21　多関数の積の超微積分

21･1　多関数の積の超積分

(1) 一般二項定理と2関数の積の超積分

3･2 の一般二項定理によれば、$|x_1|>|x_2|$ なる実数 x_1, x_2 と正数 p について

$$(x_1+x_2)^{-p}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-p}{r}x_1^{-p-r}x_2^{r}$$

一方、17･1 の定理17･1･2によれば、x の関数 f_1, f_2 と正数 p について

$$\int_a^x\!\!\sim\!\!\int_a^x (f_1 f_2)^{<p>}dx^2=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-p}{r}f_1^{<p+r>}f_2^{(r)}+R_m^p$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{p-1}{k}\int_a^x\!\!\sim\!\!\int_a^x f_1^{<m+k>}f_2^{(m+k)}dx^p$$

であった。

これはまた 19･1 の超微分に関するライプニッツ則において微分演算子の符号を反転して

$$(f_1 f_2)^{(-p)}=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-p}{r}f_1^{(-p-r)}f_2^{(r)}+R_m^{-p}$$

$$R_m^{-p}=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{p-1}{k}\left\{f_1^{<m+k>}f_2^{(m+k)}\right\}^{(-p)}$$

とし、この負の微分演算子 $(-p)$ を正の積分演算子 $<p>$ に置換したものに他ならない。

(2) 一般多項定理と多関数の積の超積分

3･4 の一般多項定理によれば、$|x_1|>|x_2+x_3+\cdots+x_\lambda|$ なる実数 $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$ と任意の正数 p について

$$(x_1+x_2+\cdots+x_\lambda)^{-p}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}x_1^{-p-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_\lambda^{r_{\lambda-1}}$$

であったから、

多関数の積の高階積分は、x の関数 $f_1, f_2, \cdots, f_\lambda$ と任意の正数 p について

$$\int_a^x\!\!\cdots\!\!\int_a^x (f_1 f_2\cdots f_\lambda)dx^p=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{(p-r_1)}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

となるに相違ない。

21･1･1　多関数の積の超積分

定理21･1･1

p, r を正数、m を自然数、関数 $f_k(x)\ (k=0,1,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$、$f_k(x)$ の任意の r 階原始関数を $f_k^{<r>}$、$B(p,m)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$f_1^{<r>}(a)=0 \quad r\in[0,m+p]$ であるか、もしくは、少なくとも1つの $k>1$ について
$f_k^{(s)}(a)=0 \quad s\in[0,m+p-1]$ であるならば、次式が成立する。

$$\int_a^x\sim\int_a^x f_1 f_2\cdots f_\lambda dx^p=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_1^{\langle p+r_1\rangle}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\int_a^x\sim\int_a^x f_1^{\langle m+k_1\rangle}f_2^{(m+k_1-k_2)}f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})}dx^p$$

証明

20･2の定理20･2･1において積分演算子のインデックスを $[1,n]$ から $[0,p]$ に解析接続する。

3関数の積の計算例

例1 $x^\alpha e^x\sin x$ の超積分

$x^\alpha e^x\sin x$ の直系高階積分の零点は $x=-\infty$ 故、直系超積分の零点も同じである。
そこで定理21･1･1において $f_1=x^\alpha$, $f_2=e^x$, $f_3=\sin x$ と置けば

$$\left(x^\alpha\right)^{<p+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p+r)}x^{\alpha+p+r} \quad , \quad \left(x^\alpha\right)^{<m+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}$$

$$\left(e^x\right)^{(r-s)}=\left(e^x\right)^{(m+r-s)}=e^x \quad , \quad (\sin x)^{(s)}=\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\int_{-\infty}^x\sim\int_{-\infty}^x x^\alpha e^x\sin x\,dx^p$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{-p}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p+r)}x^{\alpha+p+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)+R_m^p \tag{1.1}$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{1}{m+r}\binom{p-1}{r}\binom{m+r}{s}$$
$$\times\int_{-\infty}^x\sim\int_{-\infty}^x\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)dx^p \tag{1.1r}$$

