22　合成関数の高階微分

22･1　合成関数の高階微分の公式

22･1･1　*Faà di Bruno* の公式

合成関数の高階微分の公式は150年ぐらい前イタリアの数学者 *Faà di Bruno* によるものが最初らしく、*Faà di Bruno's formula* と呼ばれている。

公式22･1･1（*Faà di Bruno*）

$j_1, j_2, \cdots, j_n$ を非負の整数とし、導関数 $g^{(n)}$, f_n 及び Bell 多項式 $B_{n,r}(f_1, f_2, \dots)$ を

$$g_n = g^{(n)}(f)\,,\quad f_n = f^{(n)}(x)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum \frac{n!}{j_1!\ j_2! \cdots j_n!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{f_2}{2!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{f_n}{n!}\right)^{j_n}$$

$$\left(j_1 + j_2 + \cdots + j_n = r\quad \&\quad j_1 + 2j_2 + \cdots + nj_n = n\right)$$

とするとき、合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する高階導関数は次式で示される。

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} g_r B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n) \tag{1.1}$$

例　$\{g\{f(x)\}\}^{(4)}$

先ず $j_1+j_2+j_3+j_4 = 1$　,　$j_1+2j_2+3j_3+4j_4 = 4$ なる (j_1, j_2, j_3, j_4) は

$$(j_1, j_2, j_3, j_4) = (0, 0, 0, 1)$$

であるから

$$B_{4,1}(f_1 \cdots f_4) = \frac{4!}{0!\,0!\,0!\,1!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^0\left(\frac{f_2}{2!}\right)^0\left(\frac{f_3}{3!}\right)^0\left(\frac{f_4}{4!}\right)^1 = f_4^1$$

次に $j_1+j_2+j_3+j_4 = 2$　,　$j_1+2j_2+3j_3+4j_4 = 4$ は

$$(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 0, 1, 0)$$

$$(j_1, j_2, j_3, j_4) = (0, 2, 0, 0)$$

であるから

$$B_{4,2}(f_1 \cdots f_4) = \frac{4!}{1!0!1!0!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^1\left(\frac{f_2}{2!}\right)^0\left(\frac{f_3}{3!}\right)^1\left(\frac{f_4}{4!}\right)^0$$

$$+\frac{4!}{0!2!0!0!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^0\left(\frac{f_2}{2!}\right)^2\left(\frac{f_3}{3!}\right)^0\left(\frac{f_4}{4!}\right)^0$$

$$= 4f_1^1 f_3^1 + 3f_2^2$$

次に $j_1+j_2+j_3+j_4 = 3$　,　$j_1+2j_2+3j_3+4j_4 = 4$ は

$(j_1, j_2, j_3, j_4) = (2, 1, 0, 0)$ であるから

$$B_{4,3}(f_1 \cdots f_4) = \frac{4!}{2!\,1!\,0!\,0!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^2\left(\frac{f_2}{2!}\right)^1\left(\frac{f_3}{3!}\right)^0\left(\frac{f_4}{4!}\right)^0 = 6f_1^2 f_2^1$$

最後に $j_1+j_2+j_3+j_4=4$, $j_1+2j_2+3j_3+4j_4=4$ は

$(j_1, j_2, j_3, j_4)=(4,0,0,0)$ であるから

$$B_{4,4}(f_1\cdots f_4)=\frac{4!}{4!\,0!\,0!\,0!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^4\left(\frac{f_2}{2!}\right)^0\left(\frac{f_3}{3!}\right)^0\left(\frac{f_4}{4!}\right)^0=f_1^4$$

かくして

$$\begin{aligned}\{g\{f(x)\}\}^{(4)}=\ & g_1B_{4,1}(f_1,f_2,f_3,f_4)+g_2B_{4,2}(f_1,f_2,f_3,f_4)\\ &+g_3B_{4,3}(f_1,f_2,f_3,f_4)+g_4B_{4,4}(f_1,f_2,f_3,f_4)\\ =\ & g_1f_4^1+g_2\left(4f_1^1f_3^1+3f_2^2\right)+6g_3f_1^2f_2^1+g_4f_1^4\end{aligned}$$

この例でも分るように、

$$j_1+j_2+\cdots+j_n=k \quad , \quad j_1+2j_2+3j_3+\cdots+nj_n=n \quad , \quad j_k\geqq 0 \quad k=1,2,\cdots,n$$

なる $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ を求めることは不定方程式

$$1j_2+2j_3+\cdots+(n-1)j_n=n-k \quad , \quad j_k\geqq 0 \quad k=2,3,\cdots,n$$

を解くことと同義であり、容易なことではない。

公式22・1・1では $j_k\geqq 0$ $k=1,2,\cdots,n$ としたが、これを $j_k>0$ $k=1,2,\cdots$ とすれば公式22・1・1は次のように表すことも出来る。

公式22・1・1'

