23 合成関数の高階積分

23・1 合成関数の高階積分の公式

公式23・1・1

$f=f(x)$ 、$g(f)$ の直系高階原始関数を $g^{<n>}$ 、f の 関数 $h,h^{(k)}$ 及び級数 S_k, M_k, r_k をそれぞれ

$$h=\frac{dx}{df}=\frac{1}{f^{(1)}} \quad , \quad h^{(k)}=\frac{d^k h}{df^k} \qquad k=1,2,3,\cdots$$

$$S_k=\sum_{r_{k1}=0}^{m_k-1}\binom{-1}{r_{k1}}\sum_{r_{k2}=0}^{r_{k1}}\binom{r_{k1}}{r_{k2}}\sum_{r_{k3}=0}^{r_{k2}}\binom{r_{k2}}{r_{k3}}\cdots\sum_{r_{kk}=0}^{r_{kk-1}}\binom{r_{kk-1}}{r_{kk}} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$M_k=(-1)^{m_k}\sum_{r_{k2}=0}^{m_k}\binom{m_k}{r_{k2}}\sum_{r_{k3}=0}^{r_{k2}}\binom{r_{k2}}{r_{k3}}\sum_{r_{k4}=0}^{r_{k3}}\binom{r_{k3}}{r_{k4}}\cdots\sum_{r_{kk}=0}^{r_{kk-1}}\binom{r_{kk-1}}{r_{kk}} \qquad k=2,3,\cdots,n$$

$$R_{jk}=\sum_{i=k}^{j}r_{ik} \qquad j,k=1,2,\cdots,n$$

とし、$g\{f(x)\}$, gh の直系高階原始関数の零点をそれぞれ a , f_a とするとき、合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する直系高階積分は次式で示される。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x\{g(f(x))\}dx^n=S_1S_2\cdots S_n\, g^{\langle n+R_{n1}\rangle}h^{(R_{n1}-R_{n2})}\cdots h^{(R_{nn-1}-R_{nn})}h^{(R_{nn})}+R_{m_1}^n \tag{n.1}$$

$$R_{m_1}^n=(-1)^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)\cdots hdf\right)hdf\right)hdf \qquad (n\text{ 重入れ子})$$

$$+S_1M_2\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 1+R_{11}+m_2\rangle}h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}h^{(R_{22})}df\right)\cdots hdf\right)hdf$$

$$+S_1S_2M_3\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 2+R_{21}+m_3\rangle}h^{(R_{21}-R_{32}+m_3)}h^{(R_{32}-R_{33})}h^{(R_{33})}df\right)\cdots hdf$$

$$\vdots$$

$$+S_1S_2\cdots S_{n-1}M_n\int_{f_a}^f g^{\langle n-1+R_{n-11}+m_n\rangle}h^{(R_{n-11}-R_{n2}+m_n)}h^{(R_{n2}-R_{n3})}\cdots h^{(R_{nn})}df \tag{n.r}$$

証明

$g=g(f)$, $f=f(x)$ であるから $dx=\dfrac{df}{f^{(1)}}$

よって $x\rightarrow f$, $[a\,,\,x]\rightarrow[f_a\,,\,f]$ なる変数変換を考えれば

$$\int_a^x\{g(f(x))\}dx=\int_{f_a}^f\frac{g(f)}{f^{(1)}}df$$

ここで

$$h^{(r)}=\frac{\partial^r}{\partial f^r}\left(\frac{1}{f^{(1)}}\right)\ \left\{=\frac{\partial^r}{\partial f^r}\left(\frac{dx}{df}\right)\right\} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

と記述すれば

$$\int_a^x \{g(f(x))\}dx = \int_{f_a}^{f} g(f)h(f)df$$

16・1 の定理16・1・2によれば

$$\int_{f_a}^{f} g\,h\,df = \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1} \binom{-1}{r_{11}} g^{\langle 1+r_{11}\rangle} h^{(r_{11})} + R_{m_1}^1$$

$$R_{m_1}^1 = (-1)^{m_1} \int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle} h^{(m_1)} df$$

であったから

$$\int_a^x \{g(f(x))\}dx = \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1} \binom{-1}{r_{11}} g^{\langle 1+r_{11}\rangle} h^{(r_{11})} + R_{m_1}^1 \tag{1}$$

$$R_{m_1}^1 = (-1)^{m_1} \int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle} h^{(m_1)} df \tag{1r}$$

次にこの両辺を x で積分すれば

$$\int_a^x\!\!\int_a^x \{g(f(x))\}dx^2 = \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1} \binom{-1}{r_{11}} \int_a^x g^{\langle 1+r_{11}\rangle} h^{(r_{11})} dx + \int_a^x R_{m_1}^1 dx$$

$$\int_a^x R_{m_1}^1 dx = (-1)^{m_1} \int_a^x \left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle} h^{(m_1)} df \right) dx$$

$dx = h\,df$ を代入し剰余項の積分を $R_{m_1}^2$ と書き換えれば

$$\int_a^x\!\!\int_a^x \{g(f(x))\}dx^2 = \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1} \binom{-1}{r_{11}} \int_{f_a}^{f} g^{\langle 1+r_{11}\rangle} h^{(r_{11})} h\,df + R_{m_1}^2$$

$$R_{m_1}^2 = (-1)^{m_1} \int_{f_a}^{f} \left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle} h^{(m_1)} df \right) h\,df$$

ここで20・2 の定理20・2・1によれば

$$\int_a^x f_1 f_2 f_3 dx = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{r} \binom{-1}{r} \binom{r}{s} f_1^{<1+r>} f_2^{(r-s)} f_3^{(s)} + R_m^1$$

$$R_m^1 = (-1)^m \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \int_a^x f_1^{<m>} f_2^{(m-s)} f_3^{(s)} dx$$

であったから $m=m_2$ と置けば

$$\int_{f_a}^{f} g^{\langle 1+r_{11}\rangle} h^{(r_{11})} h\,df = \sum_{r_{21}=0}^{m_2-1} \sum_{r_{22}=0}^{r_{21}} \binom{-1}{r_{21}} \binom{r_{21}}{r_{22}} g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle} h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})} h^{(r_{22})} + R_{m_2}^1$$

$$R_{m_2}^1 = (-1)^{m_2} \sum_{r_{22}=0}^{m_2} \binom{m_2}{r_{22}} \int_{f_a}^{f} g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle} h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)} h^{(r_{22})} df$$

これを代入すれば

$$\int_a^x\!\!\int_a^x \{g(f(x))\}dx^2$$

$$= \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1} \binom{-1}{r_{11}} \sum_{r_{21}=0}^{m_2-1} \sum_{r_{22}=0}^{r_{21}} \binom{-1}{r_{21}} \binom{r_{21}}{r_{22}} g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle} h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})} h^{(r_{22})}$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_0-1}\binom{-1}{r_{11}}R_{m_1}^1+R_{m_0}^2$$

$$R_{m_2}^1=(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df$$

$$R_{m_1}^2=(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf$$

$R_{m_1}^2$ を定義し直せば

$$\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^2$$

$$=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})}h^{(r_{22})}+R_{m_1}^2 \tag{2}$$

$$R_{m_1}^2=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf \tag{2r}$$

を得る。この (2),(2r) は

$$S_1=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\quad,\quad S_2=\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\binom{-1}{r_{21}}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\quad,\quad M_2=(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}$$

$$R_{11}=r_{11}\quad,\quad R_{21}=r_{11}+r_{21}\quad,\quad R_{22}=r_{22}$$

を用いて

$$\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^2=S_1S_2\,g^{\langle 2+R_{21}\rangle}h^{(R_{21}-R_{22})}h^{(R_{22})}+R_{m_1}^2$$

$$R_{m_1}^2=S_1M_2\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+R_{11}+m_2\rangle}h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}h^{(R_{22})}df$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf$$

と表すことができる。

次に (2), (2r) の両辺を x で積分すれば

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^3=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}$$

$$\times\int_a^x g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})}h^{(r_{22})}dx+\int_a^x R_{m_1}^2dx$$

$$\int_a^x R_{m_1}^2dx=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_a^x\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df\right)dx$$

$$+(-1)^{m_1}\int_a^x\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)dx$$

$dx=h\,df$ を代入し剰余項の積分を $R_{m_1}^3$ と書き換えれば

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^3$$

$$=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})}h^{(r_{22})}hdf+R_{m_1}^3$$

$$R_{m_1}^3=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df\right)hdf$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)hdf$$

ここでまた 20・2 の定理20・2・1によれば

$$\int_a^x f_1f_2f_3f_4dx=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\binom{-1}{r}\binom{r}{s}\binom{s}{t}f_1^{<1+r>}f_2^{(r-s)}f_3^{(s-t)}f_4^{(t)}+R_m^1$$

$$R_m^1=(-1)^m\sum_{s=0}^{m}\sum_{t=0}^{s}\binom{m}{s}\binom{s}{t}\int_a^x f_1^{<m>}f_2^{(m-s)}f_3^{(s-t)}f_4^{(t)}dx$$

であったから$m=m_3$と採れば

$$\int_{f_a}^{f}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})}h^{(r_{22})}hdf=\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times g^{\langle 3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{22}-r_{32})}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}+R_{m_3}^1$$

$$R_{m_3}^1=(-1)^{m_3}\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_3}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times\int_{f_a}^{f}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22}-r_{32}+m_3)}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}df$$

これを代入すれば

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^3$$

$$=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times g^{\langle 3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{22}-r_{32})}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}R_{m_3}^1+R_{m_1}^3$$

$$R_{m_3}^1=(-1)^{m_3}\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_2}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times\int_{f_a}^{f}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22}-r_{32}+m_3)}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}df$$

$$R_{m_1}^3=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df\right)hdf$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)hdf$$

$R^3_{m_1}$ を定義し直せば

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x \{g(f(x))\}dx^3$$

$$= \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times g^{\langle 3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{22}-r_{32})}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})} + R^3_{m_1} \quad (3)$$

$$R^3_{m_1} = \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}(-1)^{m_3}\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_3}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times\int_{f_a}^{f} g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22}-r_{32}+m_3)}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}df$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df\right)hdf$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)hdf \quad (3r)$$

さらに、この (3),(3r) は S_k , M_k , R_{jk} を用いて

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x \{g(f(x))\}dx^3 = S_1S_2S_3\, g^{\langle 3+R_{31}\rangle}h^{(R_{31}-R_{32})}h^{(R_{32}-R_{33})}h^{(R_{33})} + R^3_{m_1}$$

$$R^3_{m_1} = S_1S_2M_3\int_{f_a}^{f} g^{\langle 2+R_{21}+m_3\rangle}h^{(R_{21}-R_{32}+m_3)}h^{(R_{32}-R_{33})}h^{(R_{33})}df$$

$$+S_1M_2\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle 1+R_{11}+m_2\rangle}h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}h^{(R_{22})}df\right)hdf$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)hdf$$

と表される。

同様に4階積分を計算すると

$$\int_a^x\cdots\int_a^x \{g(f(x))\}dx^4 = S_1S_2S_3S_4\, g^{\langle 4+R_{41}\rangle}h^{(R_{41}-R_{42})}h^{(R_{42}-R_{43})}h^{(R_{43}-R_{44})}h^{(R_{44})} + R^4_{m_1}$$

$$R^4_{m_1} = S_1S_2S_3M_4\int_{f_a}^{f} g^{\langle 3+R_{31}+m_4\rangle}h^{(R_{31}-R_{42}+m_4)}h^{(R_{42}-R_{43})}h^{(R_{43}-R_{44})}h^{(R_{44})}df$$

$$+S_1S_2M_3\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle 2+R_{21}+m_3\rangle}h^{(R_{21}-R_{32}+m_3)}h^{(R_{32}-R_{33})}h^{(R_{33})}df\right)hdf$$

$$+S_1M_2\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle 1+R_{11}+m_2\rangle}h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}h^{(R_{22})}df\right)hdf\right)hdf$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f} g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)hdf\right)hdf$$

となり、以下、帰納法により与式を得る。

Q.E.D.