20･2･1 で見たように、$m\rightarrow\infty$ のときこの R_m^p は0に収束しない。即ち、この級数は漸近展開となる。$\alpha=3,\ p=5/2$ としてかなり大きな1点 $x=20$ における両辺の値を計算すると次のとおり。

```
a = 3;  p = 5 / 2;  m = 100;
```

$$\texttt{f1[x\_] := }\frac{1}{\texttt{Gamma[p]}}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{p-1}\,t^a\,e^t\,\texttt{Sin[t]}\,dt$$

$$\texttt{fr[x\_] := }\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\texttt{Binomial[-p, r] Binomial[r, s]}\frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a + p + r]}}x^{a+p+r}\,e^x\,\texttt{Sin}\left[x+\frac{s\pi}{2}\right]$$

```
N[f1[20]]
-7.89712 ×10^11 + 0. i
```

```
N[fr[20]]
-7.89712 ×10^11
```

例2 $x^{\alpha}e^{x}\log x$ の超積分

$x^{\alpha}e^{x}\log x$ の直系高階積分の零点は $x=-\infty$ 故、直系超積分の零点も同じである。
そこで定理21･1･1において $f_1=x^{\alpha}$, $f_2=e^{x}$, $f_3=\log x$ と置けば

$$\left(x^{\alpha}\right)^{<p+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p+r)}x^{\alpha+p+r} \quad , \quad \left(x^{\alpha}\right)^{<m+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}$$

$$\left(e^{x}\right)^{(r-s)}=e^{x} \quad , \quad \left(e^{x}\right)^{(m+r-s)}=e^{x}$$

$$(\log x)^{(0)}=\log x \quad (s=0) \quad , \quad (\log x)^{(s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,x^{-s} \quad (s\neq 0)$$

であるから、$f_3^{(0)}$ を含む項を分離してこれらを代入すると

$$\int_{-\infty}^{x}\!\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{x} x^{\alpha}e^{x}\log x\,dx^{p}=e^{x}\log x\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p+r)}x^{\alpha+p+r}$$
$$-\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s}\binom{-p}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha+p+r)}x^{\alpha+p+r-s}e^{x}+R_m^p \tag{1.2}$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{m+r}\binom{p-1}{r}\binom{m+r}{0}\int_{-\infty}^{x}\!\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^{x}\log x\,dx^{p}$$
$$+\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m+r}\frac{(-1)^{s-1}}{m+r}\binom{p-1}{r}\binom{m+r}{s}\int_{-\infty}^{x}\!\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r-s}e^{x}dx^{p} \tag{1.2r}$$

$\alpha=3/2$, $p=2.7$ の場合を $m=55$ まで計算して任意の1点 $x=17$ における両辺の値を求めると次のようになる。この級数も漸近展開のようである。

```
a = 3 / 2; p = 2.7; m = 55;
```

$$\texttt{f1[x\_]} := \frac{1}{\texttt{Gamma[p]}}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{p-1}\,t^{a}\,e^{t}\,\texttt{Log[t]}\,dt$$

$$\texttt{fr[x\_]} := e^{x}\,\texttt{Log[x]}\sum_{r=0}^{m-1}\texttt{Binomial[-p, r]}\frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a + p + r]}}x^{a+p+r}-$$
$$\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s}\,\texttt{Binomial[-p, r] Binomial[r, s]}\frac{\texttt{Gamma[1 + a] Gamma[s]}}{\texttt{Gamma[1 + a + p + r]}}x^{a+p+r-s}e^{x}$$

```
N[f1[17]]
3.50988 ×10^9 - 103.255 i
```

```
N[fr[17]]
3.50988 ×10^9
```

21･1･2 関数の累乗の超積分

定理21･1･1 において特に $f_1=f_2=\cdots=f_{\lambda}$ とすれば、直ちに次の定理が従う。

定理21･1･2

p , r を正数、m を自然数、関数 $f(x)$ の r 階導関数を $f^{(r)}$ 、$f(x)$ の任意の r 階原始関数を $f^{<r>}$ 、$B(p,m)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$$f^{<r>}(a)=0 \quad r\in[0,m+p] \quad or \quad f^{(s)}(a)=0 \quad s\in[0,m+p-1]$$

