frac{(k-1)\pi}{2} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

はこの超越方程式の解である。何故ならば

$$\cos\left\{(2m-2r+1)\cdot\frac{(k-1)\pi}{2}-\frac{k\pi}{2}\right\} = \cos\left\{(m-r)(k-1)\pi-\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$= (-1)^{(m-r)(k-1)}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

となるからである。これらの解は m に依存しない。かくして (3.co) を得る。

次に、*Lemma* 1 より次式が従う。

$$\cos^{2m}x = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}{}_{2m}C_r\cos\{(2m-2r)x\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}$$

両辺を x について n 回積分すれば

$$\left(\cos^{2m}x\right)^{<n>} = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{(2m-2r)^n}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{n\pi}{2}\right\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{n-1}c_{k+1}x^k$$

ここで超越方程式

$$\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{(2m-2r)^k}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{k\pi}{2}\right\}=0 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

の解を $a_k \quad k=1,2,\cdots,n$ とすれば、直ちに (3.ce) が従う。

特に $m=1$ のとき、この超越方程式は次のようになる。

$$\frac{{}_2C_0}{2^k}\cos\left(2x-\frac{k\pi}{2}\right)=0 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

すると、

$$x=a_k=\frac{(k-1)\pi}{4} \quad k=1,2,\cdots,n$$

はこの超越方程式の解になる。何故ならば、

$$\frac{{}_2C_0}{2^k}\cos\left\{2\cdot\frac{(k-1)\pi}{4}-\frac{k\pi}{2}\right\}=\frac{1}{2^k}\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

となるからである。これらの解は m とは無関係である。よって (3.c2) が成立する。

Note **1**

公式20･1･3 により $\cos^{2m+1}x$ の n 階微分を示せば次のようになる。

$$\left(\cos^{2m+1}x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}{}_{2m+1}C_r(2m+1-2r)^n\cos\left\{(2m+1-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

積分は微分の逆演算であるから、n を $-n$ に置換すれば

$$\left(\cos^{2m+1}x\right)^{(-n)}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

この微分演算子を積分演算子に置き換えれば (3.co) が得られる。

Note **2**

$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}dx^n$ の一般表記は困難である。ちなみに $n=1,2,3$ について示せば次のようになる。

$n\geqq 4$ は煩雑で手が付けられない。

$$\int_{a_1}^{x}dx^1=\frac{(x-a_1)}{1!}\,, \qquad \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}dx^2=\frac{(x-a_2)(x-2a_1+a_2)}{2!}$$

$$\int_{a_3}^{x}\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}dx^3=\frac{(x-a_3)\left(x^2+a_3x-3a_1x+6a_1a_2-3a_1a_3-3a_2^2+a_3^2\right)}{3!}$$

これらは 4･1･3 の積分定数多項式の一部に似ているが非なるものである。 即ち、これらは $\cos^2x=(\cos 2x+1)/2$ *etc.* に起因するれっきとした直系高階原始関数の一部である。

例1　$\boldsymbol{\cos^5 x}$ の3階積分

```
m = 2; n = 3;
f1[x_] := ∫_{2π/2}^{x} ( ∫_{1π/2}^{v} ( ∫_{0π/2}^{u} Cos[t]^(2 m+1) dt ) du ) dv
```

```
fr[x_] := 1/2^(2 m) Sum[Binomial[2 m + 1, r]/(2 m - 2 r + 1)^n Cos[(2 m - 2 r + 1) x - n π/2], {r, 0, m}]
```

fl[x]

$$-\frac{5\,\mathrm{Sin}[x]}{8}-\frac{5}{432}\mathrm{Sin}[3x]-\frac{\mathrm{Sin}[5x]}{2000}$$

Expand[fr[x]]

$$-\frac{5\,\mathrm{Sin}[x]}{8}-\frac{5}{432}\mathrm{Sin}[3x]-\frac{\mathrm{Sin}[5x]}{2000}$$

例2 $\cos^2 x$ の3階積分

```
fl[x_] := ∫_{2π/4}^{x} ( ∫_{1π/4}^{v} ( ∫_{0π/4}^{u} Cos[t]^2 dt ) du ) dv
fr[x_] := 1/2^(3+1) Cos[2 x - 3π/2] + 1/2 ∫_{2π/4}^{x} ( ∫_{1π/4}^{v} ( ∫_{0π/4}^{u} dt ) du ) dv
```

Expand[fl[x]]

$$-\frac{\pi^3}{384}-\frac{\pi^2 x}{64}+\frac{x^3}{12}-\frac{1}{16}\mathrm{Sin}[2x]$$