$\alpha,\beta,\cdots,\varepsilon$ 及び n を自然数とし、関数 g_n , f_n をそれぞれ $g_n=g^{(n)}(f)$, $f_n=f^{(n)}(x)$ とするとき、合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する高階導関数は次式で示される。

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)}=\sum g_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon}\frac{n!\,f_p{}^{\alpha}f_q{}^{\beta}\cdots f_t{}^{\varepsilon}}{p!^{\alpha}q!^{\beta}\cdots t!^{\varepsilon}\alpha!\beta!\cdots\varepsilon!} \qquad p\alpha+q\beta+\cdots+t\varepsilon=n \tag{1.1'}$$

公式22・1・1'の計算アルゴリズム

合成関数の公式をこのように表せば、(1.1')はより簡単なアルゴリズムで求めることができる。筆者考案のこのアルゴリズムはプログラム向きであるが、簡単なので筆算でも可能である。

(1) $p\alpha+q\beta+\cdots+t\varepsilon=n$ なる全ての積 $f_p{}^{\alpha}f_q{}^{\beta}\cdots f_t{}^{\varepsilon}$ を次の手順で求める。

Step1　第1行第1列に n 、第2列 から 第 n 列まで 0 を並べる。

Step2　第2列から順に、第1列の数より2以上小さい最初の数を探し、

Ⅰ 第 k 列にそのような数があったき、次のような新数列(新しい行)を作る。

ⅰ　第2列 から 第 k 列まで、旧数列(上の行)の第 k 列の数より1大きい数を並べる

ⅱ　第 $k+1$ 列 から 第 n 列までは、旧数列(直ぐ上の行)の数をそのまま移記する。

ⅲ　第1列には、各列の合計が n となるような補数を埋める。

Ⅱ そのような数がなかったとき、計算を終わり、Step4へ行く。

Step3　新数列(新しい行)について、Step2 を繰り返す。

Step4　各数列(各行)の数を階数 p とし重複度を次数 α として積 $f_p{}^{\alpha}f_q{}^{\beta}\cdots f_t{}^{\varepsilon}$ を生成する。

例えば7階の組合せは次のように生成する。

列	1	2	3	4	5	6	7		
	7	0	0	0	0	0	0	f_7^1	（赤字は第1列より2以上小さい数。）
	6	1	0	0	0	0	0	$f_6^1 f_1^1$	（青字は補数。）
	5	2	0	0	0	0	0	$f_5^1 f_2^1$	
	4	3	0	0	0	0	0	$f_4^1 f_3^1$	
	5	1	1	0	0	0	0	$f_5^1 f_1^2$	
	4	2	1	0	0	0	0	$f_4^1 f_2^1 f_1^1$	
	3	3	1	0	0	0	0	$f_3^2 f_1^1$	
	3	2	2	0	0	0	0	$f_3^1 f_2^2$	
	4	1	1	1	0	0	0	$f_4^1 f_1^3$	
	3	2	1	1	0	0	0	$f_3^1 f_2^1 f_1^2$	
	2	2	2	1	0	0	0	$f_2^3 f_1^1$	
	3	1	1	1	1	0	0	$f_3^1 f_1^4$	
	2	2	1	1	1	0	0	$f_2^2 f_1^3$	
	2	1	1	1	1	1	0	$f_2^1 f_1^5$	
	1	1	1	1	1	1	1	f_1^7	

(2) 各項 $f_p^{\alpha} f_q^{\beta} \cdots f_t^{\varepsilon}$ の係数は、例えば次のように計算する。

$f_3^1 f_2^1 f_1^2$ の係数: $\dfrac{7\,!}{3!^{\,1}2!^{\,1}1!^{\,2}1!\,1!\,2!} = 210$ ， $f_2^3 f_1^1$ の係数: $\dfrac{7\,!}{2!^{\,3}1!^{\,1}3!\,1!} = 105$

(3) 各項 $f_p^{\alpha} f_q^{\beta} \cdots f_t^{\varepsilon}$ に乗ぜられる $g^{(s)}$ は、例えば次のように求める。

$f_3^1 f_2^1 f_1^2$ ならば $g_s = g_{1+1+2} = g_4$

(4) よって例えば $z = g\{f(x)\}$ の7階微分 z_7 は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
z_7 = {} & \frac{7!\, f_7^1}{7!^{\,1}1!} g_1 + 7! \left(\frac{f_6^1 f_1^1}{6!^{\,1}1!^{\,1}1!\,1!} + \frac{f_5^1 f_2^1}{5!^{\,1}2!^{\,1}1!\,1!} + \frac{f_4^1 f_3^1}{4!^{\,1}3!^{\,1}1!\,1!} \right) g_2 \\
& + 7! \left(\frac{f_5^1 f_1^2}{5!^{\,1}1!^{\,2}1!\,2!} + \frac{f_4^1 f_2^1 f_1^1}{4!^{\,1}2!^{\,1}1!^{\,1}1!\,1!\,1!} + \frac{f_3^2 f_1^1}{3!^{\,2}1!^{\,1}\,2!\,1!} + \frac{f_3^1 f_2^2}{3!^{\,1}2!^{\,2}1!\,2!} \right) g_3 \\
& + 7! \left(\frac{f_4^1 f_1^3}{4!^{\,1}1!^{\,1}1!\,3!} + \frac{f_3^1 f_2^1 f_1^2}{3!^{\,1}2!^{\,1}1!^{\,2}1!\,1!\,2!} + \frac{f_2^3 f_1^1}{2!^{\,3}1!^{\,1}3!\,1!} \right) g_4
\end{aligned}
$$