であるならば、2以上の自然数 λ について次式が成立する。

$$\int_a^x\sim\int_a^x f^{\lambda}dx^p=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f^{\langle p+r_1\rangle}f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\int_a^x\sim\int_a^x f^{\langle m+k_1\rangle}f^{(m+k_1-k_2)}f^{(k_1-k_2)}\cdots f^{(k_{\lambda-1})}dx^p$$

例 $\log^3 x$ の超積分

$\log^3 x$ の直系高階積分の共通零点は $x=0$ 故、直系超積分の零点も同じである。
そこで定理21・1・2において $f=\log x$ と置けば

$$(\log x)^{<p+r>}=\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}x^{p+r} \;,\; (\log x)^{<m+r>}=\frac{\log x-\psi(1+m+r)-\gamma}{\Gamma(1+m+r)}x^{m+r}$$

$$(\log x)^{(r-s)}=\log x \quad (r=s) \;,\quad (\log x)^{(r-s)}=(-1)^{r-s-1}(r-s-1)!\,x^{-r+s} \quad (r\neq s)$$

$$(\log x)^{(0)}=\log x \quad (s=0) \;,\quad (\log x)^{(s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,x^{-s} \quad (r\neq 0)$$

であるから、$f^{(0)}$ を含む項を分離してこれらを代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^x\sim\int_0^x(\log x)^3dx^p=&\frac{\log x-\psi(1+p)-\gamma}{\Gamma(1+p)}x^p(\log x)^2\\&-2x^p\log x\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r\binom{-p}{r}\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}\Gamma(r)\\&+x^p\sum_{r=2}^{m-1}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^r\binom{-p}{r}\binom{r}{s}\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}\Gamma(r-s)\Gamma(s)\\&+R_m^p\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$R_m^p=-\frac{1}{B(p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{(-1)^{r-s}}{m+r}\binom{p-1}{r}\binom{m+r}{s}$$
$$\times\int_0^x\sim\int_0^x\frac{\log x-\psi(1+m+r)-\gamma}{\Gamma(1+m+r)}\Gamma(m+r-s)x^sdx^p \tag{2.1r}$$

証明は困難であるが、$\lim_{m\to\infty}R_m^n=0$ 、従って

$$\begin{aligned}\int_0^x\sim\int_0^x(\log x)^3dx^p=&\frac{\log x-\psi(1+p)-\gamma}{\Gamma(1+p)}x^p(\log x)^2\\&-2x^p\log x\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{-p}{r}\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}\Gamma(r)\\&+x^p\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^r\binom{-p}{r}\binom{r}{s}\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}\Gamma(r-s)\Gamma(s)\end{aligned} \tag{2.1'}$$

となる。但し収束速度は非常に遅い。

$p=3/2$, $m=400$ として任意の1点 $x=0.2$ における両辺の値を計算すると次のようになる。ここまで計算してやっと小数点以下1位まで一致した。(2.1') は計算には適さないが、左辺の超積分をこのように一般表記できているところに意義がある。

```
p = 3 / 2;  m = 400;
fl[x_] := 1/Gamma[p] ∫_0^x (x - t)^(p-1) Log[t]^3 ⅆt
fr[x_] := (Log[x] - PolyGamma[1 + p] - EulerGamma)/Gamma[1 + p] x^p Log[x]^2 -
  2 x^p Log[x] Σ_{r=1}^{m-1} (-1)^r Binomial[-p, r] (Log[x] - PolyGamma[1 + p + r] - EulerGamma)/Gamma[1 + p + r] Gamma[r] +
  x^p Σ_{r=2}^{m-1} Σ_{s=1}^{r-1} (-1)^r Binomial[-p, r] Binomial[r, s] (Log[x] - PolyGamma[1 + p + r] - EulerGamma)/Gamma[1 + p + r]
   × Gamma[r - s] Gamma[s]
N[fl[0.2]]          N[fr[0.2]]
-2.44308            -2.40009
```

21·1·3 $\cos^m x,\ \sin^m x$ の超積分

公式21·1·3

m を自然数、p を正数、$a(s)$ $s\in[0,p]$ を $\cos^{2m+1}x$ または $\sin^{2m+1}x$ の直系超原始関数の零点とするとき、次式が成立する。

$$\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x}\cos^{2m+1}x\,dx^p=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^p}\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{p\pi}{2}\right\} \tag{3.c}$$

$$\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x}\sin^{2m+1}x\,dx^p=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^p}\sin\left\{(2m-2r+1)x-\frac{p\pi}{2}\right\} \tag{3.s}$$

