24 高階(重回)積分級数に関する杉岡の定理

2003年3月、杉岡幹生氏は任意の関数の高階積分の級数が単積分で求められることを発見された(http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page030.htm)。筆者はこの定理を「16 2関数の積の高階積分」の1節で紹介していたが、杉岡氏はその後も諸々の定理を発見されたので1節内に収まらなくなった。 そこでここに独立の章を設け、杉岡氏の素晴らしい諸定理を紹介することにした。

なお、氏はこの定理を「作用素の定理」と名付けられたが、本稿では内容が分かり易いように表記のような名前にした。

24·1 自然数階積分級数

本節では、次のような高階積分級数の和を求める。

$$\int_a^x f(x)\,dx \pm \int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^2 + \int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^3 \pm \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^4 + \pm \cdots$$

定理24·1·1 (杉岡の定理3)

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r = e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx - e^x\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^{-x}dx \tag{1.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r = e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx \tag{1.1'}$$

証明

$$f^{<r>}(x) = \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r \qquad r=1,2,\cdots,m \tag{1.r}$$

とすれば、$f^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m)$ である。よって

$$\int_a^x f(x)e^{-x}dx = \left[f^{<1>}(x)e^{-x}\right]_a^x + \int_a^x f^{<1>}(x)e^{-x} = f^{<1>}(x)e^{-x} + \int_a^x f^{<1>}(x)e^{-x}$$

$$= f^{<1>}(x)e^{-x} + \left[f^{<2>}(x)e^{-x}\right]_a^x + \int_a^x f^{<2>}(x)e^{-x}$$

$$= f^{<1>}(x)e^{-x} + f^{<2>}(x)e^{-x} + \int_a^x f^{<2>}(x)e^{-x}$$

$$\vdots$$

$$= e^{-x}\sum_{r=1}^{m} f^{<r>}(x) + \int_a^x f^{<m>}e^{-x}dx$$

これに (1.r) を代入すれば

$$\int_a^x f(x)e^{-x}dx = e^{-x}\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r + \int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^{-x}dx$$

両辺に e^x を乗じ移項して (1.1) を得る。

次に、定理4·1·3 (04 高階積分) によれば次式が成立した。

$$f^{<m>}(x) = \sum_{r=0}^{m-1} f^{<m-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r\,!} + \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m \tag{1.m}$$

他方、$f(x)$ は I 上の解析関数であるから、これは次のようにテイラー展開できる。

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{<-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}$$

$f(x)$ の積分演算子のインデックスを m ほどシフトすると

$$f^{<m>}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} f^{<m-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} \tag{1.t}$$

(1.m) と (1.t) の右辺を比較して

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m = 0$$

を得る。かくて (1.1') が成立する。。

微分方程式との関係 (杉岡の定理2)

定理の右辺は次のように変形される。

$$e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx = e^x\left[\int f(x)e^{-x}dx\right]_a^x$$

$$= e^x\left[e^{-x}y_1(x)\right]_a^x \qquad \left\{y_1(x)\equiv e^x\int f(x)e^{-x}dx\right\}$$

$$= y_1(x) - y_1(a)e^{x-a}$$

そして $y_1(x)$ は次のように変形できる。

$$y_1(x) = e^x\int f(x)e^{-x}dx = e^{-\int(-1)dx}\left\{\int f(x)\,e^{\int(-1)dx}dx\right\}$$

するとこれは、1階線形微分方程式 $y'(x) - y(x) = f(x)$ の特殊解であることが判る。

例1 $\int_a^x dx + \int_a^x\int_a^x dx^2 + \int_a^x\int_a^x\int_a^x dx^3 + \cdots$

$$f(x)=1\,,\qquad \int_a^x\cdots\int_a^x dx^m = \frac{(x-a)^m}{m!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、不完全ガンマ関数 $\Gamma(x,y)$ を用いて

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = e^x\int_a^x e^{-x}dx - e^x\int_a^x\frac{(x-a)^m}{m!}e^{-x}dx$$

$$= e^x\left[-e^{-x}\right]_a^x - \frac{e^x}{m!}\left[-e^{-a}\Gamma(m+1,x-a)\right]_a^x$$