$$+\,7!\left(\frac{f_3^{1}f_1^{4}}{3!^{1}1!^{1}1!\,4!}+\frac{f_2^{2}f_1^{3}}{2!^{2}1!^{3}2!\,3!}\right)g_5$$

$$+\,\frac{7!\ f_2^{1}f_1^{5}}{2!^{1}1!^{5}1!\,5!}g_6+\frac{7!\ f_1^{7}}{1!^{1}7!}g_7$$

$$=g_1f_7+g_2\left(7f_6f_1+21f_5f_2+35f_4f_3\right)$$

$$+g_3\left(21f_5f_1^{2}+105f_4f_2f_1+70f_3^{2}f_1+105f_3f_2^{2}\right)$$

$$+g_4\left(35f_4f_1^{3}+210f_3f_2f_1^{2}+105f_2^{3}f_1\right)$$

$$+g_5\left(35f_3f_1^{4}+105f_2^{2}f_1^{3}\right)+21g^{(6)}f_2f_1^{5}+g^{(7)}f_1^{7}$$

8階までの高階微分

このような方法で合成関数 $z=g\{f(x)\}$ の8階までの高階微分 z_n を計算すると次のようになる。

$$z_1=g^{(1)}f_1$$

$$z_2=g^{(1)}f_2+g^{(2)}f_1^{2}$$

$$z_3=g^{(1)}f_3+3g^{(2)}f_2f_1+g^{(3)}f_1^{3}$$

$$z_4=g^{(1)}f_4+g^{(2)}\left(4f_3f_1+3f_2^{2}\right)+6g^{(3)}f_2f_1^{2}+g^{(4)}f_1^{4}$$

$$z_5=g^{(1)}f_5+g^{(2)}\left(5f_4f_1+10f_3f_2\right)+g^{(3)}\left(10f_3f_1^{2}+15f_2^{2}f_1\right)+10g^{(4)}f_2f_1^{3}+g^{(5)}f_1^{5}$$

$$z_6=g^{(1)}f_6+g^{(2)}\left(6f_5f_1+15f_4f_2+10f_3^{2}\right)+g^{(3)}\left(15f_4f_1^{2}+60f_3f_2f_1+15f_2^{3}\right)$$

$$+g^{(4)}\left(20f_3f_1^{3}+45f_2^{2}f_1^{2}\right)+15g^{(5)}f_2f_1^{4}+g^{(6)}f_1^{6}$$

$$z_7=g^{(1)}f_7+g^{(2)}\left(7f_6f_1+21f_5f_2+35f_4f_3\right)$$

$$+g^{(3)}\left(21f_5f_1^{2}+105f_4f_2f_1+70f_3^{2}f_1+105f_3f_2^{2}\right)$$

$$+g^{(4)}\left(35f_4f_1^{3}+210f_3f_2f_1^{2}+105f_2^{3}f_1\right)$$

$$+g^{(5)}\left(35f_3f_1^{4}+105f_2^{2}f_1^{3}\right)+21g^{(6)}f_2f_1^{5}+g^{(7)}f_1^{7}$$

$$z_8=g^{(1)}f_8+g^{(2)}\left(8f_7f_1+28f_6f_2+56f_5f_3+35f_4^{2}\right)$$

$$+g^{(3)}\left(28f_6f_1^{2}+168f_5f_2f_1+280f_4f_3f_1+210f_4f_2^{2}+280f_3^{2}f_2\right)$$

$$+g^{(4)}\left(56f_5f_1^{3}+420f_4f_2f_1^{2}+280f_3^{2}f_1^{2}+840f_3f_2^{2}f_1+105f_2^{4}\right)$$

$$+g^{(5)}\left(70f_4f_1^{4}+560f_3f_2f_1^{3}+420f_2^{3}f_1^{2}\right)$$

$$+g^{(6)}\left(56f_3f_1^{5}+210f_2^{2}f_1^{4}\right)+28g^{(7)}f_2f_1^{6}+g^{(8)}f_1^{8}$$