証明

20·2 の 公式20·2·3c(1)および公式20·2·3s(1)の積分演算子のインデックスを自然数区間 $[1,n]$ から 実数区間 $[0,p]$ に解析接続して与式を得る。

Note

例えば $\cos^{2m+1}x$ の場合、$a(s)$ は次の超越方程式の解である。

$$\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^s}\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{s\pi}{2}\right\}=0 \qquad s\in[0,p]$$

この解を求めるのは困難であるが、本公式においてはこれを求める必要はない。

例　$\cos^3 x$ の 1.5 階積分

```
• m:=1: a1:=PI*0/2: a2:=PI*1/2:
1階積分
• f1 := x-> int(cos(t)^(2*m+1),t=a1..x)
```

$$x\to\int_{a1}^{x}\cos(t)^{2\cdot m+1}\,dt$$

1.5階積分

- `p:=3/2:`
- `fh := x-> 1/2^(2*m)*sum(binomial(2*m+1,r)/(2*m-2*r+1)^p *cos((2*m-2*r+1)*x-p*PI/2), r=0..m)`

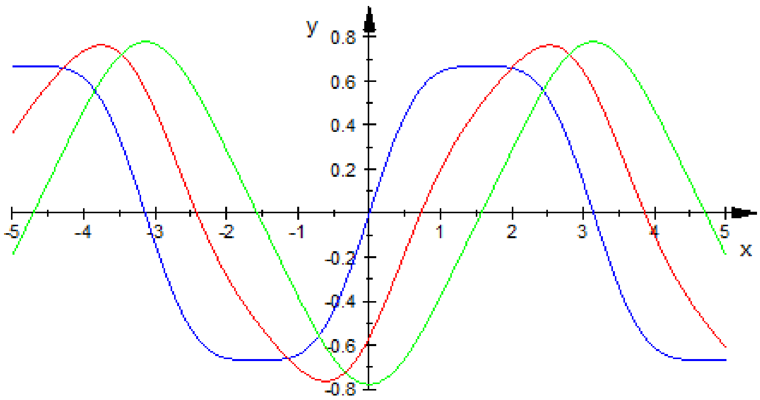
$$x \rightarrow \frac{1}{2^{2 \cdot m}} \cdot \left(\sum_{r=0}^{m} \frac{\binom{2 \cdot m+1}{r}}{(2 \cdot m - 2 \cdot r + 1)^{p}} \cdot \cos\left((2 \cdot m - 2 \cdot r + 1) \cdot x - \frac{\pi \cdot p}{2} \right) \right)$$

2階積分

- `f2 := x-> int(int(cos(t)^(2*m+1) ,t=a1..u),u=a2..x)`

$$x \rightarrow \int_{a2}^{x} \int_{a1}^{u} \cos(t)^{2 \cdot m+1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u$$

青:1階、赤:1.5階 、緑:2階



21･2　多関数の積の超微分

(1) 一般二項定理と超微分に関するライプニッツ則

3･2 の一般二項定理によれば、$|x_1|>|x_2|$ なる実数 x_1, x_2 と任意の実数 p について

$$(x_1+x_2)^p = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r} x_1^{p-r}x_2^r$$

一方、19･1 の超微分に関するライプニッツ則によれば、x の関数 f_1, f_2 と正数 p について

$$(f_1 f_2)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r} f_1^{(p-r)}f_2^{(r)} + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\left(f_1^{<m+k>}f_2^{(m+k)}\right)^{(p)}$$

であった。

(2) 一般多項定理と関数の多積の超微分

3･4 の一般多項定理によれば、$|x_1|>|x_2+x_3+\cdots+x_\lambda|$ なる実数 $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$ と任意の実数 p について

$$(x_1+x_2+\cdots+x_\lambda)^p = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} x_1^{p-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_\lambda^{r_{\lambda-1}}$$