即ち

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = e^{x-a}-1 - \frac{e^{x-a}}{m!}\left\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,x-a)\right\} \tag{1.2}$$

そして $\lim_{m\to\infty}\frac{e^{x-a}}{m!}\left\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,x-a)\right\} = 0$ となるから

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = e^{x-a}-1 \tag{1.2'}$$

(1.2) の左辺の高階積分は

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = \sum_{r=1}^{m}\frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

これを (1.2), (1.2') の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{(x-a)^r}{r\,!} = e^{x-a}-1-\frac{e^{x-a}}{m\,!}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,x-a)\} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(x-a)^r}{r\,!} = e^{x-a}-1 \tag{1.3'}$$

$x=2,\ a=1,\ m=4$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

```
Γ[x_] := Gamma[x]        Γ[x_, y_] := Gamma[x, y]
```

$$\texttt{f[x\_, a\_, m\_] :=} \sum_{r=1}^{m}\frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

$$\texttt{g[x\_, a\_, m\_] :=}\ e^{x-a}-1-\frac{e^{x-a}}{m\,!}\{\Gamma[m+1]-\Gamma[m+1,\ x-a]\}$$

```
N[f[2, 1, 4]]            N[g[2, 1, 4]]
1.70833                  1.70833
```

また、(1.3') が正しいことは次より明らかである。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(x-a)^r}{r\,!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(x-a)^r}{r\,!} - \frac{(x-a)^0}{0\,!} = e^{x-a}-1$$

例2 $\displaystyle\int_a^x e^x dx + \int_a^x\int_a^x e^x dx^2 + \int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3 + \cdots$

$$f(x)=e^x \quad , \qquad \int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^m = e^x - e^a\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、不完全ガンマ関数 $\Gamma(x,y)$ を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r &= e^x\int_a^x e^x e^{-x}dx - e^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^m\right\}e^{-x}dx\\ &= e^x\int_a^x dx - e^x\int_a^x\left\{e^x - e^a\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^r}{r\,!}\right\}e^{-x}dx\\ &= e^x(x-a) - e^x\int_a^x e^x e^{-x}dx + e^{x+a}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{1}{r\,!}\int_a^x (x-a)^r e^{-x}dx\\ &= e^x(x-a) - e^x\int_a^x e^x e^{-x}dx - e^{x+a}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{e^{-a}}{r\,!}\{\Gamma(r+1,x-a)-\Gamma(r+1,0)\}\\ &= e^x(x-a) - e^x(x-a) - e^x\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\Gamma(r+1,x-a)-\Gamma(r+1)}{r\,!}\end{aligned}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r = e^x(x-a) - e^x(x-a) - e^x\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\frac{\Gamma(r+1,\, x-a)}{r\,!} - 1\right\} \tag{1.4}$$

次に

$$\Gamma(n,x) = (n-1)!\, e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s\,!}$$

より

$$\frac{\Gamma(r+1,\, x-a)}{r\,!} = e^{-(x-a)}\sum_{s=0}^{r}\frac{(x-a)^s}{s\,!}$$

これを用いれば

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r &= -e^x\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\frac{\Gamma(r+1,\, x-a)}{r\,!} - 1\right\}\\ &= -e^x e^{-(x-a)}\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\sum_{s=0}^{r}\frac{(x-a)^s}{s\,!} - e^{(x-a)}\right\}\end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\sum_{s=0}^{r}\frac{(x-a)^s}{s\,!} - e^{(x-a)}\right\} &= \sum_{r=0}^{m-1}\left\{\frac{(m-r)(x-a)^r}{r\,!} - e^{(x-a)}\right\}\\ &= -\sum_{r=0}^{m-1}\frac{r(x-a)^r}{r\,!} + \sum_{r=0}^{m-1}\frac{m(x-a)^r}{r\,!} - me^{(x-a)}\\ &= -(x-a)\sum_{r=1}^{m-1}\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)\,!} + m\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^r}{r\,!} - me^{(x-a)}\end{aligned}$$