例　$\boldsymbol{z=g\{f(x)\}=\sin(x^{3})}$ とすれば

$g^{(1)}=\cos f$　,　$g^{(2)}=-\sin f$　,　$g^{(3)}=-\cos f$

$f_1=3x^{2}$　,　$f_2=6x$　,　$f_3=6$

であるから

$$z_1 = cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2$$

$$z_2 = cos\left(x^3\right)\cdot 6x - sin\left(x^3\right)\cdot\left(3x^2\right)^2$$

$$z_3 = cos\left(x^3\right)\cdot 6 - 3sin\left(x^3\right)\cdot 3x^2\cdot 6x - cos\left(x^3\right)\cdot\left(3x^2\right)^3$$

22･1･2　*Hoppe* の公式

その後公式22･1･1が $g^{(r)}(f)$ と $f^{(s)}(x)$ の二重級数で表されることが発見された。その完成型が次に述べる *Hoppe* の公式である。

公式22･1･2 (Reinhold Hoppe)

n を自然数とし、導関数 $g^{(n)}$, f_n をそれぞれ　$g^{(n)}= g^{(n)}(f)$　,　$f_n = f^{(n)}(x)$ とするとき、合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する高階導関数は次式で示される（「岩波数学公式Ｉ」p9）。

$$\{g(f(x))\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\frac{g^{(r)}}{r!}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(-f)^{r-s}\left(f^s\right)^{(n)} \tag{1.2}$$

この公式は美しいが計算は簡単ではない。実際に(1.2)で微分してみると次のとおり。

$$\begin{aligned}\{g(f(x))\}^{(2)} &= \sum_{r=0}^{2}\frac{g^{(r)}}{r!}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(-f)^{r-s}\left(f^s\right)^{(2)}\\
&= \frac{g^{(0)}}{0!}\binom{0}{0}(-f)^0\left(f^0\right)^{(2)} + \frac{g^{(1)}}{1!}\sum_{s=0}^{1}\binom{1}{s}(-f)^{1-s}\left(f^s\right)^{(2)}\\
&\qquad + \frac{g^{(2)}}{2!}\sum_{s=0}^{2}\binom{2}{s}(-f)^{2-s}\left(f^s\right)^{(2)}\\
&= \frac{g^{(1)}}{1!}\left\{\binom{1}{0}(-f)^1\left(f^0\right)^{(2)} + \binom{1}{1}(-f)^0\left(f^1\right)^{(2)}\right\}\\
&\quad + \frac{g^{(2)}}{2!}\left\{\binom{2}{0}(-f)^2\left(f^0\right)^{(2)} + \binom{2}{1}(-f)^1\left(f^1\right)^{(2)} + \binom{2}{2}(-f)^0\left(f^2\right)^{(2)}\right\}\\
&= \frac{g^{(1)}}{1!}\binom{1}{1}f_2^1 + \frac{g^{(2)}}{2!}\left\{\binom{2}{1}(-f)^1 f_2^1 + \binom{2}{2}2\left(f_1f_1 + ff_2\right)\right\}\\
&= \frac{g^{(1)}f_2^1}{1!} + \frac{g^{(2)}}{2!}\left\{-2ff_2 + 2\left(f_1f_1 + ff_2\right)\right\} = g^{(1)}f_2 + g^{(2)}f_1^2\end{aligned}$$

22･1･3　*Mathematica* を用いた高階微分

数式処理ソフト *Mathematica* には2010年から $BellY[n,r,\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-r+1}\}]$ なる関数が実装されている。これを用いればベル多項式 $B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ を容易に生成することができる。　例えば $B_{8,3}(f_1, f_2, \ldots, f_8)$ は

```
BellY[8, 3, {f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8}]
```

$$280\, f_2\, f_3^2 + 210\, f_2^2\, f_4 + 280\, f_1\, f_3\, f_4 + 168\, f_1\, f_2\, f_5 + 28\, f_1^2\, f_6$$

更に、このテーブル $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n\text{-}r+1}\}$ を関数に変えれば、公式22･1･1 そのものを生成することができる。例えば

```
Tblf[n_] := Table[f_k, {k, 1, n}]
z[n_] := Σ_{r=1}^{n} g_r BellY[n, r, Tblf[n]]
```

とすれば、上記 z_8 は次のように簡単に生成できる。

```
z[8]
```

$$
\begin{aligned}
&f_8\, g_1 + (35\, f_4^2 + 56\, f_3\, f_5 + 28\, f_2\, f_6 + 8\, f_1\, f_7)\, g_2 \\
&\quad + (280\, f_2\, f_3^2 + 210\, f_2^2\, f_4 + 280\, f_1\, f_3\, f_4 + 168\, f_1\, f_2\, f_5 + 28\, f_1^2\, f_6)\, g_3 \\
&\quad + (105\, f_2^4 + 840\, f_1\, f_2^2\, f_3 + 280\, f_1^2\, f_3^2 + 420\, f_1^2\, f_2\, f_4 + 56\, f_1^3\, f_5)\, g_4 \\
&\quad + (420\, f_1^2\, f_2^3 + 560\, f_1^3\, f_2\, f_3 + 70\, f_1^4\, f_4)\, g_5 \\
&\quad + (210\, f_1^4\, f_2^2 + 56\, f_1^5\, f_3)\, g_6 + 28\, f_1^6\, f_2\, g_7 + f_1^8\, g_8
\end{aligned}
$$