入れ子関数が1次関数の場合の高階積分

一般の合成関数の高階積分はかくもややこしいが、入れ子関数 $f(x)$ が1次関数のときは著しく簡単になる。

公式23・1・2

$f(x)=cx+d$ のとき

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \{g(f(x))\}dx^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n \int_{f_a}^f \cdots \int_{f_a}^f g(f)df^n$$

証明

公式23・1・1において $f(x)=cx+d$ とするとき、

$$h=\frac{dx}{df}=\frac{1}{f^{(1)}}=\frac{1}{c} \quad , \quad h^{(k)}=\frac{d^k h}{df^k}=0 \qquad k=1,2,3,\cdots$$

であるから、剰余項

$$\begin{aligned}R_{m_1}^n &= (-1)^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f \cdots \left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right) \cdots hdf\right)hdf\right)hdf \qquad (n\text{ 重入れ子})\\ &+ S_1M_2\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f \cdots \left(\int_{f_a}^f g^{\langle 1+R_{11}+m_2\rangle}h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}h^{(R_{22})}df\right) \cdots hdf\right)hdf\\ &+ S_1S_2M_3\int_{f_a}^f \cdots \left(\int_{f_a}^f g^{\langle 2+R_{21}+m_3\rangle}h^{(R_{21}-R_{32}+m_3)}h^{(R_{32}-R_{33})}h^{(R_{33})}df\right) \cdots hdf\\ &\quad \vdots\\ &+ S_1S_2\cdots S_{n-1}M_n\int_{f_a}^f g^{\langle n-1+R_{n-11}+m_n\rangle}h^{(R_{n-11}-R_{n2}+m_n)}h^{(R_{n2}-R_{n3})}\cdots h^{(R_{nn})}df \qquad (\mathrm{nr})\end{aligned}$$

は次のようになる。

第1行目において、$m_1>0$ であるから $h^{(m_1)}=0$ 、　　　　よって第1行目は0となる。

第2行目において、もし $R_{22}>0$ ならば $h^{(R_{22})}=0$ 故、　　　　直ちに第2行目は0となる。

もし $R_{22}=0$ ならば $h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}=0$ 故、　　やはり第2行目は0となる。

第3行目において、もし $R_{33}>0$ ならば $h^{(R_{33})}=0$ 故、　　　　直ちに第3行目は0となる。

もし $R_{33}=0$ でも $R_{32}>0$ ならば $h^{(R_{32}-R_{33})}=0$ 故、やはり第3行目は0となる。

もし $R_{33}=R_{32}=0$ ならば $h^{(R_{21}-R_{32}+m_3)}=0$ 　故、やはり第3行目は0となる。

⋮

一般に第 n 行目において、

もし $R_{nn}>0$ ならば $h^{(R_{nn})}=0$ 故、　　　　直ちに第 n 行目は0となる。

もし $R_{nn}=0$ であっても、$R_{nn-1}\sim R_{n2}$ 中に1つでも正のものがあれば直ちに第 n 行目は0となる。

もし $R_{nn}=R_{nn-1}=\cdots=R_{n2}=0$ ならば $h^{(R_{n-11}-R_{n2}+m_n)}=0$ 　故、やはり第 n 行目は0となる。

かくして、仮定のもとでは必ず $R_{m_1}^n=0$ 、従って

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \{g(f(x))\} dx^n = S_1 S_2 \cdots S_n \, g^{\langle n+R_{n1}\rangle} h^{(R_{n1}-R_{n2})} \cdots h^{(R_{nn-1}-R_{nn})} h^{(R_{nn})} \tag{n}$$

次に (n) を観察すると、$R_{nn} = R_{n\,n-1} = \cdots = R_{n1} = 0$ であることが直ちに解かる。何故ならば、(n) が 0 でないならば 先ず $R_{nn} = 0$ でなければならない。次に $R_{n\,n-1} = 0$ でなければならない。次に … と芋蔓式に進んで最後は $R_{n1} = 0$ でなければならないからである。よって

$$h^{(R_{n1}-R_{n2})} \cdots h^{(R_{nn-1}-R_{nn})} h^{(R_{nn})} = \left\{h^{(0)}\right\}^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n$$

$$S_1 S_2 \cdots S_n = 1$$

となり、従って

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \{g(f(x))\} dx^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n g^{<n>} = \left(\frac{1}{c}\right)^n \int_{f_a}^f \cdots \int_{f_a}^f g(f)\, df^n$$

を得る。

Q.E.D.

例 $\boldsymbol{g = \log(ax+b)}$ とすれば

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x \cdots \int_{-\frac{b}{a}}^x \log(ax+b) dx^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{(ax+b)^n}{n\,!} \left\{ \log(ax+b) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\}$$

と書くことができ、これは「**4･3 高階積分**」の公式4･3･3 の線型式に一致する。

公式23･1･1が適用可能な合成関数

初等関数のみの組合せに限ってみても合成関数の種類は膨大である。ところがこれらの全てに公式23･1･1が適用可能な訳ではない。第1に入れ子関数 $f(x)$ はその逆関数が既知でなければならない。そうでないならば h を f の関数で表すことが出来ないからである。第2に入れ物関数 $g(f)$ はその高階原始関数が $\lim_{n\to\infty} g^{<n>}(f) = c$ となるような性質を持たねばならない。そうでないならば級数ではなく剰余項が積分の主要部になってしまうからである。

これらのことを勘案すると公式23･1･1が適用可能な合成関数はあまり多くなく、このことが公式23･1･1の意義を少なくさせている。しかし公式23･1･1が適用できたいくつかの合成関数については大変面白い結果を得ることができた。次節以下それを述べる。

23·2　$\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}$の高階積分

公式23·2·1

$\Gamma(z)$をガンマ関数とし、合成関数$g\{f(x)\}$及び級数 S_k, r_k をそれぞれ

$$g\{f(x)\}=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha} \quad , \quad \beta>0\ \&\ \neq 1/k\ \ (k=1,2,\cdots)\ , \qquad \alpha,\beta,c>0$$

$$S_k=\sum_{r_{k1}=0}^{\infty}\binom{-1}{r_{k1}}\sum_{r_{k2}=0}^{r_{k1}}\binom{r_{k1}}{r_{k2}}\sum_{r_{k3}=0}^{r_{k2}}\binom{r_{k2}}{r_{k3}}\cdots\sum_{r_{kk}=0}^{r_{kk-1}}\binom{r_{kk-1}}{r_{kk}} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$R_{jk}=\sum_{i=k}^{j}r_{ik} \qquad j,k=1,2,\cdots,n$$

とするとき、$x>\sqrt[\beta]{c}$ について次式が成立する。

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}dx=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}\frac{x}{\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-r)}\left(1-\frac{c}{x^{\beta}}\right)^{1+r} \tag{1.1}$$

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}dx^{2}=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}\frac{x^{2}}{\beta^{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1}{r}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{s}\binom{-1}{s}\binom{s}{t}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+2+r+s)}$$
$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-r-s+t)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-t)}\left(1-\frac{c}{x^{\beta}}\right)^{2+r+s} \tag{1.2}$$

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\cdots\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}dx^{3}=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}\frac{x^{3}}{\beta^{3}}$$
$$\times\sum_{r_{11}=0}^{\infty}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{\infty}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{31}=0}^{\infty}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$
$$\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{11}-r_{21}-r_{31}+r_{22}+r_{32}\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{22}-r_{32}+r_{33}\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{33}\right)}\left(1-\frac{c}{x^{\beta}}\right)^{3+r_{11}+r_{21}+r_{31}} \tag{1.3}$$

$\vdots$

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\cdots\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}dx^{n}=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}\frac{x^{n}}{\beta^{n}}S_1S_2\cdots S_n\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+n+R_{n1}\right)}\left(1-\frac{1}{x^{\beta}}\right)^{n+R_{n1}}$$
$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-R_{n1}+R_{n2}\right)}\cdots\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-R_{nn-1}+R_{nn}\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-R_{nn}\right)} \tag{1.n}$$

導出

$$g\{f(x)\}=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}, \qquad h=\frac{dx}{df}=\frac{1}{\beta}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1}$$

より

$$g^{\langle n+R_{n1}\rangle}=\left(f^{\alpha}\right)^{\langle n+R_{n1}\rangle}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+n+R_{n1}\right)}f^{\alpha+n+R_{n1}}$$

$$h^{(R_{n1}-R_{n2})} = \frac{1}{\beta}\left\{(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1}\right\}^{(R_{n1}-R_{n2})}$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{n1}+R_{n2})}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-R_{n1}+R_{n2}}$$

$$\vdots$$

$$h^{(R_{nn-1}-R_{nn})} = \frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn-1}+R_{nn})}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-R_{nn-1}+R_{nn}}$$

$$h^{(m_1)} = \frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn})}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-R_{nn}}$$

これらを 公式23･1･1の (n.1) に代入すれば

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\cdots\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}(x^\beta-c)^\alpha dx^n = S_1S_2\cdots S_n\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+R_{n1})}f^{\alpha+n+R_{n1}}$$

$$\times\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{n1}+R_{n2})}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-R_{n1}+R_{n2}}$$

$$\vdots$$

$$\times\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn-1}+R_{nn})}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-R_{nn-1}+R_{nn}}$$

$$\times\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn})}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-R_{nn}} + R_{m_1}^n$$

$$= \frac{1}{\beta^n}S_1S_2\cdots S_n\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+R_{n1})}(x^\beta-c)^{\alpha+n+R_{n1}}(x^\beta)^{\frac{n}{\beta}-n-R_{n1}}$$

$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{n1}+R_{n2})}\cdots\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn-1}+R_{nn})}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn})} + R_{m_1}^n$$

即ち

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\cdots\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}(x^\beta-c)^\alpha dx^n = (x^\beta-c)^\alpha\frac{x^n}{\beta^n}S_1S_2\cdots S_n\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+R_{n1})}\left(1-\frac{c}{x^\beta}\right)^{n+R_{n1}}$$

$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{n1}+R_{n2})}\cdots\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn-1}+R_{nn})}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn})} + R_{m_1}^n \qquad \text{(n)}$$

を得る。

$R_{m_1}^n$ は長過ぎて記述できないので省略し、(n) を1階～3階について例記すると次のとおりである。

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}(x^\beta-c)^\alpha dx$$

$$= (x^\beta-c)^\alpha\frac{x}{\beta}\sum_{r=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-r)}\left(1-\frac{c}{x^\beta}\right)^{1+r} + R_{m_1}^1 \qquad (1)$$

$$R_{m_1}^1 = \frac{(-1)^{m_1}}{\beta}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-m_1)}\int_0^f f^{\alpha+m_1}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-m_1}df \qquad \text{(1r)}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}dx^{2}\\
&\quad=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}\frac{x^{2}}{\beta^{2}}\sum_{r=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r}\sum_{s=0}^{m_2-1}\sum_{t=0}^{s}\binom{-1}{s}\binom{s}{t}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+2+r+s)}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-r-s+t)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-t)}\left(1-\frac{c}{x^{\beta}}\right)^{2+r+s}+R_{m_1}^{2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{m_1}^{2}&=\frac{(-1)^{m_2}}{\beta^{2}}\sum_{r=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r}\sum_{t=0}^{m_2}\binom{m_2}{t}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+1+r+m_2\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r+t-m_2\right)}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-t)}\int_{0}^{f}f^{\alpha+1+r+m_2}(f+c)^{\frac{2}{\beta}-2-r-m_2}df\\
&\quad+\frac{(-1)^{m_1}}{\beta^{2}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+m_1\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-m_1\right)}\\
&\qquad\times\int_{0}^{f}\left(\int_{0}^{f}f^{\alpha+m_1}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-m_1}df\right)(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1}df
\end{aligned}
\tag{2r}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\cdots\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}dx^{3}=\left(x^{\beta}-c\right)^{\alpha}\frac{x^{3}}{\beta^{3}}\\
&\quad\times\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}\\
&\quad\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{11}-r_{21}-r_{31}+r_{22}+r_{32}\right)}\\
&\quad\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{22}-r_{32}+r_{33}\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{33}\right)}\left(1-\frac{c}{x^{\beta}}\right)^{3+r_{11}+r_{21}+r_{31}}+R_{m_1}^{3}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{m_1}^{3}&=\frac{(-1)^{m_3}}{\beta^{3}}\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_3}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+2+r_{11}+r_{21}+m_3\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{11}-r_{21}+r_{22}+r_{32}-m_3\right)}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{22}-r_{32}+r_{33}\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{33}\right)}\\
&\qquad\times\int_{0}^{f}f^{\alpha+2+r_{11}+r_{21}+m_3}(f+c)^{\frac{3}{\beta}-3-r_{11}-r_{21}-m_3}df\\
&\quad+\frac{(-1)^{m_2}}{\beta^{3}}\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+1+r_{11}+m_2\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{11}+r_{22}-m_2\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-r_{22}\right)}\\
&\qquad\times\int_{0}^{f}\left(\int_{0}^{f}f^{\alpha+1+r_{11}+m_2}(f+c)^{\frac{2}{\beta}-2-r_{11}-m_2}df\right)(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1}df
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(-1)^{m_1}}{\beta}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-m_1)}$$

$$\times\int_0^f\left(\int_0^f\left(\int_0^f f^{\alpha+m_1}(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1-m_1}df\right)(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1}df\right)(f+c)^{\frac{1}{\beta}-1}df \qquad \text{(3r)}$$

$R^n_{m_1}$ も概ね(3r)の如きものである。これらに含まれる高階積分は元(左辺)の高階積分よりも難しくて解くことは思いもよらない。ところが、$\alpha>0$, $\beta>0$ ならば $m_i\rightarrow\infty$ $i=1,2,3,\cdots$ とするとき $R^n_{m_1}\rightarrow 0$ となる。次にそのことを示す。