であったから

多関数の積の高階微分は、x の関数 $f_1, f_2, \cdots, f_\lambda$ と正数 p について

$$(f_1 f_2\cdots f_\lambda)^{(p)} = \sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_1^{(p-r_1)}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})} + R_m^p$$

となるに相違ない。

21･2･1　多関数の積の超微分

定理21･2･1

p, r を正数、m を自然数、関数 $f_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$ 、$f_k(x)$ の任意の r 階原始関数を $f_k^{<r>}$ 、$B(p,m)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して $f_1^{<r>}(a)=0$　$r\in[0,m-p]$ であるか、もしくは、少なくとも1つの $k>1$ について $f_k^{(s)}(a)=0$　$s\in[0,m-p-1]$ であるならば、次式が成立する。

$$(f_1 f_2\cdots f_\lambda)^{(p)} = \sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_1^{(p-r_1)}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})} + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{-p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\left\{f_1^{\langle m+k_1\rangle}f_2^{(m+k_1-k_2)}f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})}\right\}^{(p)}$$

証明

前節の 定理21･1･1 において積分演算子のインデックス p の符号を反転すると

$$\int_a^x \!\sim\! \int_a^x f_1 f_2 \cdots f_\lambda dx^{-p} = \sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_1^{\langle -p+r_1\rangle} f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})} + R_m^{-p}$$

$$R_m^{-p} = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{-p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$

$$\times \int_a^x \!\sim\! \int_a^x f_1^{\langle m+k_1\rangle} f_2^{(m+k_1-k_2)} f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})} dx^{-p}$$

となる。そこで負の積分演算子 $<-p>$ を正の微分演算子 (p) に置換して与式を得る。

3関数の積の計算例

例1 $x^\alpha e^x \sin x$ の超微分

定理21･2･1において $f_1 = x^\alpha$, $f_2 = e^x$, $f_3 = \sin x$ と置けば

$$\left(x^\alpha\right)^{(p-r)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r} \quad , \quad \left(x^\alpha\right)^{<m+r>} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}$$

$$\left(e^x\right)^{(r-s)} = \left(e^x\right)^{(m+r-s)} = e^x \quad , \quad (\sin x)^{(s)} = \sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\left(x^\alpha e^x \sin x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{p}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right) + R_m^p \tag{1.1}$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{1}{m+r}\binom{-p-1}{r}\binom{m+r}{s} \times \left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)\right\}^{(p)} \tag{1.1r}$$

となる。

(1.1) により $x^{3/2}e^x\sin x$ の $1/2$ 階微分を計算して任意の1点 x=1.4 における両辺の値を求めると次のとおりである。

```
a = 3/2; p = 1/2; m = 10;
```

$$\texttt{fl[x\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[1 - p]}}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{1-p-1}\,\partial_t\left(t^a e^t \texttt{Sin[t]}\right) dt$$

$$\texttt{fr[x\_] :=} \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\texttt{Binomial[p, r] Binomial[r, s]}\frac{\texttt{Gamma[1 + a]}}{\texttt{Gamma[1 + a - p + r]}}x^{a-p+r}e^x\,\texttt{Sin}\left[x+\frac{s\pi}{2}\right]$$

```
N[fl[1.4]]                  N[fr[1.4]]
10.327  - 0.0369064  i      10.327
```

例2 $x^{\alpha}e^{x}\log x$ の超微分

定理21･2･1において $f_1=x^{\alpha}$, $f_2=e^{x}$, $f_3=\log x$ と置けば

$$(x^{\alpha})^{(p-r)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r} \quad , \quad (x^{\alpha})^{<m+r>}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}$$

$$(e^{x})^{(r-s)}=e^{x} \quad , \quad (e^{x})^{(m+r-s)}=e^{x}$$

$$(\log x)^{(0)}=\log x \quad (s=0) \quad , \quad (\log x)^{(s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,x^{-s} \quad (s\neq 0)$$