Expand[fr[x]]

$$-\frac{\pi^3}{384}-\frac{\pi^2 x}{64}+\frac{x^3}{12}-\frac{1}{16}\mathrm{Sin}[2x]$$

公式20･2･3s

(1) 奇数乗

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{2\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\sin^{2m+1}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\sin\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\} \tag{3.so}$$

(2) 偶数乗

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}\sin^{2m}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m}C_r}{(2m-2r)^n}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{n\pi}{2}\right\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x}dx^n \tag{3.se}$$

ここで $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は次の超越方程式の解である。

$$\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m}C_r}{(2m-2r)^k}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{k\pi}{2}\right\}=0 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

特に $m=1$ のとき、

$$\int_{\frac{(n+1)\pi}{4}}^{x}\cdots\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}\sin^2 x\,dx^n=-\frac{1}{2^{n+1}}\cos\left(2x-\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{\frac{(n+1)\pi}{4}}^{x}\cdots\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}\int_{\frac{2\pi}{4}}^{x}dx^n \tag{3.s2}$$

証明

公式20･2･3c の (3.co) において x を $x-\pi/2$ に置換すれば

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{2\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\sin^{2m+1}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\cos\left\{(2m-2r+1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

ここで

$$\cos\left\{(2m-2r+1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{n\pi}{2}\right\}=\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{(2m-2r+1)\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right\}$$
$$=\sin\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}-(m-r)\pi\right\}$$
$$=(-1)^{m-r}\sin\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

これを代入して (3.so) を得る。(3.se) , (3.s2) も公式20･2･3c から同様の方法で得られる。

例1　$\sin^7 x$ の3階積分

```
m = 3; n = 3;
```

$$\texttt{f1[x\_]} := \int_{\frac{3\pi}{2}}^{x}\left(\int_{\frac{2\pi}{2}}^{v}\left(\int_{\frac{1\pi}{2}}^{u}\mathrm{Sin}[t]^{2m+1}\,dt\right)du\right)dv$$

$$\texttt{fr[x\_]} := \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{m-r}\,\mathrm{Binomial}[2m+1,r]}{(2m-2r+1)^n}\,\mathrm{Sin}\left[(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right]$$

```
f1[x]
```

$$\frac{35\,\mathrm{Cos}[x]}{64}-\frac{7}{576}\mathrm{Cos}[3x]+\frac{7\,\mathrm{Cos}[5x]}{8000}-\frac{\mathrm{Cos}[7x]}{21952}$$

```
Expand[fr[x]]
```

$$\frac{35\,\mathrm{Cos}[x]}{64}-\frac{7}{576}\mathrm{Cos}[3x]+\frac{7\,\mathrm{Cos}[5x]}{8000}-\frac{\mathrm{Cos}[7x]}{21952}$$

例2　$\sin^2 x$ の4階積分

$$\texttt{f1[x\_]} := \int_{\frac{5\pi}{4}}^{x}\left(\int_{\frac{4\pi}{4}}^{t4}\left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{t3}\left(\int_{\frac{2\pi}{4}}^{t2}\mathrm{Sin}[t1]^2\,dt1\right)dt2\right)dt3\right)dt4$$

$$\texttt{fr[x\_]} := -\frac{1}{2^{4+1}}\mathrm{Cos}\left[2x-\frac{4\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{x}\left(\int_{\frac{4\pi}{4}}^{t4}\left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{t3}\left(\int_{\frac{2\pi}{4}}^{t2}dt1\right)dt2\right)dt3\right)dt4$$

```
Expand[f1[x]]
```

$$\frac{5\pi^4}{12288}-\frac{\pi^3 x}{192}+\frac{3\pi^2x^2}{128}-\frac{\pi x^3}{24}+\frac{x^4}{48}-\frac{1}{32}\mathrm{Cos}[2x]$$

```
Expand[fr[x]]
```

$$\frac{5\pi^4}{12288}-\frac{\pi^3 x}{192}+\frac{3\pi^2x^2}{128}-\frac{\pi x^3}{24}+\frac{x^4}{48}-\frac{1}{32}\mathrm{Cos}[2x]$$

20･2･4　$\cos^\alpha x, \sin^\alpha x$ の1階積分

Lemma 1 は容易にその冪を自然数 m から正数 α に解析接続できる。

Lemma 2

$$\cos^\alpha x=\frac{1}{2^\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\cos\{(\alpha-2r)x\}\qquad \alpha>0\ ,\ |x|\le\frac{\pi}{2} \tag{4.α}$$