今、次のような関数 $S(m)$ を考える。

$$S(m)=\frac{1}{\Gamma(1+m)\Gamma(1/b-m)}$$

b の値をパラメトリックに与えてこの関数を図示してみると次のことが判る(図参照)。

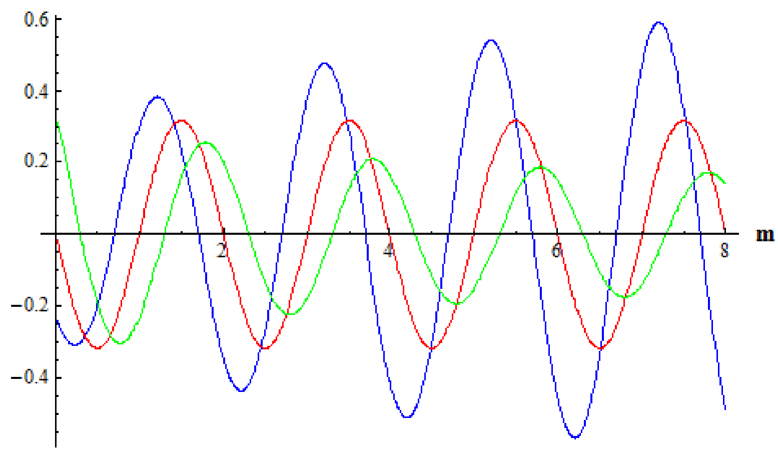
$b<0$ のとき　$S(m)$ は $\pm\infty$ に発散

$b=0$ のとき　$S(m)$ は 0 を中心に振動

$b>0$ のとき　$S(m)$ は 0 に収束

$$s[b\_]:=\frac{1}{\text{Gamma}[1+m]\ \text{Gamma}[b-m]}$$

Blue: b<0 , Red: b=0 , Green: b>0



先に記述を省略したが、剰余項 $R^n_{m_1}$ の最終項は次のようになる。

$$\frac{(-1)^{m_1}}{\beta}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-m_1)}$$

$$\times\int_0^f\left(\int_0^f\cdots\left(\int_0^f f^{\alpha+n-1+R_{n-11}+m_n}(f+c)^{\frac{n}{\beta}-n-R_{n-11}-m_n}df\right)\cdots(f+c)^{\frac{n}{\beta}-1}df\right)(f+c)^{\frac{n}{\beta}-1}df$$

そして $\alpha>0$, $\beta>0$ のとき

$$\lim_{m_1\rightarrow\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\frac{1}{|\Gamma(1/\beta-m_1)|}<\lim_{m_1\rightarrow\infty}\frac{1}{\Gamma(1+m_1)}\frac{1}{|\Gamma(1/\beta-m_1)|}=0$$

また、被積分関数は

$$f^{\alpha+n-1+R_{n-11}+m_n}(f+c)^{\frac{n}{\beta}-n-R_{n-11}-m_n}$$
$$=\left(x^\beta-c\right)^{\alpha+n-1+R_{n-11}+m_n}\left(x^\beta\right)^{\frac{n}{\beta}-n-R_{n-11}-m_n}$$
$$=\left(x^\beta-c\right)^{\alpha+n-1+R_{n-11}}\left(x^\beta\right)^{\frac{n}{\beta}-n-R_{n-11}}\left(1-\frac{c}{x^\beta}\right)^{m_n}$$

仮定により $x>\sqrt[\beta]{c}$, $c>0$ 故

$$\lim_{m_n\to\infty}\left(x^\beta-c\right)^{\alpha+n-1+R_{n-11}}\left(x^\beta\right)^{\frac{n}{\beta}-n-R_{n-11}}\left(1-\frac{c}{x^\beta}\right)^{m_n}=0$$

これらを併せて $m_i\to\infty$ $i=1,2,3,\cdots$ とするとき剰余項 $R^n_{m_1}$ の最終項は0に収束する。

次に、剰余項 $R^n_{m_1}$ の最終項以外の一般項は次のような積を含む。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+k-1+R_{k-11}+m_k\right)}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-R_{k-11}+R_{k2}-m_k\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-R_{k2}+R_{k3}\right)}\cdots\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(1/\beta-R_{kn}\right)}$$
$$\times\int_0^f\left(\int_0^f\cdots\left(\int_0^f f^{\alpha+k-1+R_{k-11}+m_k}(f+c)^{\frac{k}{\beta}-k-R_{k-11}-m_k}df\right)\cdots(f+c)^{\frac{k}{\beta}-1}df\right)(f+c)^{\frac{k}{\beta}-1}df$$

これらの内 m_k を含まない項は定数と考えて良い。m_k を含む項は $k-1\geqq0$ 故

$$\lim_{m_k\to\infty}\frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha+k-1+R_{k-11}+m_k\right)}\frac{1}{\left|\Gamma\left(1/\beta-R_{k-11}+R_{k2}-m_k\right)\right|}$$
$$<\lim_{m_k\to\infty}\frac{1}{\Gamma\left\{1+\left(R_{k-11}+m_k\right)\right\}}\frac{1}{\left|\Gamma\left\{1/\beta+R_{k2}-\left(R_{k-11}+m_k\right)\right\}\right|}=0$$

そして被積分関数も

$$\lim_{m_k\to\infty}f^{\alpha+k-1+R_{k-11}+m_k}(f+c)^{\frac{k}{\beta}-k-R_{k-11}-m_k}=0$$

であるから併せて $m_i\to\infty$ $i=1,2,3,\cdots$ とするとき剰余項 $R^n_{m_1}$ の非最終項も0に収束する。

よって $\lim_{m_i\to\infty}R^n_{m_1}=0$ $\quad i=1,2,3,\cdots$ となり、従って (1), (2), (3), … , (n) はそれぞれ (1.1), (1.2), (1.3), … , (1.n) となる。

例1　3次双曲線と x 軸との間の面積

(1.1) において $\alpha=1/3$, $\beta=3$, $c=1$ と置くと次のようになる。

$$\int_1^x\sqrt[3]{x^3-1}\,dx=\sqrt[3]{x^3-1}\,\frac{x}{3}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1}{r}\frac{\Gamma(1+1/3)}{\Gamma(1+1/3+1+r)}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/3-r)}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{1+r}$$

この被積分関数 $y=\sqrt[3]{x^3-1}$ は、x 軸上に焦点を持つ3次双曲線 $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=1$ の第1象限部分であり、従ってこの積分は第1象限上のこの双曲線と x 軸の間の面積を表す関数を得ることを意味する。この積分を表示するには楕円積分でも無理であり超幾何関数が必要である。それ

をこのような級数で表せると言うのが本例である。実際、これが正しいことを数式ソフトで計算・図示する。Σは100項まで採っているが両辺はほぼ重なっていることが見て取れる。

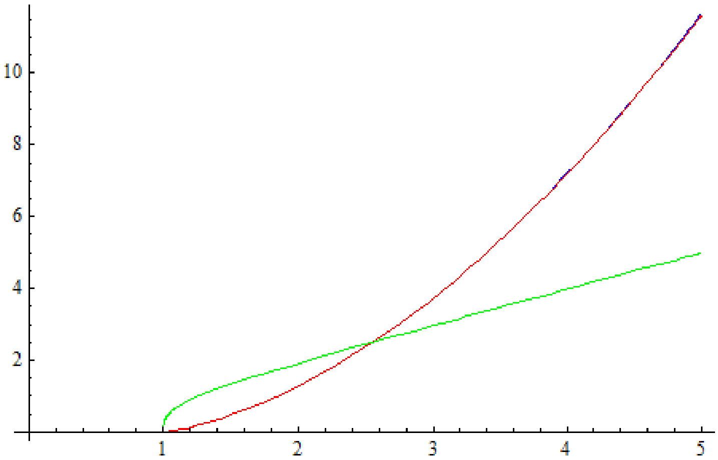
```
a = 1 / 3;  b = 3;  c = 1;  m = 100;
```

$$\mathrm{f1}[x\_] := \int_{\sqrt[b]{c}}^{x} \left(t^b - c\right)^a \, dt$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := \left(x^b - c\right)^a \frac{x}{b} \sum_{r=0}^{m} \mathrm{Binomial}[-1,\ r] \frac{\mathrm{Gamma}[1+a]}{\mathrm{Gamma}[1+a+1+r]} \frac{\mathrm{Gamma}[1/b]}{\mathrm{Gamma}[1/b-r]} \left(1 - \frac{c}{x^b}\right)^{1+r}$$

$$g[x\_] := \left(x^b - c\right)^a$$

Blue: Integral , Red: Series , Green: Integrand



例2 $\left(x^e - \pi\right)^{log2}$ の2階積分

(1.2) において $\alpha = log\,2$, $\beta = e$, $c = \pi$ と置くと次式のようになる。

$$\int_{\sqrt[e]{\pi}}^{x}\int_{\sqrt[e]{\pi}}^{x} \left(x^e - \pi\right)^{log2} dx^2 = \left(x^e - \pi\right)^{log2} \frac{x^2}{e^2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-1}{r} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{s} \binom{-1}{s} \binom{s}{t}$$
$$\times \frac{\Gamma(1+log\,2)}{\Gamma(1+log\,2+2+r+s)} \frac{\Gamma(1/e)}{\Gamma(1/e-r-s+t)} \frac{\Gamma(1/e)}{\Gamma(1/e-t)} \left(1 - \frac{\pi}{x^e}\right)^{2+r+s}$$

任意の1点 $x = 3.5$ における両辺の値は次のとおり

```
a = Log[2];  b = e;  c = π;  m = 100;
```

$$\mathrm{f1}[x\_] := \int_{\sqrt[b]{c}}^{x} \left(\int_{\sqrt[b]{c}}^{u} \left(t^b - c\right)^a \, dt\right) du$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := \left(x^b - c\right)^a \frac{x^2}{b^2} \sum_{r=0}^{m} \mathrm{Binomial}[-1,\ r] \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{s} \mathrm{Binomial}[-1,\ s]\ \mathrm{Binomial}[s,\ t]$$
$$\times \frac{\mathrm{Gamma}[1+a]}{\mathrm{Gamma}[1+a+2+r+s]} \frac{\mathrm{Gamma}[1/b]}{\mathrm{Gamma}[1/b-r-s+t]} \frac{\mathrm{Gamma}[1/b]}{\mathrm{Gamma}[1/b-t]} \left(1 - \frac{c}{x^b}\right)^{2+r+s}$$

```
N[f1[3.5]]
6.24841 + 6.44797 × 10^-15 i
```

```
N[fr[3.5]]
6.24841
```

23・3 $g(\log x)$ の高階積分

入れ子関数が $f=\log x$ のときはその逆関数が $x=e^f$ であるため $h^{(r)}=e^f\ \ r=0,1,2,\cdots$ と極めて簡単になり、$g(\log x)$ の n 階積分は n 重級数で表されることとなる。

公式23・3・1

関数 $g(f)$ の直系高階原始関数を $g^{<n>}$ とし、$g(\log x)$, $g(f)e^f$ の直系高階原始関数の零点をそれぞれ a , f_a とするとき、$g(\log x)$の直系高階積分は次式で示される。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x\{g(\log x)\}dx^n=x^n\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{m_n-1}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^n k^{r_k}g^{\left\langle n+\sum_{k=1}^n r_k\right\rangle}+R_{m_1}^n \tag{1.n}$$

$$R_{m_1}^n=(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}e^f df\right)\cdots e^f df\right)e^f df\right)e^f df\quad (n\text{ 重入れ子})$$

$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}(-1)^{r_1+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 1+r_1+m_2\rangle}e^{2f}df\right)\cdots e^f df\right)e^f df$$

$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}(-1)^{r_1+r_2+m_3}1^{m_1}2^{m_2}3^{m_3}\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 2+r_1+r_2+m_3\rangle}e^{3f}df\right)\cdots e^f df$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_{n-1}=0}^{m_{n-1}-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n}\prod_{k=1}^n k^{m_k}\int_{f_a}^f g^{\left\langle n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right\rangle}e^{nf}df \tag{1.nr}$$

証明

$f=\log x$, $x=e^f$ 故

$$h=\frac{dx}{df}=e^f=x\quad ,\quad h^{(r)}=e^f=x\qquad (r=1,2,3,\cdots,n)$$

これをを 公式23・1・1の (1), (1r) に代入すると次式を得る。

$$\int_a^x\{g(\log x)\}dx=x\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}g^{\langle 1+r_{11}\rangle}+R_{m_1}^1$$

$$R_{m_1}^1=(-1)^{m_1}\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}e^f df$$

そして $\binom{-1}{r_{11}}=(-1)^{r_{11}}$ を代入し $1^{r_{11}}$, 1^{m_1} を補えば

$$\int_a^x\{g(\log x)\}dx=x\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}(-1)^{r_{11}}1^{r_{11}}g^{\langle 1+r_{11}\rangle}+R_{m_1}^1 \tag{1.1}$$

$$R_{m_1}^1=(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}e^f df \tag{1.1r}$$