であるから、$f_3^{(0)}$ を含む項を分離してこれらを代入すると

$$\left(x^{\alpha}e^{x}\log x\right)^{(p)}=e^{x}\log x\sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r}$$
$$-e^{x}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s}\binom{p}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha-p+r)}x^{\alpha-p+r-s}+R_m^p \qquad (1.2)$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{m+r}\binom{-p-1}{r}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^{x}\log x\right\}^{(p)}$$
$$-\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m+r}\frac{(-1)^s}{m+r}\binom{-p-1}{r}\binom{m+r}{s}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r-s}e^{x}\right\}^{(p)}$$
(1.2r)

(1.2) の右辺の級数は漸近展開のようである。$x^{3/2}e^{x}\log x$ の1/2階微分を計算してかなり大きな1点 x=16 における両辺の値を求めると次のようになる。

```
a = 3 / 2;  p = 1 / 2;  m = 50;
fl[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_{-∞}^{x} (x - t)^(1-p-1) ∂_t (t^a e^t Log[t]) dt
fr[x_] := e^x Log[x] Σ_{r=0}^{m-1} Binomial[p, r] Gamma[1 + a]/Gamma[1 + a - p + r] x^(a-p+r) -
    e^x Σ_{r=1}^{m-1} Σ_{s=1}^{r} (-1)^s Binomial[p, r] Binomial[r, s] Gamma[1 + a] Gamma[s]/Gamma[1 + a - p + r] x^(a-p+r-s)
N[fl[16]]                          N[fr[16]]
1.66734 ×10^9 - 0.0658101 i        1.66734 ×10^9
```

21･2･2 関数の累乗の超微分

定理21･2･1において特に $f_1=f_2=\cdots=f_{\lambda}$ とすれば、直ちに次の定理が従う。

定理21･2･2

p , r を正数、m を自然数、関数 $f(x)$ の r 階導関数を $f^{(r)}$ 、$f(x)$ の任意の r 階原始関数を $f^{<r>}$ 、$B(p,m)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$$f^{<r>}(a)=0 \quad r\in[0,m-p] \quad or \quad f^{(s)}(a)=0 \quad s\in[0,m-p-1]$$

であるならば、2以上の自然数 λ について次式が成立する。

$$\left(f^{\lambda}\right)^{(p)}=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f^{\langle p+r_1\rangle}f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{m+k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \cdots \sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}} \frac{1}{m+k_1} \binom{-p-1}{k_1} \binom{m+k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \cdots \binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times \left\{ f^{\langle m+k_1 \rangle} f^{(m+k_1-k_2)} f^{(k_2-k_3)} \cdots f^{(k_{\lambda-1})} \right\}^{(p)}$$

例 $\boldsymbol{\log^3 x}$ の超微分

定理21･2･2 において $f = \log x$ と置けば

$$(\log x)^{(p-r)} = \frac{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma}{\Gamma(1-p+r)} x^{-p+r}, \quad (\log x)^{\langle m+r \rangle} = \frac{\log x - \psi(1+m+r) - \gamma}{\Gamma(1+m+r)} x^{m+r}$$

$$(\log x)^{(r-s)} = \log x \quad (r=s) \quad , \quad (\log x)^{(r-s)} = (-1)^{r-s-1}(r-s-1)!\, x^{-r+s} \quad (r \neq s)$$
$$(\log x)^{(0)} = \log x \quad (s=0) \quad , \quad (\log x)^{(s)} = (-1)^{s-1}(s-1)!\, x^{-s} \quad (r \neq 0)$$

であるから、$f^{(0)}$ を含む項を分離してこれらを代入すると

$$\begin{aligned} \left\{ (\log x)^3 \right\}^{(p)} =& \frac{\log x - \psi(1-p) - \gamma}{\Gamma(1-p)} x^{-p} (\log x)^2 \\ & - 2x^{-p} \log x \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \binom{p}{r} \frac{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma}{\Gamma(1-p+r)} \Gamma(r) \\ & + x^{-p} \sum_{r=2}^{m-1} \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^r \binom{p}{r} \binom{r}{s} \frac{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma}{\Gamma(1-p+r)} \Gamma(r-s) \Gamma(s) \\ & + R_m^p \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} R_m^p =& -\frac{1}{B(-p,m)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2}{(m+r)^2} \binom{-p-1}{r} \left\{ \left\{ \log x - \psi(1+m+r) - \gamma \right\} \log x \right\}^{(p)} \\ & + \frac{1}{B(-p,m)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{m+r-1} \frac{(-1)^r}{m+r} \binom{-p-1}{r} \binom{m+r}{s} \\ & \times \left\{ \frac{\log x - \psi(1+m+r) - \gamma}{\Gamma(1+m+r)} \Gamma(m+r-s) \Gamma(s) \right\}^{(p)} \end{aligned} \tag{2.1r}$$