であるから上式にこれを代入すれば

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r &= -e^x\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\frac{\Gamma(r+1,\, x-a)}{r\,!} - 1\right\}\\ &= e^x e^{-(x-a)}\left\{(x-a)\sum_{r=1}^{m-1}\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)\,!} - m\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^r}{r\,!} + me^{(x-a)}\right\}\end{aligned}$$

ここで $m\to\infty$ とすれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r = e^x e^{-(x-a)}\left\{(x-a)e^{(x-a)} - me^{(x-a)} + me^{(x-a)}\right\}$$

故に

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r = e^x(x-a) \tag{1.4'}$$

Note

直系高階積分 $\int_{-\infty}^x\cdots\int_{-\infty}^x e^x\, dx^r = e^x$ を採った場合、$\sum_{r=1}^{\infty}\int_{-\infty}^x\cdots\int_{-\infty}^x e^x\, dx^r = \infty$ となる。

それ故、この公式が有意なのは傍系高階積分においてである。

副産物

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\sum_{s=0}^{r}\frac{(x-a)^s}{s\,!} - e^{(x-a)}\right\} &= \lim_{m\to\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\left\{\frac{(m-r)(x-a)^r}{r\,!} - e^{(x-a)}\right\}\\ &= -e^{(x-a)}(x-a)\end{aligned}$$

例3 $\displaystyle\int_0^x \log x\,dx + \int_0^x\int_0^x \log x\,dx^2 + \int_0^x\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^3 + \cdots$

$f(x) = \log x$, $a = 0$ を (1.1') へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\,dx^r = e^x \int_0^x \log x\,e^{-x}dx$$

右辺の積分は公式16･6･2 (16･6) により次のようになる。

$$\int_0^x \log x\,e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\log|x| + Ei(-x)\right]_0^x$$

$$= -e^{-x}\log|x| + Ei(-x) - \gamma$$

ここで $Ei(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt$, $\gamma = 0.5772\cdots$ (オイラー･マスケロニの定数)

これから明らかなようにこの積分は直系積分ではない。これに e^x を乗じて次式を得る。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\,dx^r = -\log|x| + e^x\left(Ei(-x) - \gamma\right) \tag{1.6'}$$

左辺の高階積分は次のような直系積分になる。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)$$

よって (1.6') は

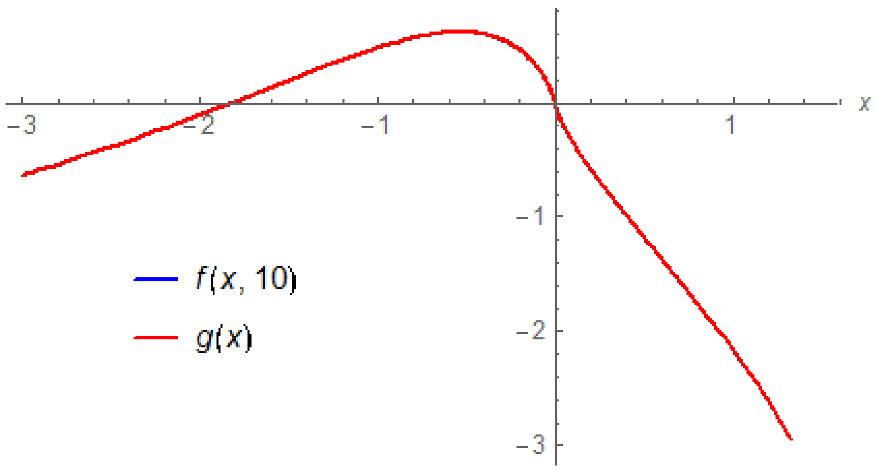
$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) = -\log|x| + e^x\left(Ei(-x) - \gamma\right)$$

Σを10項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。

```
Ei[x_] := ExpIntegralEi[x]        γ := EulerGamma
```

$$f[x\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m}\frac{x^r}{r!}\left(\mathrm{Log}[\mathrm{Abs}[x]] - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right)$$

```
g[x_] := -Log[Abs[x]] + ⅇ^x (Ei[-x] - γ)
```