次に $h^{(r)}=e^f=x\quad (r=0,1,2,\cdots,n)$ を 公式23・1・1の (2), (2r) に代入すると次式を得る。

$$\int_a^x\int_a^x\{g(\log x)\}dx^2=x^2\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}+R_{m_1}^2$$

$$R_{m_1}^2=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}e^{2f}df$$
$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}e^{f}df\right)e^{f}df$$

これに

$$\binom{-1}{r_{11}}=(-1)^{r_{11}}\quad,\quad\binom{-1}{r_{21}}=(-1)^{r_{21}}$$
$$\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}=2^{r_{21}}\quad,\quad\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}=2^{m_2}$$

を代入して整理し $1^{r_{11}},1^{m_1}$ を補えば

$$\int_a^x\int_a^x\{g(\log x)\}dx^2=x^2\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}(-1)^{r_{11}+r_{21}}1^{r_{11}}2^{r_{21}}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}+R_{m_1}^2 \tag{1.2}$$

$$R_{m_1}^2=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}(-1)^{r_{11}+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}e^{2f}df$$
$$+(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}e^{f}df\right)e^{f}df \tag{1.2r}$$

次に$h^{(r)}=e^f=x\quad(r=0,1,2,\cdots,n)$を 公式23･1･1の (3), (3r) に代入すると次式を得る。

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x\{g(\log x)\}dx^3$$
$$=x^3\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$
$$\times g^{\langle 3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\rangle}+R_{m_1}^3$$

$$R_{m_1}^3=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}(-1)^{m_3}\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_3}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$
$$\times\int_{f_a}^{f}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}e^{3f}df$$
$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}e^{2f}df\right)e^{f}df$$
$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}e^{f}df\right)e^{f}df\right)e^{f}df$$

これに

$$\binom{-1}{r_{11}}=(-1)^{r_{11}}\quad,\quad\binom{-1}{r_{21}}=(-1)^{r_{21}}\quad,\quad\binom{-1}{r_{31}}=(-1)^{r_{31}}$$
$$\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}=2^{r_{21}}\quad,\quad\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}=3^{r_{31}}$$
$$\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}=2^{m_2}\quad,\quad\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_3}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}=3^{m_3}$$

を代入し $1^{r_{11}}, 1^{m_1}$ を補えば

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x \{g(\log x)\}dx^3$$

$$= x^3\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}(-1)^{r_{11}+r_{21}+r_{31}}1^{r_{11}}2^{r_{21}}3^{r_{31}}g^{\langle 3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\rangle} + R_{m_1}^3 \quad (1.3)$$

$$R_{m_1}^3 = \sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}(-1)^{r_{11}+r_{21}+m_3}1^{m_1}2^{m_2}3^{m_3}\int_{f_a}^f g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}e^{3f}df$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}(-1)^{r_{11}+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}e^{2f}df\right)e^f df$$

$$+(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}e^f df\right)e^f df\right)e^f df \quad (1.3r)$$

を得る。

以下、帰納法により

$$\int_a^x\cdots\int_a^x\{g(\log x)\}dx^n = x^n\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_{n1}=0}^{m_n-1}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_{k1}}\prod_{k=1}^n k^{r_{k1}}g^{\left\langle n+\sum_{k=1}^n r_{k1}\right\rangle} + R_{m_1}^n \quad (1.n)$$

$$R_{m_1}^n = (-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}e^f df\right)\cdots e^f df\right)e^f df\right)e^f df \quad (n\text{ 重入れ子})$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}(-1)^{r_{11}+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}e^{2f}df\right)\cdots e^f df\right)e^f df$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}(-1)^{r_{11}+r_{21}+m_3}1^{m_1}2^{m_2}3^{m_3}\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}e^{3f}df\right)\cdots e^f df$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_{n-1\,1}=0}^{m_{n-1}-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}r_{k1}+m_n}\prod_{k=1}^n k^{m_k}\int_{f_a}^f g^{\left\langle n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_{k1}+m_n\right\rangle}e^{nf}df \quad (1.nr)$$

を得、r_{k1} を r_k に書き換えれば与式を得る。

Q.E.D

公式23･3･1において f_a は関数 $g(f)$ によって定まるが、ほとんどの場合 e^f の零点 $f_a = -\infty$ となる。$g(f)$ に具体的な関数を当てはめた場合の計算は本節の細節となるべきであるが、これらは非常に長いのでそれぞれ独立の節とし以下に述べる。

23·4　$(\log x)^{\alpha}$, $(\log x)^{m}$の高階積分

23·4·1　$(\log x)^{\alpha}$の高階積分

***Lemma* 1**

　不完全ガンマ関数を $\Gamma(a,x)=\int_{x}^{\infty}t^{a-1}e^{-t}dt$ とするとき、$\lambda>0$ と $\alpha\neq -1,-2,-3,\cdots$ について次式が成立する。

(1)　$x\leqq 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha}e^{\lambda x}dx^{n}=\frac{x^{\alpha}}{(-x)^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-\lambda x)(\lambda x)^{r}}{\lambda^{\alpha+n}(n-1)!}$$

(2)　$x>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha}e^{\lambda x}dx^{n}=\frac{x^{\alpha}}{(-x)^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-\lambda x)(\lambda x)^{r}}{\lambda^{\alpha+n}(n-1)!}$$

$$+\,2i\sin\alpha\pi\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha)(\lambda x)^{r}}{\lambda^{\alpha+n}(n-1)!}$$

証明

　公式23·1·2 において$g(f)=f^{\alpha}e^{f}$,　$f=\lambda x$ とすれば、

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}(\lambda x)^{\alpha}e^{\lambda x}dx^{n}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n}\int_{-\infty}^{f}\cdots\int_{-\infty}^{f}f^{\alpha}e^{\alpha}df^{n}$$

ここで16·5 の公式16·5·1をこの右辺に代入すれば、$x>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}(\lambda x)^{\alpha}e^{\lambda x}dx^{n}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n}\frac{f^{\alpha}}{(-f)^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-f)f^{r}}{(n-1)!}$$

$$+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n}2i\sin\alpha\pi\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha)f^{r}}{(n-1)!}$$

$$=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n}\frac{(\lambda x)^{\alpha}}{(-\lambda x)^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-\lambda x)(\lambda x)^{r}}{(n-1)!}$$

$$+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n}2i\sin\alpha\pi\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha)(\lambda x)^{r}}{(n-1)!}$$

即ち

$$\lambda^{\alpha}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}x^{\alpha}e^{\lambda x}dx^{n}=\frac{x^{\alpha}}{(-x)^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha,\,-\lambda x)(\lambda x)^{r}}{\lambda^{n}(n-1)!}$$

$$+\,2i\sin\alpha\pi\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_{r}\,\Gamma(n-r+\alpha)(\lambda x)^{r}}{\lambda^{n}(n-1)!}$$

これより与式を得る。

公式23･4･1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、実数 $\alpha \ne -1,-2,-3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$\int_0^x (\log x)^\alpha dx = x^1 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r 1^r \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r)} (\log x)^{\alpha+1+r} + (-1)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{1!} {}_1C_1 \frac{x^0}{1^\alpha} \tag{1.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x (\log x)^\alpha dx^2 = x^2 \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} 1^r 2^s \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+2+r+s)} (\log x)^{\alpha+2+r+s} + (-1)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2!} \left({}_2C_1 \frac{x^1}{1^\alpha} - {}_2C_2 \frac{x^0}{2^\alpha} \right) \tag{1.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x (\log x)^\alpha dx^3 = x^3 \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{r+s+t} 1^r 2^s 3^t \times \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+3+r+s+t)} (\log x)^{\alpha+3+r+s+t} + (-1)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{3!} \left({}_3C_1 \frac{x^2}{1^\alpha} - {}_3C_2 \frac{x^1}{2^\alpha} + {}_3C_3 \frac{x^0}{3^\alpha} \right) \tag{1.3}$$

$\vdots$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x (\log x)^\alpha dx^n = x^n \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} (-1)^{\sum_{k=1}^n r_k} \prod_{k=1}^n k^{r_k} \times \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)} (\log x)^{\alpha+n+\sum_{k=1}^n r_k} + (-1)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} {}_nC_k \frac{x^{n-k}}{k^\alpha} \tag{1.n}$$

証明

1階の場合、$g=f^\alpha$, $f=\log x$ を前章の 公式23･3･1の (1.1), (1.1r) に代入すると

$$\int_0^x (\log x)^\alpha dx = x \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r 1^r \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r)} (\log x)^{\alpha+1+r} + R_m^1 \tag{1}$$

$$R_m^1 = (-1)^m 1^m \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)} \int_{-\infty}^f f^{\alpha+m} e^f df \tag{1r}$$

$f \le 0$ のとき、$Lemma\,1$ より

$$\int_{-\infty}^f f^{\alpha+m} e^f df = \frac{f^{\alpha+m}}{(-f)^{\alpha+m}} \Gamma(1+\alpha+m\,,\,-f)$$

であるから、これを (1r) に代入すれば

$$R_m^1 = (-1)^m 1^m \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)} \frac{f^{\alpha+m}}{(-f)^{\alpha+m}} \Gamma(1+\alpha+m\,,\,-f)$$

$$= (-1)^m(-1)^{\alpha+m}1^m\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)}\Gamma(1+\alpha+m\,,\,-f) \qquad \left\{\because \frac{f^{\alpha}}{(-f)^{\alpha}} = (-1)^{\alpha}\right\}$$

i.e.

$$R_m^1 = (-1)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)\cdot\frac{\Gamma(1+\alpha+m\,,\,-f)}{\Gamma(1+\alpha+m)}$$

$m\to\infty$ とすれば

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+m\,,\,-f)}{\Gamma(1+\alpha+m)} = 1$$

従って

$$R_\infty^1 = (-1)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)$$

$f>0$ のとき、*Lemma* 1 より

$$\int_{-\infty}^{f} f^{\alpha+m}e^f df = \frac{f^{\alpha+m}}{(-f)^{\alpha+m}}\Gamma(1+\alpha+m\,,\,-f) + 2i\,sin\{(\alpha+m)\pi\}\,\Gamma(1+\alpha+m)$$

であるから、これを（1r）に代入すれば

$$R_m^1 = (-1)^m1^m\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)}\int_{-\infty}^{f} f^{\alpha+m}e^f df$$

$$= (-1)^m\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)}\left\{\frac{f^{\alpha+m}}{(-f)^{\alpha+m}}\Gamma(1+\alpha+m,\,-f) + 2i\,sin(\alpha\pi+m\pi)\Gamma(1+\alpha+m)\right\}$$

$$= (-1)^m\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)}\left\{(-1)^{-\alpha-m}\Gamma(1+\alpha+m,\,-f) + 2i\,sin(\alpha\pi+m\pi)\Gamma(1+\alpha+m)\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(-1)^{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\alpha+m,\,-f)}{\Gamma(1+\alpha+m)} + 2i\,\Gamma(1+\alpha)(-1)^m sin(\alpha\pi+m\pi)$$

i.e.

$$R_m^1 = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(-1)^{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\alpha+m,\,-f)}{\Gamma(1+\alpha+m)} + 2i\,\Gamma(1+\alpha)sin\alpha\pi$$

よって $m\to\infty$ とすれば

$$R_\infty^1 = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{1}{(-1)^{\alpha}} + 2i\,sin\alpha\pi\right\}$$

ここで

$$\frac{1}{(-1)^{\alpha}} + 2i\,sin\alpha\pi = (-1)^{\alpha}$$

であるから $R_\infty^1 = (-1)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)$ となり、$f\leqq 0$ のときと同結果に帰着する。

かくして (1) は次のようになる。

$$\int_0^x (log\,x)^{\alpha}dx = x^1\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r1^r\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r)}(log\,x)^{\alpha+1+r}$$

$$+ (-1)^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{1!}{}_1C_1\frac{x^0}{1^{\alpha}} \tag{1.1}$$

2階の場合、$g = f^{\alpha}$, $f = \log x$ を前章の 公式23･3･1の (1.2), (1.2r) に代入すると

$$\int_0^x\int_0^x (\log x)^{\alpha} dx^2 = x^2 \sum_{r=0}^{m_1-1}\sum_{s=0}^{m_2-1} (-1)^{r+s} 1^r 2^s \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+2+r+s)} (\log x)^{\alpha+2+r+s} + R_{m_1}^2 \tag{2}$$

$$R_{m_1}^n = (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)} \int_{-\infty}^{f} \left(\int_{-\infty}^{f} f^{\alpha+m_1} e^f df \right) e^f df$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)} \int_{-\infty}^{f} f^{\alpha+1+r+m_2} e^{2f} df \tag{2r}$$