勿論、g_r や f_k に具体的な関数を指定すれば、所望の高階導関数が得られる。その具体例は次章以下で示される。

22･1･4 入れ子関数が1次関数の場合の高階微分

一般の合成関数の高階微分はかくもややこしいが、入れ子関数 $f(x)$ が1次関数のときは著しく簡単になる。

公式22･1･4

導関数 $g^{(n)}$, f_n を $g^{(n)} = g^{(n)}(f)$, $f_n = f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とするとき、$f(x)$ が1次関数ならば 合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する高階導関数は次式で示される。

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)} = g^{(n)} f_1^n \tag{1.4}$$

証明

公式22･1･1において、$f(x)$ が1次関数のときは $f_2 = f_3 = f_4 = \cdots = 0$ であるから、Bell 多項式 $B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots)$ は

$$B_{n,r}(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \sum \frac{n!}{j_1!\ j_2! \cdots j_n!} \left(\frac{f_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{f_2}{2!}\right)^{j_2} \cdots \left(\frac{f_n}{n!}\right)^{j_n} = 0$$

$$(j_1 + j_2 + \cdots + j_n = r < n \quad \& \quad j_1 + 2j_2 + \cdots + nj_n = n)$$

$$B_{n,n}(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \sum \frac{n!}{n!\, 0! \ldots 0!} \left(\frac{f_1}{1!}\right)^{n} \left(\frac{f_2}{2!}\right)^{0} \cdots \left(\frac{f_n}{n!}\right)^{0} = f_1^n$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
\{g\{f(x)\}\}^{(n)} &= \sum_{r=1}^{n} g^{(r)} B_{n,r}(f_1, f_2, \cdots, f_n) \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} g^{(r)} B_{n,r}(f_1, f_2, \cdots, f_n) + g^{(n)} B_{n,n}(f_1, f_2, \cdots, f_n)
\end{aligned}
$$

$$= g^{(n)} f_1^{\,n}$$

例　$\boldsymbol{z = sin(ax+b)}$ とすれば

$$z_1 = \ cos(ax+b)\cdot a^1 = a^1 sin\left(ax+b+\frac{1\pi}{2}\right)$$

$$z_2 = -sin(ax+b)\cdot a^2 = a^2 sin\left(ax+b+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$z_n = \qquad a^n sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

と書くことができる。最後の式は 9･2 の 公式9･2･4 の高階微分の線形式に一致する。

22･2 いくつかの合成関数の高階微分

合成関数は初等関数に限っても非常に多くの組合せがありこれらを一々計算する訳にはいかない。そこで本節では簡単で面白そうなもののみをピックアップして計算例示する。

22･2･1 $e^{\pm f(x)}$ の高階微分

公式22･1･1 において $g=e^{\pm f(x)}$ と置けば、直ちに次式が得られる。

$$\left\{e^{f(z)}\right\}^{(n)}=e^{f(z)}\sum_{r=1}^{n}B_{n,r}(f_1,f_2,\cdots,f_n) \tag{2.1$_+$}$$

$$\left\{e^{-f(z)}\right\}^{(n)}=e^{-f(z)}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r B_{n,r}(f_1,f_2,\cdots,f_n) \tag{2.1$_-$}$$

(2.1$_+$) を5階まで書き下せば次のとおり。

$$\left\{e^{f(x)}\right\}^{(1)}=e^{f(x)}f_1$$

$$\left\{e^{f(x)}\right\}^{(2)}=e^{f(x)}\left(f_2+f_1^{\,2}\right)$$

$$\left\{e^{f(x)}\right\}^{(3)}=e^{f(x)}\left(f_3+3f_2f_1+f_1^{\,3}\right)$$

$$\left\{e^{f(x)}\right\}^{(4)}=e^{f(x)}\left\{f_4+\left(4f_3f_1+3f_2^{\,2}\right)+6f_2f_1^{\,2}+f_1^{\,4}\right\}$$

$$\left\{e^{f(x)}\right\}^{(5)}=e^{f(x)}\left\{f_5+\left(5f_4f_1+10f_3f_2\right)+\left(10f_3f_1^{\,2}+15f_2^{\,2}f_1\right)+10f_2f_1^{\,3}+f_1^{\,5}\right\}$$

例1 $\left(e^{-x^2}\right)^{(3)}$

$$f=-x^2\ ,\ f_1=-2x\ ,\ f_2=-2\ ,\ f_3=0$$

であるから

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(3)}=e^{-x^2}\left\{0+3(-2)(-2x)+(-2x)^3\right\}=4e^{-x^2}x\left(3-2x^2\right)$$