定理24･1･2（杉岡の定理4）

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx - (-1)^m e^{-x}\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^x dx \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx \tag{2.1'}$$

証明

定理24･1･1の証明 と類似の方法による。

例4 $\displaystyle\int_a^x \sin x\,dx - \int_a^x\int_a^x \sin x\,dx^2 + \int_a^x\int_a^x\int_a^x \sin x\,dx^3 - \int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^4 + - \cdots$

$f(x)=\sin x$ を (2.1') へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^r = e^{-x}\int_a^x \sin x\, e^x dx$$

右辺の積分は公式16･5･3（16･5）により次のようになる。

$$\int_a^x \sin x\cdot e^x dx = \left[\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_a^x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - e^a\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

ここで、$\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$ であるから、

$$\int_a^x \sin x\cdot e^x dx = \frac{\sin x-\cos x}{2}e^x - \frac{\sin a-\cos a}{2}e^a$$

これに e^{-x} を乗じて次式を得る。

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^r = \frac{1}{2}\left\{\sin x-\cos x-(\sin a-\cos a)e^{a-x}\right\} \tag{2.2'}$$

左辺の高階積分は定理4･1･3（4･1）より次のようになる。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^n = \sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right) - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\sin\left\{a-\frac{\pi(n-s)}{2}\right\}$$

よって左辺は

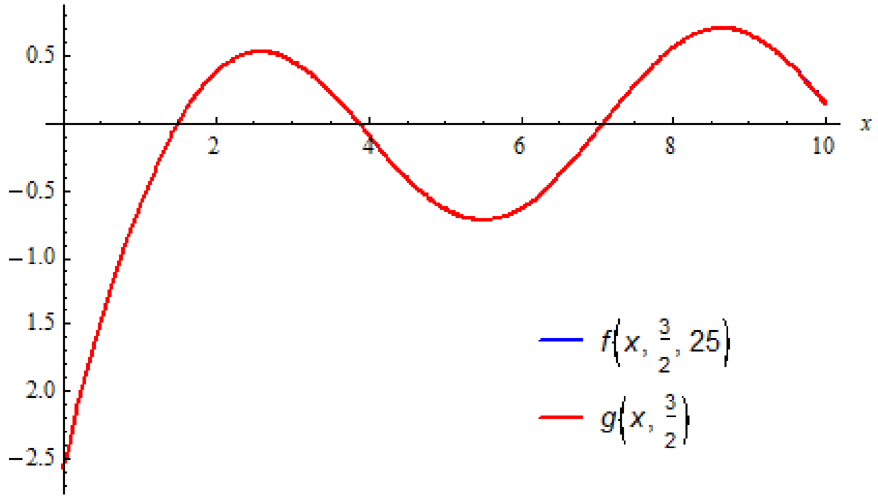
$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\left\{\sin\left(x-\frac{\pi r}{2}\right) - \sum_{s=0}^{r-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\sin\left\{a-\frac{\pi(r-s)}{2}\right\}\right\}$$

$a=3/2$ としΣを25項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっているので青（左辺）は見えない。

$$\texttt{f[x\_, a\_, m\_] := } \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left(\mathrm{Sin}\left[x-\frac{\pi r}{2}\right] - \sum_{s=0}^{r-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\mathrm{Sin}\left[a-\frac{\pi(r-s)}{2}\right]\right)$$

```
g[x_, a_] := 1/2 (Sin[x] - Cos[x] - (Sin[a] - Cos[a]) ⅇ^(a-x))
```

$$g[x\_, a\_] := \frac{1}{2} \left(\mathrm{Sin}[x] - \mathrm{Cos}[x] - (\mathrm{Sin}[a] - \mathrm{Cos}[a])\, e^{a-x}\right)$$



24・2 奇数階積分級数

本節では、次のような高階積分級数の和を求める。

$$\int_a^x f(x)dx \pm \int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3 + \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^5 \pm \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^7 +\pm \cdots$$