$f \leqq 0$ のとき、$Lemma\,1$ より

$$\int_{-\infty}^{f} f^{\alpha+m_1} e^f df = \frac{f^{\alpha+m_1}}{(-f)^{\alpha+m_1}} \Gamma(1+\alpha+m_1, -f)$$

$$\int_{-\infty}^{f} x^{\alpha+1+r+m_2} e^{2f} df = \frac{f^{\alpha+1+r+m_2}}{(-f)^{\alpha+1+r+m_2}} \frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2, -2f)}{2^{\alpha+1+r+m_2+1}}$$

であるから、これらを (2r) に代入すれば

$$R_{m_1}^2 = (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)} \int_{-\infty}^{f} \left\{ \frac{f^{\alpha+m_1}}{(-f)^{\alpha+m_1}} \Gamma(1+\alpha+m_1, -f) \right\} e^f df$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)} \frac{f^{\alpha+1+r+m_2}}{(-f)^{\alpha+1+r+m_2}} \frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2, -2f)}{2^{\alpha+1+r+m_2+1}}$$

$$= (-1)^{m_1} (-1)^{\alpha+m_1} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)} \left\{ e^f \Gamma(1+\alpha+m_1, -f) - \frac{\Gamma(1+\alpha+m_1, -2f)}{2^{\alpha+m_1+1}} \right\}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} (-1)^{\alpha+1+r+m_2} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)} \frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2, -2f)}{2^{\alpha+1+r+1}}$$

$$= (-1)^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)} \left\{ e^f \Gamma(1+\alpha+m_1, -f) - \frac{\Gamma(1+\alpha+m_1, -2f)}{2^{\alpha+m_1+1}} \right\}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{\alpha+1} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)} \frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2, -2f)}{2^{\alpha+1+r+1}}$$

i.e.

$$R_{m_1}^2 = (-1)^{\alpha} \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{e^f \Gamma(1+\alpha+m_1, -f)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)} - \frac{\Gamma(1+\alpha+m_1, -2f)}{2^{\alpha+m_1+1} \Gamma(1+\alpha+m_1)} \right\}$$

$$- (-1)^{\alpha} \Gamma(1+\alpha) \sum_{r=0}^{m_1-1} \frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2, -2f)}{2^{\alpha+2+r} \Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}$$

$m_1, m_2 \rightarrow \infty$ とすれば

$$R_{\infty}^2 = (-1)^{\alpha} \Gamma(1+\alpha) e^f - (-1)^{\alpha} \Gamma(1+\alpha) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha+2+r}}$$

$$= (-1)^{\alpha} \Gamma(1+\alpha) \left(e^{\log x} - \frac{1}{2^{\alpha+1}} \right)$$

$$= (-1)^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2!}\left(\frac{2x^{1}}{1^{\alpha}}-\frac{x^{0}}{2^{\alpha}}\right)$$

$f>0$ のとき、$Lemma\,1$ より

$$\int_{-\infty}^{f} f^{\alpha+m_1}e^{f}df=\frac{x^{\alpha+m_1}}{(-f)^{\alpha+m_1}}\Gamma(1+\alpha+m_1,\,-f)+2i\sin\{(\alpha+m_1)\pi\}\,\Gamma(1+\alpha+m_1)$$

$$\int_{-\infty}^{f} x^{\alpha+1+r+m_2}e^{2f}df=\frac{f^{\alpha+1+r+m_2}}{(-f)^{\alpha+1+r+m_2}}\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2,\,-2f)}{2^{\alpha+1+r+m_2+1}}$$

$$+2i\sin(\alpha+1+r+m_2)\pi\,\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}{2^{\alpha+1+r+m_2+1}}$$

であるから、これらを(2r)に代入すれば

$$R_{m_1}^{2}=(-1)^{m_1}1^{m_1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\int_{-\infty}^{f}\left\{\frac{f^{\alpha+m_1}}{(-f)^{\alpha+m_1}}\Gamma(1+\alpha+m_1,\,-f)\right\}e^{f}df$$

$$+(-1)^{m_1}1^{m_1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\int_{-\infty}^{f}\{2i\sin\{(\alpha+m_1)\pi\}\,\Gamma(1+\alpha+m_1)\}e^{f}df$$

$$+\sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^{r+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}\frac{f^{\alpha+1+r+m_2}}{(-f)^{\alpha+1+r+m_2}}\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2,\,-2f)}{2^{\alpha+1+r+m_2+1}}$$

$$+\sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^{r+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}\cdot 2i\sin(\alpha+1+r+m_2)\pi\,\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}{2^{\alpha+1+r+m_2+1}}$$

$$=\frac{(-1)^{m_1}}{(-1)^{\alpha+m_1}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\left\{e^{f}\Gamma(1+\alpha+m_1,\,-f)-\frac{\Gamma(1+\alpha+m_1,\,-2f)}{2^{\alpha+m_1+1}}\right\}$$

$$+(-1)^{m_1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}\{2i\sin\{(\alpha+m_1)\pi\}\,\Gamma(1+\alpha+m_1)\}e^{f}$$

$$+\sum_{r=0}^{m_1-1}\frac{(-1)^{r+m_2}}{(-1)^{\alpha+1+r+m_2}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2,\,-2f)}{2^{\alpha+1+r+1}}$$

$$+\sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^{r+m_2}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}\cdot 2i\sin\{(\alpha+1+r+m_2)\pi\}\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}{2^{\alpha+1+r+1}}$$

i.e.

$$R_{m_1}^{2}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(-1)^{\alpha}}\left\{\frac{e^{f}\Gamma(1+\alpha+m_1,\,-f)}{\Gamma(1+\alpha+m_1)}-\frac{\Gamma(1+\alpha+m_1,\,-2f)}{2^{\alpha+m_1+1}\Gamma(1+\alpha+m_1)}\right\}+2i\sin\alpha\pi\,\Gamma(1+\alpha)e^{f}$$

$$+\frac{1}{(-1)^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+2}}\sum_{r=0}^{m_1-1}\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2,\,-2f)}{2^{r}\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}$$

$$+2i\sin\{(\alpha+1)\pi\}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+2}}\sum_{r=0}^{m_1-1}\frac{\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}{2^{r}\Gamma(1+\alpha+1+r+m_2)}$$

$m_1,\,m_2\rightarrow\infty$ とすれば

$$R_\infty^2 = \frac{\Gamma(1+\alpha)e^f}{(-1)^\alpha} + 2i\sin\alpha\pi\,\Gamma(1+\alpha)e^f$$
$$+ \frac{1}{(-1)^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r} + 2i\sin\{(\alpha+1)\pi\}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}$$
$$= \left\{\frac{1}{(-1)^\alpha} + 2i\sin\alpha\pi\right\}\Gamma(1+\alpha)e^{\log x}$$
$$+ \left\{\frac{1}{(-1)^{\alpha+1}} + 2i\sin\{(\alpha+1)\pi\}\right\}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+1}}$$

ここで

$$\frac{1}{(-1)^\alpha} + 2i\sin\alpha\pi = (-1)^\alpha$$

であるから

$$R_\infty^2 = (-1)^\alpha\Gamma(1+\alpha)x + (-1)^{\alpha+1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+1}} = (-1)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2}\left(\frac{2x^1}{1^\alpha} - \frac{x^0}{2^\alpha}\right)$$

となり、$f \leqq 0$ のときと同結果に帰着する。

かくして (2) は次のようになる。

$$\int_0^x\!\!\int_0^x (\log x)^\alpha dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r2^s\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+2+r+s)}(\log x)^{\alpha+2+r+s}$$
$$+ (-1)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2!}\left({}_2C_1\frac{x^1}{1^\alpha} - {}_2C_2\frac{x^0}{2^\alpha}\right) \tag{1.2}$$

以下、帰納法により一般式を得る。

例　$(\log x)^{5/2}$ の3階積分

この積分を *Riemann - Liouville* の積分と (1.3)とにより計算し任意の1点 $x=2$ における両辺の関数値を求めると次のとおり。

```
a = 5 / 2; n = 3; m = 10;
```

$$\texttt{f1[x\_] := } \frac{1}{\text{Gamma}[n]}\int_0^x (x-t)^{n-1}(\text{Log}[t])^a\, dt$$

$$\texttt{fr[x\_] := } x^3\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\sum_{t=0}^{m}(-1)^{r+s+t}1^r2^s3^t\frac{\text{Gamma}[1+a]}{\text{Gamma}[1+a+3+r+s+t]}(\text{Log}[x])^{a+3+r+s+t} +$$
$$(-1)^a\frac{\text{Gamma}[1+a]}{3!}\left(\text{Binomial}[3,1]\frac{x^2}{1^a} - \text{Binomial}[3,2]\frac{x^1}{2^a} + \text{Binomial}[3,3]\frac{x^0}{3^a}\right)$$

```
N[f1[2]]                    N[fr[2]]
0.00675076 + 6.09474 i      0.00675076 + 6.09474 i
```

23·4·2　$(\log x)^m$ の高階積分

***Lemma* 2**

$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、非負の整数 m, n と 正数 λ について次式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda x} x^m dx^n = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{m+n}} \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} (\lambda x)^{m-r}$$

証明

公式23･1･2 において$g(f) = f^m e^f$, $f = \lambda x$ とすれば、

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} (\lambda x)^m e^{\lambda x} dx^n = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \int_{-\infty}^{f}\cdots\int_{-\infty}^{f} f^m e^f df^n$$

ここで16･5 の公式16･5･1’をこの右辺に代入すれば

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} (\lambda x)^m e^{\lambda x} dx^n = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n e^f \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} f^{m-r}$$

i.e.

$$\lambda^m \int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda x} x^m dx^n = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^n} \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} (\lambda x)^{m-r}$$

これより与式を得る。

公式23･4･2

$m=1,2,3,\cdots$ のとき

$$\int_0^x (\log x)^m dx = \frac{m!}{1} x^1 \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r}{1^r} \frac{(\log x)^{m-r}}{(m-r)!} \tag{2.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x (\log x)^m dx^2 = -\frac{m!}{2} x^2 \sum_{r=1}^{m+1} \sum_{s=0}^{m+1-r} \frac{(-1)^{r+s}}{1^r 2^s} \frac{(\log x)^{m+1-r-s}}{(m+1-r-s)!} \tag{2.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x (\log x)^m dx^3 = \frac{m!}{3} x^3 \sum_{r=1}^{m+2} \sum_{s=1}^{m+2-r} \sum_{t=0}^{m+2-r-s} \frac{(-1)^{r+s+t}}{1^r 2^s 3^t} \frac{(\log x)^{m+2-r-s-t}}{(m+2-r-s-t)!} \tag{2.3}$$

$\vdots$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x (\log x)^m dx^n = (-1)^n \frac{m!}{n} x^n \sum_{r_1=1}^{m+n-1} \sum_{r_2=1}^{m+n-1-r_1} \cdots \sum_{r_{n-1}=1}^{m+n-1-\sum_{k=1}^{n-2} r_k} \sum_{r_n=0}^{m+n-1-\sum_{k=1}^{n-1} r_k}$$
$$\times \frac{(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}}{\prod_{k=1}^{n} k^{r_k}} \frac{(\log x)^{m+n-1-\sum_{k=1}^{n} r_k}}{\left(m+n-1-\sum_{k=1}^{n} r_k\right)!} \tag{2.n}$$

証明

1階の場合、$g = f^m$, $f = \log x$ を前章の 公式23･3･1の (1.1), (1.1r) に代入すると

$$\int_0^x (\log x)^m dx = x \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^r 1^r \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r)} (\log x)^{m+1+r} + R_{m_1}^1$$

$$R_{m_1}^1 = (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1)} \int_{-\infty}^{f} f^{m+m_1} e^f df$$

一方、$Lemma\,2$より

$$\int_{-\infty}^{f} e^{f} x^{m+m_1} dx^{n} = e^{f} \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m+m_1)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} f^{m+m_1-r}$$

が従うからこれを$R_{m_1}^{1}$ に代入すれば

$$R_{m_1}^{1} = (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1)} e^{f} \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m+m_1)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} f^{m+m_1-r}$$

$$= (-1)^{m_1} 1^{m_1} e^{\log x} \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} (\log x)^{m+m_1-r}$$

よって

$$\int_0^x (\log x)^m dx = x \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^r 1^r \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r)} (\log x)^{m+1+r}$$

$$+ (-1)^{m_1} 1^{m_1} x \sum_{r=0}^{m+m_1} (-1)^r \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} (\log x)^{m+m_1-r}$$

ここで$m_1 = 1$と置けば

$$\int_0^x (\log x)^m dx = x \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1)} (\log x)^{m+1}$$

$$- x \sum_{r=0}^{m+1} (-1)^r \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1-r)} (\log x)^{m+1-r}$$

$$= x \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1)} (\log x)^{m+1} - x \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1)} (\log x)^{m+1}$$

$$- x \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^r \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1-r)} (\log x)^{m+1-r}$$

$$= x \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} (\log x)^{m-r}$$

i.e.