公式20･2･4

$$\int_0^x \cos^\alpha x\,dx = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{\alpha-2r}\sin\{(\alpha-2r)x\} \tag{4.c}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin^\alpha x\,dx = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{\alpha-2r}\sin\left\{(\alpha-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \tag{4.s}$$

特に $\alpha=2m$ のとき

$$\int_0^x \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\} + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}x \tag{4.ce}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin^{2m} x\,dx = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\} + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \tag{4.se}$$

証明

Lemma 2 の (4.α) の両辺を0から x まで積分すれば

$$\int_0^x \cos^\alpha x\,dx = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{\alpha-2r}\sin\{(\alpha-2r)x\} \tag{4.c}$$

特に $\alpha=2m$ のときは

$$\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\} = \sum_{r=m+1}^{2m}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos^{2m} x\,dx &= \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\}\\ &= \frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\} + \sum_{r=m+1}^{2m}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\}\right]\\ &\qquad + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\lim_{r\to m}\frac{\sin\{(2m-2r)x\}}{2m-2r}\\ &= \frac{2}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\} + \frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}x \end{aligned} \tag{4.ce}$$

(4.s), (4.se) は x を $x-\pi/2$ と置いて得られる。

Note

α が非偶数であっても次式は一般に成立しない。

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_2}^x\int_{a_1}^x \cos^\alpha x\,dx^n = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{(\alpha-2r)^n}\cos\left\{(\alpha-2r)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

何故ならば、実数 α について左辺は一般に複素関数であるのに、右辺は常に実関数だからである。実数 α について左辺が実関数となり得るのは $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が全て $\pi/2$ より小さい場合であるが、そのようなケースは見出すことが困難である。$\sin^\alpha x$ についても同様である。

例1　$\sqrt[3]{\sin x}$ の1階積分

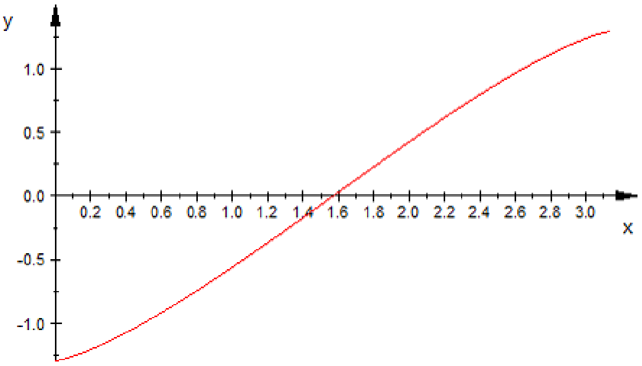
直接積分

- a:=1/3
- fl := $x \to \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)^a \, dt$

公式による積分

- m:=80: MAXDEPTH:=1000:
- fr := $x \to \frac{1}{2^a} \cdot \left(\sum_{r=0}^{m} \frac{\binom{a}{r}}{a-2\cdot r} \cdot \sin\left((a-2\cdot r)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) \right)$

青:直接積分、 赤:公式による積分



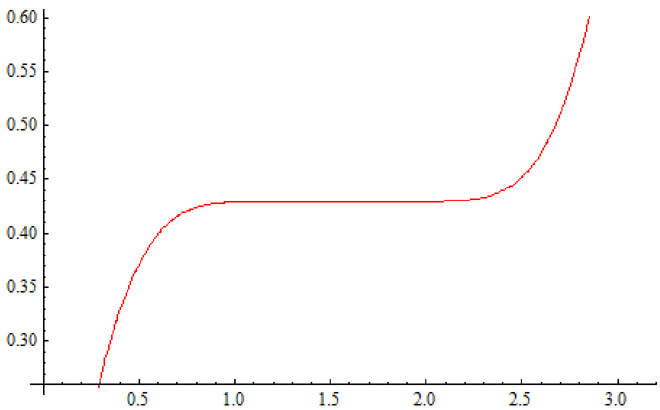
両辺は完全に重なっているので左辺(青)は見えない。

例2　$\cos^8 x$ の1階積分

```
m = 4;
```

$$fl[x\_] := \int_0^x Cos[t]^{2m} \, dt$$

$$fr[x\_] := \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{Binomial[2m, r]}{2m - 2r} Sin[(2m - 2r) x] + \frac{Binomial[2m, m]}{2^{2m}} x$$



両辺は完全に重なっているので左辺(青)は見えない。

2010.12.21

K. Kono

宇宙人の数学