定理24・2・1

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a,x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx + e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx\right\}$$
$$-(-1)^{2m-1}\cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m-1}\right\}\frac{e^x+(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$
$$+(-1)^{2m-1}\sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m-1}\right\}\frac{e^x-(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx \tag{1.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx + e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx\right\} \tag{1.1'}$$

証明

2つの関数の積の積分について次の反復部分積分の公式が成立する。(拙著ア・ラ・カルト編「 01 一般化されたテイラーの定理 」)

$$\int_a^x f(x)g(x)dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)g^{(r-1)}(x)\right]_a^x + (-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)g^{(m)}(x)dx$$

$g(x) = \cosh x\,,\ \sinh x$ のとき、

$$(\cosh x)^{(r-1)} = \frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\,,\qquad (\cosh x)^{(m)} = \frac{e^x+(-1)^{-m}e^{-x}}{2}$$
$$(\sinh x)^{(r-1)} = \frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\,,\qquad (\sinh x)^{(m)} = \frac{e^x-(-1)^{-m}e^{-x}}{2}$$

であるから

$$\int_a^x f(x)\cosh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\right]_a^x$$
$$+(-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)\frac{e^x+(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$$\int_a^x f(x)\sinh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\right]_a^x$$
$$+(-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)\frac{e^x-(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

ここで

$$f^{<r>}(x) = \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r \qquad r=1,2,\cdots,m$$

とすれば、$f^{\langle r \rangle}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m)$であるから、

$$\int_a^x f(x)\cosh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\frac{e^x+(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$$\int_a^x f(x)\sinh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\frac{e^x-(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \cosh x-\sinh x+\cosh x-\sinh x+-\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \sinh x-\cosh x+\sinh x-\cosh x+-\cdots$$

両辺に$\cosh x,\ \sinh x$をそれぞれ乗じれば

$$\cosh x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \cosh^2 x-\cosh x\sinh x+\cosh^2 x-\cosh x\sinh x+-\cdots$$

$$\sinh x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \sinh^2 x-\sinh x\cosh x+\sinh^2 x-\sinh x\cosh x+-\cdots$$

右辺第2項は

$$(-1)^m\cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\frac{e^x+(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$$(-1)^m\sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\frac{e^x-(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ であるから、

$$\cosh x\int_a^x f(x)\cosh x\,dx-\sinh x\int_a^x f(x)\sinh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1}$$
$$+(-1)^{2m-1}\cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\frac{e^x+(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$
$$-(-1)^{2m-1}\sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\frac{e^x-(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して奇数とならねばならない。さらに

$$\cosh x\int_a^x f(x)\cosh x\,dx-\sinh x\int_a^x f(x)\sinh x\,dx$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\int_a^x f(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\int_a^x f(x)\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx+e^{-x}\int_a^x f(x)e^{x}dx\right\}$$

であるからこれを用いれば

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1}=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx+e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx\right\}$$
$$-(-1)^{2m-1}\cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\frac{e^x+(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$
$$+(-1)^{2m-1}\sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\frac{e^x-(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$

そして仮定により $\lim_{m\to\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m=0$ となる（定理24・1・1の証明 参照）から (1.1') を得る。

例1 $\int_a^x dx+\int_a^x\int_a^x\int_a^x dx^3+\int_a^x\cdots\int_a^x dx^5+\int_a^x\cdots\int_a^x dx^7+\cdots$

$$f(x)=1\,,\qquad \int_a^x\cdots\int_a^x dx^m=\frac{(x-a)^m}{m\,!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^{2r-1}=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x e^{-x}dx+e^{-x}\int_a^x e^x dx\right\}$$
$$-(-1)^{2m-1}\cosh x\int_a^x\frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^x+(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$
$$+(-1)^{2m-1}\sinh x\int_a^x\frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^x-(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$

ここで

$$\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x e^{-x}dx+e^{-x}\int_a^x e^x dx\right\}=\frac{e^x}{2}\left[-e^{-x}\right]_a^x+\frac{e^x}{2}\left[e^x\right]_a^x$$
$$=\frac{e^{x-a}-e^{-(x-a)}}{2}=\sinh(x-a)$$