例2 $\left(e^{\sin x}\right)^{(4)}$

$$f=\sin x\ ,\ f_1=\cos x\ ,\ f_2=-\sin x\ ,\ f_3=-\cos x\ ,\ f_4=\sin x$$

であるから

$$\left(e^{\sin x}\right)^{(4)}=e^{\sin x}\left\{\sin x+\left(-4\cos^2 x+3\sin^2 x\right)-6\sin x\cos^2 x+\cos^4 x\right\}$$

例3 $\left(e^{-\cos x}\right)^{(8)}$

(2.1$_-$) に従い、数式処理ソフト *Mathematica* により計算する。

$$f=\cos x\ ,\quad f_n=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

であるから、

```
Tblf[n_] := Table[Cos[x + kπ/2], {k, 1, n}]
z[n_] := e^(-Cos[x]) Σ_{r=1}^{n} (-1)^r BellY[n, r, Tblf[n]]
```

```
z[8]
```

$$e^{-\mathrm{Cos}[x]}\left(-\mathrm{Cos}[x]+63\,\mathrm{Cos}[x]^2-210\,\mathrm{Cos}[x]^3+105\,\mathrm{Cos}[x]^4\right.$$
$$-64\,\mathrm{Sin}[x]^2+756\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]^2-1260\,\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Sin}[x]^2$$
$$+420\,\mathrm{Cos}[x]^3\,\mathrm{Sin}[x]^2+336\,\mathrm{Sin}[x]^4-630\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]^4$$
$$\left.+210\,\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Sin}[x]^4-56\,\mathrm{Sin}[x]^6+28\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]^6+\mathrm{Sin}[x]^8\right)$$

22･2･2 $g\left(e^{\pm x}\right)$ の高階微分

公式22･1･1 において $f=e^{\pm x}$ と置けば、次式が得られる。

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} g^{(r)} B_{n,r}\left(e^x, \dots, e^x\right)$$

$$\left\{g\left(e^{-x}\right)\right\}^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=1}^{n} g^{(r)} B_{n,r}\left(e^{-x}, \dots, e^{-x}\right)$$

1番目の式を5階まで書き下せば次ののようになる。

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(1)} = g^{(1)}e^x$$

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(2)} = g^{(1)}e^x+g^{(2)}e^{2x}$$

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(3)} = g^{(1)}e^x+3g^{(2)}e^{2x}+g^{(3)}e^{3x}$$

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(4)} = g^{(1)}e^x+7g^{(2)}e^{2x}+6g^{(3)}e^{3x}+g^{(4)}e^{4x}$$

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(5)} = g^{(1)}e^x+15g^{(2)}e^{2x}+25g^{(3)}e^{3x}+10g^{(4)}e^{4x}+g^{(5)}e^{5x}$$

これらの右辺の係数 (1), (1,1), (1,3,1), (1,7,6,1), (1,15,25,10,1), … は
第2種スターリング数 と呼ばれ、次式で与えられる。

$$S(n,r) = \frac{1}{r\,!}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}(r-s)^n \tag{2.s}$$

この表記を用いれば上式はもっと簡単に次のように表される。

$$\left\{g\left(e^x\right)\right\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} S(n,r)g^{(r)}e^{rx} \tag{2.2$_+$}$$

$$\left\{g\left(e^{-x}\right)\right\}^{(n)} = (-1)^n\sum_{r=1}^{n} S(n,r)g^{(r)}e^{-rx} \tag{2.2$_-$}$$

例1 $\left(\tan e^x\right)^{(3)}$

$$g^{(1)}=\tan^2 e^x+1\ ,\quad g^{(2)}=2\tan^3 e^x+2\tan e^x\ ,\quad g^{(3)}=6\tan^4 e^x+8\tan^2 e^x+2$$

であるから

$$\left(\tan e^x\right)^{(3)} = \left(\tan^2 e^x+1\right)e^x+3\left(2\tan^3 e^x+2\tan e^x\right)e^{2x}+\left(6\tan^4 e^x+8\tan^2 e^x+2\right)e^{3x}$$
$$= e^x\left(\tan^2 e^x+1\right)+6e^{2x}\left(\tan^3 e^x+\tan e^x\right)+2e^{3x}\left(3\tan^4 e^x+4\tan^2 e^x+1\right)$$

例2 $\left(e^{e^{-x}}\right)^{(5)}$

$$g=e^f\ ,\quad g^{(n)}=e^f=e^{e^{-x}}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

であるから、

$$\left(e^{e^{-x}}\right)^{(5)} = -e^{e^{-x}}\left(e^{-x}+15e^{-2x}+25e^{-3x}+10e^{-4x}+e^{-5x}\right)$$

Note

第2種スターリング数の横計は**ベル数**と呼ばれる。すなわち、

$$B_n = \sum_{r=1}^{n} S(n,r)$$

これらの最初のいくつかを $n=1,2,3,\cdots$ について列挙すると 1, 2, 5, 15, 52, 203, … である。

このベル数 B_n はまた、**ドビンスキーの公式**と呼ばれる次の式によっても与えられる。

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r^n}{r!} = \sum_{r=1}^{n}\frac{r^n}{r!}\sum_{s=0}^{n-r}\frac{(-1)^s}{s!}$$