$$\int_0^x (\log x)^m dx = \frac{m!}{1} x^1 \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r}{1^r} \frac{(\log x)^{m-r}}{(m-r)!} \tag{2.1}$$

2階の場合、$g = f^m$, $f = \log x$ を前章の 公式23・3・1の (1.2), (1.2r) に代入すると

$$\int_0^x\!\!\int_0^x (\log x)^m dx^2 = x^2 \sum_{r=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} (-1)^{r+s} 1^r 2^s \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2+r+s)} (\log x)^{m+2+r+s} + R_{m_1}^{2}$$

$$R_{m_1}^{2} = (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1)} \int_{-\infty}^{f} \left(\int_{-\infty}^{f} f^{m+m_1} e^{f} df \right) e^{f} df$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2)} \int_{-\infty}^{f} f^{m+1+r+m_2} e^{2f} df$$

一方、$Lemma\,2$より

$$\int_{-\infty}^{f} e^{f} f^{m+m_1} dx^{n} = e^{f} \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m+m_1)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} f^{m+m_1-r}$$

$$\int_{-\infty}^{f} e^{2f} f^{m+1+r+m_2} dx = \frac{e^{2f}}{2^{m+1+r+m_2+1}}$$

$$\times \sum_{s=0}^{m+1+r+m_2} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+m+1+r+m_2)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2-s)} (2f)^{m+1+r+m_2-s}$$

$$\int_{-\infty}^{f} e^{2f} f^{m+m_1-r} df = \frac{e^{2f}}{2^{m+m_1-r+1}} \sum_{s=0}^{m+m_1-r} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+m+m_1-r)}{\Gamma(1+m+m_1-r-s)} (2f)^{m+m_1-r-s}$$

が従うから、これらを $R_{m_1}^2$ に代入すれば

$$R_{m_1}^2 = (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1)} \int_{-\infty}^{f} \left\{ e^f \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m+m_1)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} f^{m+m_1-r} \right\} e^f df$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2)} \frac{e^{2f}}{2^{m+1+r+m_2+1}}$$

$$\times \sum_{s=0}^{m+1+r+m_2} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+m+1+r+m_2)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2-s)} (2f)^{m+1+r+m_2-s}$$

$$= (-1)^{m_1} 1^{m_1} \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} \int_{-\infty}^{f} e^{2f} f^{m+m_1-r} df$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{e^{2f}}{2^1} \sum_{s=0}^{m+1+r+m_2} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2-s)} \frac{f^{m+1+r+m_2-s}}{2^s}$$

$$= (-1)^{m_1} 1^{m_1} \sum_{r=0}^{m+m_1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1-r)} \frac{e^{2\log x}}{2^{m+m_1-r+1}}$$

$$\times \sum_{s=0}^{m+m_1-r} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+m+m_1-r)}{\Gamma(1+m+m_1-r-s)} (2f)^{m+m_1-r-s}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{e^{2\log x}}{2} \sum_{s=0}^{m+1+r+m_2} \binom{-1}{s} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2-s)} \frac{f^{m+1+r+m_2-s}}{2^s}$$

$$= (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{x^2}{2} \sum_{r=0}^{m+m_1} (-1)^r \sum_{s=0}^{m+m_1-r} (-1)^s \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1-r-s)} \frac{(\log x)^{m+m_1-r-s}}{2^s}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{x^2}{2} \sum_{s=0}^{m+1+r+m_2} (-1)^s \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2-s)} \frac{(\log x)^{m+1+r+m_2-s}}{2^s}$$

よって

$$\int_0^x\!\!\int_0^x (\log x)^m dx^2 = x^2 \sum_{r=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} (-1)^{r+s} 1^r 2^s \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2+r+s)} (\log x)^{m+2+r+s}$$

$$+ (-1)^{m_1} 1^{m_1} \frac{x^2}{2} \sum_{r=0}^{m+m_1} \sum_{s=0}^{m+m_1-r} (-1)^{r+s} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+m_1-r-s)} \frac{(\log x)^{m+m_1-r-s}}{2^s}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1} (-1)^{r+m_2} 1^{m_1} 2^{m_2} \frac{x^2}{2} \sum_{s=0}^{m+1+r+m_2} (-1)^s \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1+r+m_2-s)} \frac{(\log x)^{m+1+r+m_2-s}}{2^s}$$

ここで $m_1=m_2=1$ と置けば

$$\int_0^x\int_0^x(\log x)^m dx^2=x^2\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2)}(\log x)^{m+2}$$

$$-\frac{x^2}{2}\sum_{r=0}^{m+1}\sum_{s=0}^{m+1-r}(-1)^{r+s}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1-r-s)}\frac{(\log x)^{m+1-r-s}}{2^s}$$

$$+x^2\sum_{s=0}^{m+2}(-1)^{s+1}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2-s)}\frac{(\log x)^{m+2-s}}{2^s}$$

$$=x^2\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2)}(\log x)^{m+2}-x^2\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2)}\frac{(\log x)^{m+2}}{2^0}$$

$$-x^2\sum_{s=0}^{m+1}(-1)^s\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1-s)}\frac{(\log x)^{m+1-s}}{2^{s+1}}$$

$$-\frac{x^2}{2}\sum_{r=1}^{m+1}\sum_{s=0}^{m+1-r}(-1)^{r+s}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1-r-s)}\frac{(\log x)^{m+1-r-s}}{2^s}$$

$$+x^2\sum_{s=1}^{m+2}(-1)^{s+1}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+2-s)}\frac{(\log x)^{m+2-s}}{2^s}$$

$$=-\frac{x^2}{2}\sum_{r=1}^{m+1}\sum_{s=0}^{m+1-r}(-1)^{r+s}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m+1-r-s)}\frac{(\log x)^{m+1-r-s}}{2^s}$$

i.e.

$$\int_0^x\int_0^x(\log x)^m dx^2=-\frac{m!}{2}x^2\sum_{r=1}^{m+1}\sum_{s=0}^{m+1-r}\frac{(-1)^{r+s}}{1^r2^s}\frac{(\log x)^{m+1-r-s}}{(m+1-r-s)!} \tag{2.2}$$

以下、帰納法により一般式を得る。

例　$(\log x)^4$ の3階積分

(2.3) において $m=4$ として数式ソフトで計算すると次のようになる。

```
m = 4;
```

$$\text{f1}[x\_] := \int_0^x\int_0^v\int_0^u (\text{Log}[t])^m\,dt\,du\,dv$$

$$\text{fr}[x\_] := \frac{m!}{3}x^3\sum_{r=1}^{m+2}\sum_{s=1}^{m+2-r}\sum_{t=0}^{m+2-r-s}\frac{(-1)^{r+s+t}}{1^r2^s3^t}\frac{(\text{Log}[x])^{m+2-r-s-t}}{(m+2-r-s-t)!}$$

```
Expand[f1[x]]
```

$$\frac{3661x^3}{324}-\frac{575}{54}x^3\,\text{Log}[x]+\frac{85}{18}x^3\,\text{Log}[x]^2-\frac{11}{9}x^3\,\text{Log}[x]^3+\frac{1}{6}x^3\,\text{Log}[x]^4$$

```
Expand[fr[x]]
```

$$\frac{3661x^3}{324}-\frac{575}{54}x^3\,\text{Log}[x]+\frac{85}{18}x^3\,\text{Log}[x]^2-\frac{11}{9}x^3\,\text{Log}[x]^3+\frac{1}{6}x^3\,\text{Log}[x]^4$$

23·5 $1/\log x$ の高階積分

公式23·5·1

γ をオイラーの定数 (=0.5772…) とし $\Gamma(z),\psi(z)$ をガンマ関数、ディガンマ関数とするとき、$x\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \frac{1}{\log x}dx = x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r 1^r \frac{\log|\log x|-\psi(1+r)-\gamma}{\Gamma(1+r)}(\log x)^r + \frac{\gamma+\log 1}{0!} \tag{1.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r 2^s \frac{\log|\log x|-\psi(2+r+s)-\gamma}{\Gamma(2+r+s)}(\log x)^{1+r+s}$$
$$+\frac{1}{1!}\{(\gamma+\log 1)x-(\gamma+\log 2)\} \tag{1.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^3 = x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}1^r 2^s 3^t$$
$$\times\frac{\log|\log x|-\psi(3+r+s+t)-\gamma}{\Gamma(3+r+s+t)}(\log x)^{2+r+s+t}$$
$$+\frac{1}{2!}\{(\gamma+\log 1)x^2-2(\gamma+\log 2)x+(\gamma+\log 3)\} \tag{1.3}$$

⋮

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^n = x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}$$
$$\times\frac{\log|\log x|-\psi\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)-\gamma}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\{\gamma+\log(r+1)\}x^{n-1-r} \tag{1.n}$$

導出

$g=1/f$ 故 $f>0$ について

$$g^{<k>}=(\log f)^{<k-1>}=\frac{\log f-\psi(k)-\gamma}{\Gamma(k)}f^{k-1} \qquad k=1,2,3,\cdots$$

であるから

$$g^{\left\langle n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right\rangle}=\frac{\log f-\psi\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)-\gamma}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}f^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k-1}$$

$$g^{\langle m_1\rangle}=\frac{\log f-\psi(m_1)-\gamma}{\Gamma(m_1)}f^{m_1-1}$$

$$g^{\langle 1+r_1+m_2\rangle}=\frac{\log f-\psi(1+r_1+m_2)-\gamma}{\Gamma(1+r_1+m_2)}f^{1+r_1+m_2-1}$$

$\vdots$

$$g^{\left\langle n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right\rangle}=\frac{\log f-\psi\left(n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)-\gamma}{\Gamma\left(n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)}f^{\,n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n-1}$$

これらを 公式23･3･1 に代入し非剰余項において f を x に戻せば、$[-\infty,f]\rightarrow[0,x]$ であるから

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{1}{\log x}dx^n=x^n\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{m_n-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}$$
$$\times\frac{\log|\log x|-\psi\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)-\gamma}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k-1}+R_{m_1}^n \qquad \text{(n)}$$

$$R_{m_1}^n=(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f\cdots\left(\int_{-\infty}^f\frac{\log f-\psi(m_1)-\gamma}{\Gamma(m_1)}f^{\,m_1-1}e^fdf\right)\cdots e^fdf\right)e^fdf\right)e^fdf$$
$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}(-1)^{r_1+m_2}1^{m_1}2^{m_2}$$
$$\times\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f\cdots\left(\int_{-\infty}^f\frac{\log f-\psi(1+r_1+m_2)-\gamma}{\Gamma(1+r_1+m_2)}f^{\,r_1+m_2}e^{2f}df\right)\cdots e^fdf\right)e^fdf$$
$$\vdots$$
$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_{n-1}=0}^{m_{n-1}-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n}\prod_{k=1}^{n}k^{m_k}$$
$$\times\int_{-\infty}^f\frac{\log f-\psi\left(n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)-\gamma}{\Gamma\left(n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)}f^{\,n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n-1}e^{nf}df \qquad \text{(n.r)}$$

1階のとき

$$\int_0^x\frac{1}{\log x}dx=x\sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^r1^r\frac{\log|\log x|-\psi(1+r)-\gamma}{\Gamma(1+r)}(\log x)^r+R_{m_1}^1$$

$$R_{m_1}^1=(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^f\frac{\log f-\psi(m_1)-\gamma}{\Gamma(m_1)}f^{\,m_1-1}e^fdf$$

であるが、ここで驚くべきことに、$m_1\rightarrow\infty$ とすれば

$$\lim_{m_1\rightarrow\infty}R_{m_1}^1=\lim_{m_1\rightarrow\infty}(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^f\frac{\log f-\psi(m_1)-\gamma}{\Gamma(m_1)}f^{\,m_1-1}e^fdf=\gamma \qquad \text{(1r)}$$

となり、従って

$$\int_0^x\frac{1}{\log x}dx=x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r1^r\frac{\log|\log x|-\psi(1+r)-\gamma}{\Gamma(1+r)}(\log x)^r+\gamma \qquad \text{(1.1)}$$

2階のとき

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{m_1-1}\sum_{s=0}^{m_2-1}(-1)^{r+s}1^r2^s\frac{\log|\log x| - \psi(2+r+s) - \gamma}{\Gamma(2+r+s)}(\log x)^{2+r+s-1} + R_{m_1}^2$$

$$R_{m_1}^2 = \sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^{r+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f - \psi(1+r+m_2) - \gamma}{\Gamma(1+r+m_2)}f^{1+r+m_2-1}e^{2f}df$$
$$+ (-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f - \psi(m_1) - \gamma}{\Gamma(m_1)}f^{m_1-1}e^{f}df\right)e^{f}df$$

であるが、ここでまた、$m_1, m_2 \to \infty$ とすれば

$$\lim_{m_i\to\infty}R_{m_1}^2 = \gamma x - (\gamma+\log 2) \quad i=1,2 \tag{2r}$$