であるから、

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^{2r-1}=\sinh(x-a)$$
$$-(-1)^{2m-1}\cosh x\int_a^x\frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^x+(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx$$
$$+(-1)^{2m-1}\sinh x\int_a^x\frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^x-(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx \tag{1.2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^{2r-1}=\sinh(x-a) \tag{1.2'}$$

この左辺は

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^{2r-1}=\sum_{r=1}^{m}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)\,!}$$

これを (1.2), (1.2’) の左辺に用いると

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)!} = \sinh(x-a) &- (-1)^{2m-1}\cosh x\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{e^{x}+(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx \\ &+ (-1)^{2m-1}\sinh x\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{e^{x}-(-1)^{-2m+1}e^{-x}}{2}dx\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)!} = \sinh(x-a) \tag{1.3'}$$

$x=3,\ a=1,\ m=5$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

$$\mathtt{f[x\_,\ a\_,\ m\_]} := \sum_{r=1}^{m}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)!}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{g[x\_,\ a\_,\ m\_]} := \mathtt{Sinh}[x-a] &- (-1)^{2m-1}\,\mathtt{Cosh}[x]\int_a^x \frac{(t-a)^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{e^{t}+(-1)^{-2m+1}e^{-t}}{2}dt \\ &+ (-1)^{2m-1}\,\mathtt{Sinh}[x]\int_a^x \frac{(t-a)^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{e^{t}-(-1)^{-2m+1}e^{-t}}{2}dt\end{aligned}$$

```
N[f[3, 1, 5]]            N[g[3, 1, 5]]
3.62681                  3.62681
```

また、(1.3’) も正しい。何故ならば、左辺は右辺のテイラー展開であるからである。

定理24・2・2 (杉岡の定理5)

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} &= \cos x\int_a^x f(x)\cos x\,dx + \sin x\int_a^x f(x)\sin x\,dx \\ &- (-1)^{2m-1}\cos x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m-1}\right\}\cos\left\{x+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx \\ &- (-1)^{2m-1}\sin x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m-1}\right\}\sin\left\{x+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \cos x\int_a^x f(x)\cos x\,dx + \sin x\int_a^x f(x)\sin x\,dx \tag{2.1'}$$

証明

2つの関数の積の積分について次式が成立する。

$$\int_a^x f(x)g(x)dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)g^{(r-1)}(x)\right]_a^x + (-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)g^{(m)}(x)dx$$

$g(x) = \cos x,\ \sin x$ のとき、

$$(\cos x)^{(r-1)} = \cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} \quad , \quad (\cos x)^{(m)} = \cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)^{(r-1)} = \sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} \quad , \quad (\sin x)^{(m)} = \sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\int_a^x f(x)\cos x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\right]_a^x$$
$$+(-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$\int_a^x f(x)\sin x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\right]_a^x$$
$$+(-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

ここで

$$f^{<r>}(x) = \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r \qquad r=1,2,\cdots,m$$

とすれば、$f^{<r>}(a)=0 \ (r=1,2,\cdots,m)$であるから、

$$\int_a^x f(x)\cos x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$\int_a^x f(x)\sin x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \cos x+\sin x-\cos x-\sin x++--\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \sin x-\cos x-\sin x+\cos x++--\cdots$$

両辺に$\cos x$, $\sin x$をそれぞれ乗じれば

$$\cos x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \cos^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin x\cos x++--\cdots$$

$$\sin x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \sin^2 x-\sin x\cos x-\sin^2 x+\sin x\cos x++--\cdots$$

右辺第2項は

$$(-1)^m\cos x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$(-1)^m\sin x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ であるから、

$$\cos x\int_a^x f(x)\cos x\,dx + \sin x\int_a^x f(x)\sin x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1}$$
$$+(-1)^{2m-1}\cos x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\cos\left\{x+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx$$
$$+(-1)^{2m-1}\sin x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\sin\left\{x+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して奇数とならねばならない。
剰余項を移項して (2.1) を得る。
そして仮定により $\lim_{m\to\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m = 0$ となる(定理24･1･1の証明 参照)から (2.1') を得る。