証明は困難であるが、$\lim_{m \to \infty} R_m^n = 0$ 、従って

$$\begin{aligned} \left\{ (\log x)^3 \right\}^{(p)} =& \frac{\log x - \psi(1-p) - \gamma}{\Gamma(1-p)} x^{-p} (\log x)^2 \\ & - 2x^{-p} \log x \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{p}{r} \frac{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma}{\Gamma(1-p+r)} \Gamma(r) \\ & + x^{-p} \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^r \binom{p}{r} \binom{r}{s} \frac{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma}{\Gamma(1-p+r)} \Gamma(r-s) \Gamma(s) \end{aligned} \tag{2.1'}$$

となる。但し収束速度は非常に遅い。

$p=1/2$, $m=120$ として任意の1点 $x=4$ における両辺の値を計算すると次のようになる。ここまで計算してやっと小数点以下1位まで一致した。(2.1') は計算には適さないが、左辺の超微分をこのように一般表記できているところに意義がある。

```
p = 1 / 2;
```

Riemann-Liouville differintegral

```
f[x_] := 1/Gamma[1 - p] ∫_0^x (x - t)^(1-p-1) Log[t]^3 dt    f1 = Limit[(f[4 + h] - f[4])/h, h → 0];
```

Series

```
m = 120;
fr[x_] := (Log[x] - PolyGamma[1 - p] - EulerGamma)/Gamma[1 - p] x^-p Log[x]^2 -
  2 x^-p Log[x] Sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r Binomial[p, r] (Log[x] - PolyGamma[1 - p + r] - EulerGamma)/Gamma[1 - p + r] Gamma[r] +
  x^-p Sum_{r=2}^{m-1} Sum_{s=1}^{r-1} (-1)^r Binomial[p, r] Binomial[r, s] (Log[x] - PolyGamma[1 - p + r] - EulerGamma)/Gamma[1 - p + r]
    × Gamma[r - s] Gamma[s]
```

```
N[f1]        N[fr[4]]
2.36224      2.30139
```

21·2·3　$\cos^m x$, $\sin^m x$ の超微分

公式21·2·3

m を自然数、p を正数、$\downarrow$ を床関数とするとき、次式が成立する。

$$\left(\cos^m x\right)^{(p)} = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{r=0}^{m/2\downarrow} {}_mC_r\,(m-2r)^p \cos\left\{(m-2r)x + \frac{p\pi}{2}\right\} \tag{3.c}$$

$$\left(\sin^m x\right)^{(p)} = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{r=0}^{m/2\downarrow} {}_mC_r\,(m-2r)^p \cos\left\{(m-2r)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{p\pi}{2}\right\} \tag{3.s}$$

証明

20·1 の 公式20·1·3 において、微分演算子のインデックスを自然数 n から実数 p に解析接続して与式を得る。

例　$\cos^4 x$ の 2.5階微分

- `m:=4:`

2階微分

- `f2 := x-> diff(cos(x)^m ,x,x)`

$$x \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(x)^m$$

2.5階微分

- `p:=2.5:`
- `fh := x-> 1/2^(m-1)*sum(binomial(m,r)*(m-2*r)^p *cos((m-2*r)*x+p*PI/2), r=0..floor(m/2))`