となり、従って

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r2^s\frac{\log|\log x| - \psi(2+r+s) - \gamma}{\Gamma(2+r+s)}(\log x)^{1+r+s}$$
$$+ (\gamma+\log 1)x - (\gamma+\log 2) \tag{1.2}$$

を得、3階のときも

$$\int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^3 = x^3\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\sum_{r_3=0}^{m_3-1}(-1)^{r_1+r_2+r_3}1^{r_1}2^{r_2}3^{r_3}$$
$$\times\frac{\log f - \psi(3+r_1+r_2+r_3) - \gamma}{\Gamma(3+r_1+r_2+r_3)}f^{2+r_1+r_2+r_3} + R_{m_1}^3$$

$$R_{m_1}^3 = \sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}(-1)^{r_1+r_2+m_3}1^{m_1}2^{m_2}3^{m_3}\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f - \psi(2+r_1+r_2+m_3) - \gamma}{\Gamma(2+r_1+r_2+m_3)}f^{1+r_1+r_2+m_3}e^{3f}df$$
$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}(-1)^{r_1+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f - \psi(1+r_1+m_2) - \gamma}{\Gamma(1+r_1+m_2)}f^{r_1+m_2}e^{2f}df\right)e^{f}df$$
$$+ (-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f - \psi(m_1) - \gamma}{\Gamma(m_1)}f^{m_1-1}e^{f}df\right)e^{f}df\right)e^{f}df$$

より

$$\lim_{m_i\to\infty}R_{m_1}^3 = \frac{\gamma}{2!}x^2 - \frac{\gamma+\log 2}{1!}x + \frac{\gamma+\log 3}{2!} \quad i=1,2,3 \tag{3r}$$

従って

$$\int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^3 = x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}1^r2^s3^t$$
$$\times\frac{\log|\log x| - \psi(3+r+s+t) - \gamma}{\Gamma(3+r+s+t)}(\log x)^{2+r+s+t}$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{(\gamma+\log 1)x^2 - 2(\gamma+\log 2)x + (\gamma+\log 3)\right\} \tag{1.3}$$

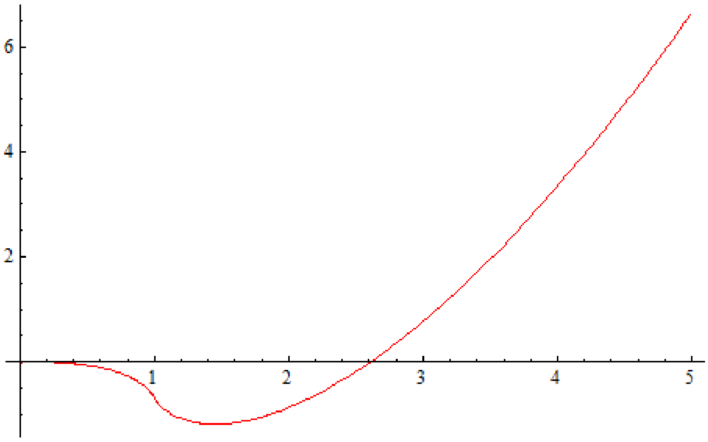
となり、以下帰納法により (1.n) を得る。

問題は (1r), (2r), (3r), … であるが、これらの証明は困難である。しかし数値計算上は間違いなく成立している。

例　$1/\log x$ の2階積分

(1.2) の両辺を数式ソフトで図示すると次のとおりである。青が左辺で赤が右辺であるが、両辺はぴったり重なっているため青(左辺)は見えない。

```
m = 15;
fl[x_] = ∫_0^x ∫_0^u 1/Log[t] dt du;
fr[x_] = x^2 Σ_{r=0}^m Σ_{s=0}^m (-1)^(r+s) 1^r 2^s (Log[Abs[Log[x]]] - PolyGamma[2 + r + s] - EulerGamma)/Gamma[2 + r + s] (Log[x])^(1+r+s)
    + (EulerGamma + Log[1]) x - (EulerGamma + Log[2]);
```



Note

従って対数積分 $li(x)\ \left(=\int_0^x \frac{1}{\log t}dt\right)$ の高階積分は次のように表される。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x li(x)dx^n = x^{n+1}\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n+1}k^{r_k}$$

$$\times\frac{\log|\log x| - \psi\left(1+n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right) - \gamma}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nC_r\{\gamma+\log(r+1)\}x^{n-r} \tag{1,n}$$

$li(x)$ の高階積分の公式としては指数積分 $Ei(x)$ を用いた 公式14･4･3(14･4)の方が簡明であり、公式23･5･1 はいかにも煩雑で有難味がなさそうである。しかし両者には決定的な違いがある。それは (1,n) を調和数 H_n と階乗！を用いて次のように書き直してみればよく分かる。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x li(x)dx^n = x^{n+1}\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n+1}k^{r_k}\frac{\log|\log x| - H_{n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nC_r\{\gamma+\log(r+1)\}x^{n-r} \tag{1.n}$$

即ち、公式14･4･3が非初等関数で表わされているのに対し、(1.n) は初等関数で表されている。ここに 公式23･5･1の意義がある。

さて、この 公式23･5･1 はもう少し簡略化することができる。そのためには次の2つの Lemma が必要である。

Lemma 3

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{\Gamma(1+r)}x^r=\frac{1}{0!}\frac{1}{e^x}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r2^s}{\Gamma(2+r+s)}x^{1+r+s}=\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{\Gamma(3+r+s+t)}x^{2+r+s+t}=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{3x}}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}x^{n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{{}_{n-1}C_r}{e^{1+r}}$$

証明

帰納法による。詳しくは「アラカルト」において1章設けて論ずる。

Lemma3 において x を $\log x$ と置くことにより直ちに次の Lemma を得る。

Lemma 3′

$$x^1\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{\Gamma(1+r)}(\log x)^r=\frac{x^0}{0!}$$

$$x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r2^s}{\Gamma(2+r+s)}(\log x)^{1+r+s}=\frac{(x-1)^1}{1!}$$

$$x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{\Gamma(3+r+s+t)}(\log x)^{2+r+s+t}=\frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{3'.n}$$

この Lemma3’ を用いれば 公式23･5･1 は次のように簡単になる。

公式23･5･1’

$\Gamma(z),\psi(z)$ をガンマ関数、ディガンマ関数とするとき、$x\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \frac{1}{\log x}dx = -x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r 1^r \frac{\psi(1+r)}{\Gamma(1+r)}(\log x)^r$$

$$+\frac{1}{0!}\left\{(x-1)^0 \log|\log x| + x^0 \log 1\right\} \tag{1.1'}$$

$$\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^2 = -x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r 2^s \frac{\psi(2+r+s)}{\Gamma(2+r+s)}(\log x)^{1+r+s}$$

$$+\frac{1}{1!}\left\{(x-1)^1 \log|\log x| + x^1 \log 1 - x^0 \log 2\right\} \tag{1.2'}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^3 = -x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}1^r 2^s 3^t$$

$$\times \frac{\psi(3+r+s+t)}{\Gamma(3+r+s+t)}(\log x)^{2+r+s+t}$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{(x-1)^2 \log|\log x| + x^2 \log 1 - 2x^1 \log 2 + x^0 \log 3\right\} \tag{1.3'}$$

$\vdots$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^n = -x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^n k^{r_k}\frac{\psi\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left\{(x-1)^{n-1}\log|\log x| - \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_r x^r \log(n-r)\right\} \tag{1.n'}$$

導出

公式23･5･1の (1.n) に Lemma3'の (3'n) を代入すれば

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{1}{\log x}dx^n = -x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^n k^{r_k}\frac{\psi\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+(\log|\log x|-\gamma)x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\frac{\prod_{k=1}^n k^{r_k}}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\{\gamma+\log(r+1)\}x^{n-1-r}$$

$$= -x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^n k^{r_k}\frac{\psi\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+\frac{\log|\log x|}{(n-1)!}(x-1)^{n-1} - \frac{\gamma}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}$$

$$+\frac{\gamma}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r x^{n-1-r} + \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r x^{n-1-r}\log(r+1)$$

$$= -x^n \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\prod_{k=1}^{n} k^{r_k}\frac{\psi\left(n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^{n} r_k}$$

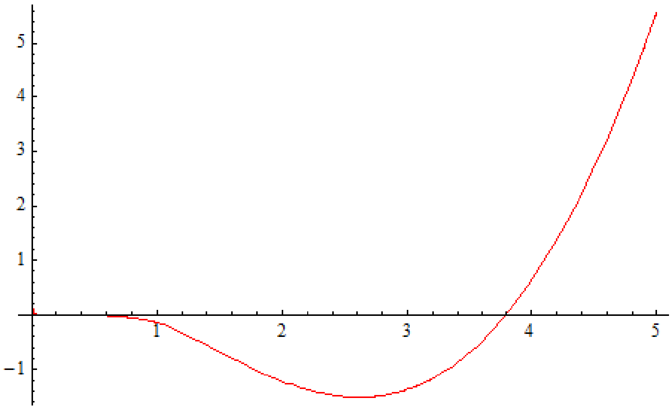
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left\{(x-1)^{n-1}\log\log x - \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_r x^r \log(n-r)\right\}$$

$$\left\{\because \quad \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r x^{n-1-r}\log(r+1) = -\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_r x^r\log(n-r)\right\}$$

例 $1/\log x$ の3階積分（ $li(x)$ の2階積分）

(1.3') の両辺を数式ソフトで図示すると次のとおりである。青が左辺で赤が右辺であるが、両辺はぴったり重なっているため青（左辺）は見えない。

```
m = 15;
fl[x_] = ∫_0^x ∫_0^v ∫_0^u 1/Log[t] dt du dv;
fr[x_] = -x^3 Sum_{r=0}^m Sum_{s=0}^m Sum_{t=0}^m (-1)^(r+s+t) 1^r 2^s 3^t PolyGamma[3 + r + s + t]/Gamma[3 + r + s + t] (Log[x])^(2+r+s+t)
    + 1/2! ((x - 1)^2 Log[Abs[Log[x]]] + x^2 Log[1] - 2 x^1 Log[2] + x^0 Log[3]);
```



23·6 $\log|\log x|$ の高階積分

公式23·6·1

γ をオイラーの定数 (=0.5772…) とし $\Gamma(z),\psi(z)$ をガンマ関数、ディガンマ関数とするとき、$x\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \log|\log x|\,dx = x\sum_r^{\infty}(-1)^r 1^r\frac{\log|\log x|-\psi(2+r)-\gamma}{\Gamma(2+r)}(\log x)^{1+r}-\gamma \tag{1.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x \log|\log x|\,dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r 2^s\frac{\log|\log x|-\psi(3+r+s)-\gamma}{\Gamma(3+r+s)}(\log x)^{2+r+s}$$
$$-\frac{1}{2!}\{2(\gamma+\log 1)x-(\gamma+\log 2)\} \tag{1.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \log|\log x|\,dx^3$$
$$=x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}1^r 2^s 3^t\frac{\log|\log x|-\psi(4+r+s+t)-\gamma}{\Gamma(4+r+s+t)}(\log x)^{3+r+s+t}$$
$$-\frac{1}{3!}\left\{3(\gamma+\log 1)x^2-3(\gamma+\log 2)x+(\gamma+\log 3)\right\} \tag{1.3}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log|\log x|\,dx^n$$
$$=x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^n k^{r_k}\frac{\log|\log x|-\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)-\gamma}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^n r_k}$$
$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_nC_r(\gamma+\log r)x^{n-r} \tag{1.n}$$

導出

$g=\log f\ ,\ f=\log x$ 故

$$g^{\left\langle n+\sum_{k=1}^n r_k\right\rangle}=\frac{\log f-\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)-\gamma}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}f^{\,n+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$g^{\langle m_1\rangle}=\frac{\log f-\psi(1+m_1)-\gamma}{\Gamma(1+m_1)}f^{m_1}$$

$$g^{\langle 1+r_1+m_2\rangle}=\frac{\log f-\psi(1+1+r_1+m_2)-\gamma}{\Gamma(1+1+r_1+m_2)}f^{1+r_1+m_2}$$

$$g^{\langle 2+r_1+r_2+m_3\rangle}=\frac{\log f-\psi(1+2+r_1+r_2+m_3)-\gamma}{\Gamma(1+2+r_1+r_2+m_3)}f^{2+r_1+r_2+m_3}$$

$$g^{\left\langle n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right\rangle}=\frac{\log f-\psi\left(1+n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)-\gamma}{\Gamma\left(1+n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)}f^{\,n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n}$$

これらを 公式23･3･1 に代入して非剰余項の関数 f を元に戻せば $[-\infty, f]\to[0, x]$ だから

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log|\log x|\,dx^n=x^n\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{m_n-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}$$

$$\times\frac{\log|\log x|-\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)-\gamma}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}+R_{m_1}^{n} \qquad \text{(n)}$$

$$R_{m_1}^{n}=$$

$$(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\cdots\left(\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f-\psi(1+m_1)-\gamma}{\Gamma(1+m_1)}f^{m_1}e^f df\right)\cdots e^f df\right)e^f df\right)e^f df$$