例2 $\int_a^x e^x dx - \int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3 + \int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^5 - \int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^7 + - \cdots$

$f(x)=e^x$ であるから、これを (2.1') へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^{2r-1} = \cos x\int_a^x e^x\cos x\,dx + \sin x\int_a^x e^x\sin x\,dx$$

右辺は

$$\int_a^x e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left\{e^x(\cos x+\sin x) - e^a(\cos a+\sin a)\right\}$$
$$\int_a^x e^x\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\left\{e^x(\cos x-\sin x) - e^a(\cos a-\sin a)\right\}$$

より

$$\cos x\int_a^x e^x\cos x\,dx + \sin x\int_a^x e^x\sin x\,dx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^a}{2}\{\cos(x-a) - \sin(x-a)\}$$

故に

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^{2r-1} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^a}{2}\{\cos(x-a) - \sin(x-a)\} \tag{2.2'}$$

左辺の高階積分は定理4･1･3 (4･1)より次のようになる。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^n = e^x - \sum_{s=0}^{n-1} e^a\frac{(x-a)^s}{s!}$$

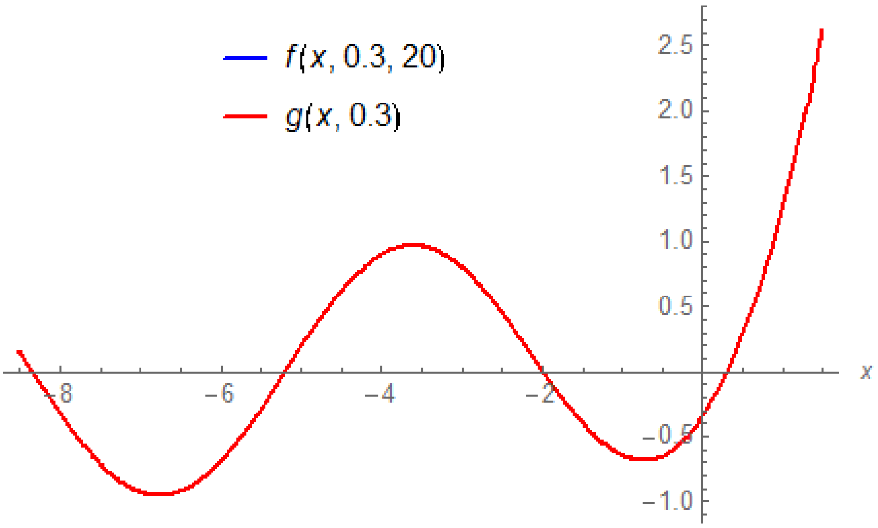
よって (2.2') は

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\left\{e^x - e^a\sum_{s=0}^{2r-2}\frac{(x-a)^s}{s!}\right\} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^a}{2}\{\cos(x-a) - \sin(x-a)\} \tag{2.3'}$$

$a=0.3$ としΣを20項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。

$$f[x\_, a\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left(e^x - e^a\sum_{s=0}^{2r-2}\frac{(x-a)^s}{s!}\right)$$

```
g[x_, a_] := e^x/2 - e^a/2 (Cos[x - a] - Sin[x - a])
```



24・3　偶数階積分級数

本節では、次のような高階積分級数の和を求める。

$$\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 \pm \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^4 + \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^6 \pm \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^8 +\pm \cdots$$

定理24・3・1

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a,x\in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx - e^{-x}\int_a^x f(x)e^{x}dx\right\}$$
$$- \sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\cosh x\,dx$$
$$+ \cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\sinh x\,dx \tag{1.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx - e^{-x}\int_a^x f(x)e^{x}dx\right\} \tag{1.1'}$$

証明

定理24・2・1の証明中で次式が得られた。

$$\int_a^x f(x)\cosh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+ (-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\frac{e^x+(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$$\int_a^x f(x)\sinh x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+ (-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\frac{e^x-(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \cosh x - \sinh x + \cosh x - \sinh x +- \cdots$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \sinh x - \cosh x + \sinh x - \cosh x +- \cdots$$