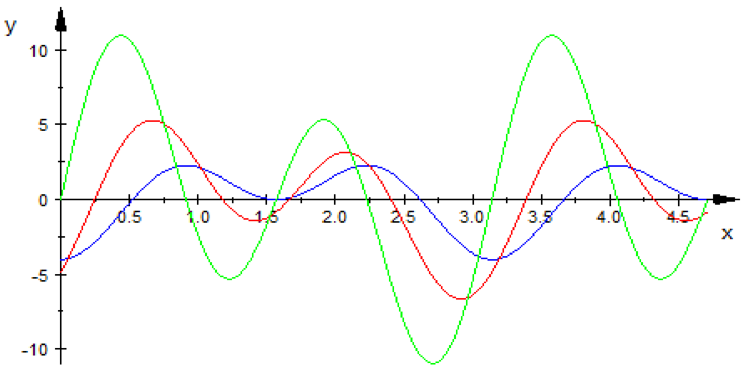
$$x \to \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \binom{m}{r} \cdot (m-2\cdot r)^p \cdot \cos\left((m-2\cdot r)\cdot x + \frac{\pi \cdot p}{2}\right)\right)$$

3階微分

- `f3 := x-> diff(cos(x)^m ,x,x,x)`

$$x \to \frac{\partial^3}{\partial x^3}\cos(x)^m$$

青:1階、赤:2階、緑:3階



$\cos^m x$, $\sin^m x$ の傍系超微分

高階微分の場合と異なり、超微分の場合には直系超微分と傍系超微分とが存在する。超微分の直系・傍系については 12･1･4 で述べたところであるが、今一度述べる。

例えば、$\cos^3 x$ の超微分を 定理21･2･2 により

$$\left(\cos^3 x\right)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{p}{r}\binom{r}{s}\cos\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}\cos\left\{x+\frac{(r-s)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$+R_m^p \qquad (4.c')$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{1}{m+r}\binom{-p-1}{r}\binom{m+r}{s}$$

$$\times\left\{\cos\left\{x-\frac{(m+r)\pi}{2}\right\}\cos\left\{x+\frac{(m+r-s)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)\right\}^{(p)} \qquad (4.cr')$$

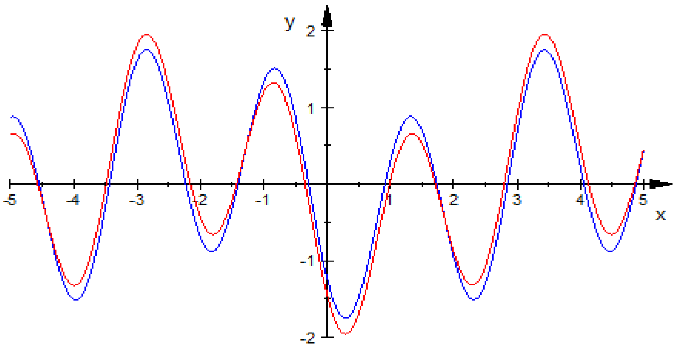
と計算すればこれは傍系超微分となる。

何故ならば、定理21･2･1の証明過程を振り返れば明らかなように、この定理は多関数の積の超積分の逆演算として得られたものであり、元になった超積分は固定下限を前提にしている。然るに $\cos^3 x$ の直系超積分は可変下限である。よって固定下限を元に導出された(4.c'), (4.cr') は直系超微分ではあり得ない。これらは等式としては成立しているものの (4.c') の級数は余り良い性質を持たない。ちなみにこれを 公式21･2･3 から得られる直系超導関数

$$\left(\cos^3 x\right)^{(p)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) + \frac{3^p}{4}\cos\left(3x+\frac{p\pi}{2}\right) \qquad (4.c)$$

と比べると次のようになる。$p=3/2$ の場合 (4.c') は $m=3$ のとき (4.c) に最も良くフィットするが、なお両者にはかなりの差が見られる。

青:傍系超微分、赤:直系超微分



しかし$p=m-1$, $m=1,2,3,\cdots$ のときは $1/B(-p,m)=0$ であるから $R_m^p=0$。 従って

$$\left(\cos^3 x\right)^{(m-1)}=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{m-1}{r}\binom{r}{s}\cos\left\{x+\frac{(m-1-r)\pi}{2}\right\}\cos\left\{x+\frac{(r-s)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

となり、さらに$m-1$をn に置換すれば

$$\left(\cos^3 x\right)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{s}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}\cos\left\{x+\frac{(r-s)\pi}{2}\right\}\cos\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

となる。そしてこれは次の直系高階導関数に帰着する。(証明は長いので省略。)

$$\left(\cos^3 x\right)^{(n)}=\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

2010.12.25

K. Kono

宇宙人の数学