$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}(-1)^{r_1+m_2}1^{m_1}2^{m_2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{f}\left(\int_{-\infty}^{f}\cdots\left(\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f-\psi(2+r_1+m_2)-\gamma}{\Gamma(2+r_1+m_2)}f^{1+r_1+m_2}e^{2f}df\right)\cdots e^f df\right)e^f df$$

$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}(-1)^{r_1+r_2+m_3}1^{m_1}2^{m_2}3^{m_3}$$

$$\times\int_{-\infty}^{f}\cdots\left(\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f-\psi(3+r_1+r_2+m_3)-\gamma}{\Gamma(3+r_1+r_2+m_3)}f^{2+r_1+r_2+m_3}e^{3f}df\right)\cdots e^f df$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_1=0}^{m_1-1}\sum_{r_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{r_{n-1}=0}^{m_{n-1}-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n}\prod_{k=1}^{n}k^{m_k}$$

$$\times\int_{-\infty}^{f}\frac{\log f-\psi\left(n+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)-\gamma}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n\right)}f^{\,n-1+\sum_{k=1}^{n-1}r_k+m_n}e^{nf}df \qquad \text{(nr)}$$

1階のとき

$$\int_0^x \log|\log x|\,dx=x\sum_{r}^{m_1-1}(-1)^r 1^r\,\frac{\log|\log x|-\psi(2+r)-\gamma}{\Gamma(2+r)}(\log x)^{1+r}+R_{m_1}^{1}$$

$$R_{m_1}^{1}=(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^{f}\frac{\log|f|-\psi(1+m_1)-\gamma}{\Gamma(1+m_1)}f^{m_1}e^f df$$

であるが、ここで驚くべきことに、$m_1\to\infty$ とすれば

$$\lim_{m_1\to\infty}R_{m_1}^{1}=\lim_{m_1\to\infty}(-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^{f}\frac{\log|f|-\psi(1+m_1)-\gamma}{\Gamma(1+m_1)}f^{m_1}e^f df=-\gamma \qquad \text{(1r)}$$

従って

$$\int_0^x log|log x|dx = x\sum_r^{\infty}(-1)^r 1^r \frac{log|log x| - \psi(2+r) - \gamma}{\Gamma(2+r)}(log x)^{1+r} - \gamma \tag{1.1}$$

2階のとき

$$\int_0^x\int_0^x log|log x|dx^2$$

$$= x^2\sum_{r=0}^{m_1-1}\sum_{s=0}^{m_2-1}(-1)^{r+s}1^r 2^s \frac{log|log x| - \psi(3+r+s) - \gamma}{\Gamma(3+r+s)}(log x)^{2+r+s} + R_{m_1}^2$$

$$R_{m_1}^2 = \sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^{r+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{-\infty}^f \frac{log|f| - \psi(2+r+m_2) - \gamma}{\Gamma(2+r+m_2)} f^{1+r+m_2}e^{2f}df$$

$$+ (-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f \frac{log|f| - \psi(1+m_1) - \gamma}{\Gamma(1+m_1)} f^{m_1}e^f df\right)e^f df$$

ここでまた、$m_1, m_2 \to \infty$ とすれば

$$\lim_{m_i\to\infty} R_{m_1}^2 = -\frac{1}{2!}\{2(\gamma + log 1)x - (\gamma + log 2)\} \qquad (i=1,2) \tag{2r}$$

となり、従って

$$\int_0^x\int_0^x log|log x|dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r 2^s \frac{log|log x| - \psi(3+r+s) - \gamma}{\Gamma(3+r+s)}(log x)^{2+r+s}$$

$$-\frac{1}{2!}\{2(\gamma + log 1)x - (\gamma + log 2)\} \tag{1.2}$$

3階のときも

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x log|log x|dx^3$$

$$= x^3\sum_{r=0}^{m_1-1}\sum_{s=0}^{m_2-1}\sum_{t=0}^{m_3-1}(-1)^{r+s+t}1^r 2^s 3^t \frac{log|log x| - \psi(4+r+s+t) - \gamma}{\Gamma(4+r+s+t)}(log x)^{3+r+s+t}$$

$$+ R_{m_1}^3$$

$$R_{m_1}^3 = \sum_{r=0}^{m_1-1}\sum_{s=0}^{m_2-1}(-1)^{r+s+m_3}1^{m_1}2^{m_2}3^{m_3}\int_{-\infty}^f \frac{log|f| - \psi(3+r+s+m_3) - \gamma}{\Gamma(3+r+s+m_3)} f^{2+r+s+m_3}e^{3f}df$$

$$+ \sum_{r=0}^{m_1-1}(-1)^{r+m_2}1^{m_1}2^{m_2}\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f \frac{log|f| - \psi(2+r+m_2) - \gamma}{\Gamma(2+r+m_2)} f^{1+r+m_2}e^{2f}df\right)e^f df$$

$$+ (-1)^{m_1}1^{m_1}\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f\left(\int_{-\infty}^f \frac{log|f| - \psi(1+m_1) - \gamma}{\Gamma(1+m_1)} f^{m_1}e^f df\right)e^f df\right)e^f df$$

そして

$$\lim_{m_i\to\infty} R_{m_1}^3 = -\frac{1}{3!}\left\{3(\gamma + log 1)x^2 - 3(\gamma + log 2)x + (\gamma + log 3)\right\} \quad (i=1,2,3) \tag{3r}$$

従って

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x log|log x|dx^3$$

$$= x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}1^r 2^s 3^t \frac{log|log x| - \psi(4+r+s+t) - \gamma}{\Gamma(4+r+s+t)}(log x)^{3+r+s+t}$$

$$-\frac{1}{3!}\left\{3(\gamma+\log 1)x^2-3(\gamma+\log 2)x+(\gamma+\log 3)\right\} \qquad (1.3)$$

となり、以下帰納法により一般式を得る。

(1r), (2r), (3r), … の証明は困難であるが、数値計算上は間違いなく成立している。

例　$\log|\log x|$ の2階積分

(1.2) の任意の1点 $x=4.7$ における両辺の関数値を求めると次のとおり。

```
m = 15;

f1[x_] := ∫_0^x ∫_0^u Log[Abs[Log[t]]] dt du

fr[x_] := x^2 Sum[Sum[(-1)^(r+s) 1^r 2^s (Log[Abs[Log[x]]] - PolyGamma[3 + r + s] - EulerGamma)/Gamma[3 + r + s] (Log[x])^(2+r+s), {s,0,m}], {r,0,m}]
      - 1/2! (2 (EulerGamma + Log[1]) x - (EulerGamma + Log[2]))

N[f1[4.7]]          N[fr[4.7]]
-6.07051            -6.07051
```

Note

$\log|\log x|$ の高階積分の公式としては $Ei(x)$ を用いた公式14･5･1(14･5)の方が簡明であり、公式23･6･1はいかにも煩雑で有難味がなさそうに見える。しかし両者には決定的な違いがある。それは例えば(1.2)を調和数 H_n と階乗！を用いて次のように書き直してみればよく分かる

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \log|\log x|\,dx^2 = x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r 2^s\frac{\log|\log x|-H_{2+r+s}}{(2+r+s)!}(\log x)^{2+r+s}$$

$$-\frac{1}{2!}\{2(\gamma+\log 1)x-(\gamma+\log 2)\} \qquad (1.2)$$

即ち、公式14･5･1が非初等関数で表わされているのに対し、(1.2) は初等関数で表されている。ここに公式23･6･1の意義がある。

この 公式23･6･1 ももう少し簡略化することができる。これを示すには次の2つの Lemma が必要である。

Lemma 4

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{\Gamma(2+r)}x^{1+r}=\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r2^s}{\Gamma(3+r+s)}x^{2+r+s}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{2}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{\Gamma(4+r+s+t)}x^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{e^x}+\frac{3}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{3x}}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_nC_r}{e^r}$$

証明

帰納法による。詳しくは「アラカルト」において1章設けて論ずる。Lemma3 からも導出可能。

Lemma4 において x を $\log x$ と置くことにより直ちに次の Lemma を得る。

***Lemma* 4'**

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{\Gamma(2+r)}(\log x)^{1+r}=\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r2^s}{\Gamma(3+r+s)}(\log x)^{2+r+s}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{\Gamma(4+r+s+t)}(\log x)^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^n \tag{4'n}$$

この Lemma4' を用いれば 公式23･6･1 は次のように簡単になる。

公式23･6･1'

γ をオイラーの定数 (=0.5772…) とし $\Gamma(z),\psi(z)$ をガンマ関数、ディガンマ関数とするとき、$x\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x\log|\log x|\,dx=-x\sum_{r}^{\infty}(-1)^r1^r\frac{\psi(2+r)}{\Gamma(2+r)}(\log x)^{1+r}+\frac{1}{1!}\left\{(\log|\log x|-\gamma)(x-1)^1-(\gamma+\log 1)x^0\right\} \tag{1.1'}$$

$$\int_0^x\!\!\int_0^x\log|\log x|\,dx^2=-x^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}1^r2^s\frac{\psi(3+r+s)}{\Gamma(3+r+s)}(\log x)^{2+r+s}+\frac{1}{2!}\left\{(\log|\log x|-\gamma)(x-1)^2+\sum_{r=1}^{2}(-1)^r{}_2C_r(\gamma+\log r)x^{2-r}\right\} \tag{1.2'}$$

$$\int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x\log|\log x|\,dx^3=-x^3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}1^r2^s3^t\frac{\psi(4+r+s+t)}{\Gamma(4+r+s+t)}(\log x)^{3+r+s+t}+\frac{1}{3!}\left\{(\log|\log x|-\gamma)(x-1)^3+\sum_{r=1}^{3}(-1)^r{}_3C_r(\gamma+\log r)x^{3-r}\right\} \tag{1.3'}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x\log|\log x|\,dx^n=-x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}+\frac{1}{n!}\left\{(\log|\log x|-\gamma)(x-1)^n+\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_nC_r(\gamma+\log r)x^{n-r}\right\} \tag{1.n'}$$

導出

公式23･6･1の (1.n) に Lemma4'の (4'.n) を代入すれば

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log|\log x|\,dx^n$$

$$= -x^n \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n} r_k}$$

$$+(\log|\log x|-\gamma)x^n \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n} r_k}$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_nC_r(\gamma+\log r)x^{n-r}$$

$$= -x^n \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n} r_k}$$

$$+(\log|\log x|-\gamma)\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^n+\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_nC_r(\gamma+\log r)x^{n-r}$$

$$= -x^n \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n} r_k}$$

$$+\frac{1}{n!}\left\{(\log|\log x|-\gamma)(x-1)^n+\sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_nC_r(\gamma+\log r)x^{n-r}\right\}$$

例　$\log|\log x|$ の3階積分

(1.3') の任意の1点 $x=4.9$ における両辺の関数値を求めると次のとおり。

```
m = 17;

fl[x_] := ∫_0^x ∫_0^v ∫_0^u Log[Abs[Log[t]]] dt du dv

fr[x_] := -x^3 Σ_{r=0}^{m} Σ_{s=0}^{m} Σ_{t=0}^{m} (-1)^(r+s+t) 1^r 2^s 3^t PolyGamma[4 + r + s + t]/Gamma[4 + r + s + t] (Log[x])^(3+r+s+t)
    + 1/3! ((Log[Abs[Log[x]]] - EulerGamma) (x - 1)^3
        + Σ_{r=1}^{3} (-1)^r Binomial[3, r] (EulerGamma + Log[r]) x^(3-r))

N[fl[4.9]]        N[fr[4.9]]
-11.999           -11.999
```

23･7 合成関数の超積分化の可能性

23･1 の 公式23･1･1 の式から分るように、合成関数 $g\{f(x)\}$ の n 階積分は一般に $n(n+1)/2$ 重 級数になる。従って例えば $g\{f(x)\}$ の 1.5 階積分は 1.875 重級数で表されることになるが、このような多重級数は存在しない。即ち公式23･1･1の超積分化は不可能である。

しかしながら、入れ子関数が1次式の場合には 公式23･1･2 により

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \{g(f(x))\}dx^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n \int_{f_a}^f \cdots \int_{f_a}^f g(f)\,df^n \qquad f(x)=cx+d$$

であったから、、この定義域を自然数 n から実数 p に拡張することに何の不都合もない。

かくして実数 $p>0$ について

$$\int_a^x \sim \int_a^x \{g(f(x))\}dx^p = \left(\frac{1}{c}\right)^p \int_{f_a}^f \sim \int_{f_a}^f g(f)\,df^p \qquad f(x)=cx+d$$

が成立する。

これが「07 **超積分**」以下で既成事実として使ってきた「線形式」の根拠である。

2007.10.18

K. Kono

宇宙人の数学