22・2・3 $\log f(x)$ の高階微分

$g=\log f$ 故 $g^{(r)}=(-1)^{r-1}(r-1)!\,f^{-r}$、これを公式22・1・1 に代入すると

$$\{\log f(x)\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}(r-1)!\,B_{n,r}(f_1,f_2,\cdots,f_n)f^{-r} \tag{2.3}$$

これらを5階まで書き下せば次のとおり。

$$\{\log f(x)\}^{(1)} = 0!f_1f^{-1}$$

$$\{\log f(x)\}^{(2)} = 0!f_2f^{-1}-1!f_1^2f^{-2}$$

$$\{\log f(x)\}^{(3)} = 0!f_3f^{-1}-1!3f_2f_1f^{-2}+2!f_1^3f^{-3}$$

$$\{\log f(x)\}^{(4)} = 0!f_4f^{-1}-1!\left(4f_3f_1+3f_2^2\right)f^{-2}+2!6f_2f_1^2f^{-3}-3!f_1^4f^{-4}$$

$$\{\log f(x)\}^{(5)} = 0!f_5f^{-1}-1!(5f_4f_1+10f_3f_2)f^{-2}+2!\left(10f_3f_1^2+15f_2^2f_1\right)f^{-3}$$
$$-3!10f_2f_1^3f^{-4}+4!f_1^5f^{-5}$$

例 $(\log\sin x)^{(3)}$

$f=\sin x$, $f_1=\cos x$, $f_2=-\sin x$, $f_3=-\cos x$ であるから

$$(\log\sin x)^{(3)} = -0!\frac{\cos x}{\sin x}+1!3\frac{\sin x\cos x}{(\sin x)^2}+2!\frac{(\cos x)^3}{(\sin x)^2} = 2\cot x+2(\cot x)^3$$

22・2・4 $g(\log x)$ の高階微分

$f=\log x$ 故 $f^{(r)}=(-1)^{r-1}(r-1)!\,x^{-r}$、これを公式22・1・1 に代入すると

$$\{g(\log x)\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} g^{(r)}B_{n,r}\left(\frac{0!}{x},-\frac{1!}{x^2},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right) \tag{2.4}$$

これらを4階まで書き下せば次のとおり。

$$\{g(\log x)\}^{(1)} = \frac{1}{x}g^{(1)}0!$$

$$\{g(\log x)\}^{(2)} = -\frac{1}{x^2}\left\{g^{(1)}1!-g^{(2)}(0!)^2\right\}$$

$$\{g(\log x)\}^{(3)}= \frac{1}{x^3}\{g^{(1)}2!-3g^{(2)}1!\,0!+g^{(3)}(0!)^3\}$$

$$\{g(\log x)\}^{(4)}=-\frac{1}{x^4}\{g^{(1)}3!-g^{(2)}(4\cdot 2!\,0!+3(1!)^2)+6g^{(3)}1!\,(0!)^2-g^{(4)}(0!)^4\}$$

例1 $\boldsymbol{(\cos\log x)^{(4)}}$

$g^{(1)}=-\sin f$, $g^{(2)}=-\cos f$, $g^{(3)}=\sin f$, $g^{(4)}=\cos f$ であるから

$$(\cos\log x)^{(4)}=-\frac{1}{x^4}\left(6g^{(1)}-11g^{(2)}+6g^{(3)}-g^{(4)}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^4}(-6\sin f+11\cos f+6\sin f-\cos f)=-\frac{10\cos\log x}{x^4}$$

例2 $\boldsymbol{(1/\log x)^{(3)}}$

$g^{(1)}=-\dfrac{1!}{f^2}$, $g^{(2)}=\dfrac{2!}{f^3}$, $g^{(3)}=-\dfrac{3!}{f^4}$ であるから

$$(1/\log x)^{(3)}=\frac{1}{x^3}\left(2g^{(1)}-3g^{(2)}+g^{(3)}\right)=\frac{1}{x^3}\left(-\frac{2\cdot 1!}{f^2}-\frac{3\cdot 2!}{f^3}-\frac{3!}{f^4}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^3}\left\{\frac{2}{(\log x)^2}+\frac{6}{(\log x)^3}+\frac{6}{(\log x)^4}\right\}$$

例3 $\boldsymbol{(\log\log x)^{(3)}}$

$g^{(1)}=\dfrac{0!}{f}$, $g^{(2)}=-\dfrac{1!}{f^2}$, $g^{(3)}=\dfrac{2!}{f^3}$ であるから

$$(\log\log x)^{(3)}=\frac{1}{x^3}\left(2g^{(1)}-3g^{(2)}+g^{(3)}\right)=\frac{1}{x^3}\left(\frac{2\cdot 0!}{f}+\frac{3\cdot 1!}{f^2}+\frac{2!}{f^3}\right)$$

$$=\frac{1}{x^3}\left\{\frac{2}{\log x}+\frac{3}{(\log x)^2}+\frac{2}{(\log x)^3}\right\}$$

22·3 ガンマ関数とその逆数の高階微分

公式22·3·1(宇井の公式)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、次式が成立する。

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \Gamma(z)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)) \tag{3.1$_+$}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)) \tag{3.1$_-$}$$

証明

$f(z) = \log\Gamma(z)$ とすれば、

$$f_1 = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \psi_0(z)$$

$$f_2 = \frac{d}{dz}\psi_0(z) = \psi_1(z)$$

$$\vdots$$

$$f_n = \frac{d}{dz}\psi_{n-2}(z) = \psi_{n-1}(z)$$

これらを 22·2·1 (2.1$_+$) , (2.1$_-$) に代入すれば

$$\left\{e^{\log\Gamma(z)}\right\}^{(n)} = e^{\log\Gamma(z)}\sum_{r=1}^{n} B_{n,r}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)) \tag{3.1$_+$}$$

$$\left\{e^{-\log\Gamma(z)}\right\}^{(n)} = e^{-\log\Gamma(z)}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r B_{n,r}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)) \tag{3.1$_-$}$$

例1 $\Gamma^{(4)}(z)$

(3.1$_+$) に従い、数式処理ソフト *Mathematica* により計算する。このテーブル定義を採用すると結果は少し見難いが、微分係数が計算できる。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
dΓ[n_, z_] := Gamma[z] Sum[BellY[n, r, Tblψ[n, z]], {r, 1, n}]
dΓ[4, z]
Gamma[z] (PolyGamma[0, z]^4
    + 6 PolyGamma[0, z]^2 PolyGamma[1, z] + 3 PolyGamma[1, z]^2
    + 4 PolyGamma[0, z] PolyGamma[2, z] + PolyGamma[3, z])
N[dΓ[4, 1]]
23.5615
```

例2 $\{1/\Gamma(z)\}^{(4)}$

(3.1_) に従い、数式処理ソフト*Mathematica* により計算する。このテーブル定義を採用すると結果は見易いが、微分係数は計算できない。

```
Tblψ[n_ , z_] := Table[ψk[z], {k, 0, n - 1}]
```

$$df[n\_, z\_] := \frac{1}{Gamma[z]} \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \, BellY[n, r, Tbl\psi[n, z]]$$

```
df[4, z]
```

$$\frac{\psi_0[z]^4 - 6\,\psi_0[z]^2\,\psi_1[z] + 3\,\psi_1[z]^2 + 4\,\psi_0[z]\,\psi_2[z] - \psi_3[z]}{Gamma[z]}$$

```
df[4, 1]
```

$$\psi_0[1]^4 - 6\,\psi_0[1]^2\,\psi_1[1] + 3\,\psi_1[1]^2 + 4\,\psi_0[1]\,\psi_2[1] - \psi_3[1]$$

Note

2016年12月9日、横浜市在住の宇井正幸さんという方からガンマ関数の高階導関数にBELLの多項式の係数が現れるとのメールを頂いた。筆者は驚いた。それはガンマ関数が合成関数であることを意味するからである。実際それは余りにも単純な合成関数であった。(氏は間もなく気付かれたようであるが、筆者は気付くまでに3日掛かった。)

筆者の知る限り、公式22･3･1 の発見者は宇井氏である。本節は氏の同意を得て筆者が簡単な証明を付加したものである。

22・4　合成関数の超微分の可能性

Faà di Bruno の公式

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} g^{(r)} B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n) \tag{1.1}$$

Hoppe の公式

$$\{g(f(x))\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \frac{g^{(r)}}{r!} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (-f)^{r-s}\left(f^{s}\right)^{(n)} \tag{1.2}$$

共に、右辺のΣの上限nを∞とすることが出来ない。二項級数や三項級数の場合と異なって右辺の項数は左辺の階数よりも大きく採ることが出来ないからである。よって (1.1) や (1.2) の定義域を自然数nから実数pに拡張することは絶望的である。すなわち、一般的な合成関数$\{g\{f(x)\}\}$の超微分は目下のところ不可能性である。

しかしながら、入れ子関数$f(x)$が1次関数のときは 公式22・1・4 により

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)} = g^{(n)} f_1^{n} \tag{1.4}$$

であったから、この定義域を自然数nから実数pに拡張することに何の不都合もない。

かくして実数$p>0$について

$$\{g\{f(x)\}\}^{(p)} = g^{(p)} f_1^{p} \tag{4.4}$$

が成立する。

これが、「12 超微分」以降、「線形式」を既成事実として使ってきた根拠である。

2007.08.30
2016.12.26 更新

K. Kono

宇宙人の数学