両辺に $\sinh x$, $\cosh x$ をそれぞれ乗じれば

$$\sinh x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x+(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \sinh x\cosh x - \sinh^2 x + \sinh x\cosh x - \sinh^2 x +- \cdots$$

$$\cosh x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{e^x-(-1)^{-r+1}e^{-x}}{2} = \cosh x\sinh x - \cosh^2 x + \cosh x\sinh x - \cosh^2 x +- \cdots$$

右辺第2項は

$$(-1)^m \sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m\right\}\frac{e^x+(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$$(-1)^m \cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m\right\}\frac{e^x-(-1)^{-m}e^{-x}}{2}dx$$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ であるから、

$$\sinh x\int_a^x f(x)\cosh x dx-\cosh x\int_a^x f(x)\sinh x dx=\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r}$$

$$+(-1)^{2m}\sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m}\right\}\frac{e^x+(-1)^{-2m}e^{-x}}{2}dx$$

$$-(-1)^{2m}\cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m}\right\}\frac{e^x-(-1)^{-2m}e^{-x}}{2}dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して偶数とならねばならない。

さらに

$$\sinh x\int_a^x f(x)\cosh x dx-\cosh x\int_a^x f(x)\sinh x dx$$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\int_a^x f(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\int_a^x f(x)\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx-e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx\right\}$$

であるからこれを用いれば

$$\sum_{r=1}^{m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r}=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx-e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx\right\}$$

$$-\sinh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m}\right\}\cosh x\,dx$$

$$+\cosh x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m}\right\}\sinh x\,dx$$

そして仮定により $\lim_{m\to\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m=0$ となる(定理24・1・1の証明 参照)から(1.1')を得る。

例1 $\int_a^x\int_a^x dx^2+\int_a^x\cdots\int_a^x dx^4+\int_a^x\cdots\int_a^x dx^6+\int_a^x\cdots\int_a^x dx^8+\cdots$

$f(x)=1$ であるから、これを(1.1')へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^{2r}=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x e^{-x}dx-e^{-x}\int_a^x e^x dx\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^x\left[-e^{-x}\right]_a^x-e^{-x}\left[e^x\right]_a^x\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-1+e^{x-a}-\left(1-e^{a-x}\right)\right\}=\frac{e^{x-a}+e^{a-x}}{2}-1$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x dx^{2r}=\cosh(x-a)-1$$

定理24・3・2

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sin x\int_a^x f(x)\cos x\,dx - \cos x\int_a^x f(x)\sin x\,dx$$
$$- \sin x\int_a^x\left\{\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\cos(x+m\pi)\,dx$$
$$+ \cos x\int_a^x\left\{\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\sin(x+m\pi)\,dx \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sin x\int_a^x f(x)\cos x\,dx - \cos x\int_a^x f(x)\sin x\,dx \tag{2.1'}$$

証明

定理24・2・2の証明中で次式が得られた。

$$\int_a^x f(x)\cos x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+ (-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$\int_a^x f(x)\sin x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+ (-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \cos x + \sin x - \cos x - \sin x + + - - \cdots$$
$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \sin x - \cos x - \sin x + \cos x + + - - \cdots$$

両辺に $\sin x$, $\cos x$ をそれぞれ乗じれば

$$\sin x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \sin x\cos x + \sin^2 x - \sin x\cos x - \sin^2 x + + - - \cdots$$
$$\cos x\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = \cos x\sin x - \cos^2 x - \cos x\sin x + \cos^2 x + + - - \cdots$$

右辺第2項は

$$(-1)^m\sin x\int_a^x\left\{\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$
$$(-1)^m\cos x\int_a^x\left\{\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^m\right\}\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ であるから、

$$\sin x\int_a^x f(x)\cos x\,dx - \cos x\int_a^x f(x)\sin x\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r}$$

$$+(-1)^{2m}\sin x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m}\right\}\cos(x+m\pi)dx$$

$$-(-1)^{2m}\cos x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2m}\right\}\sin(x+m\pi)dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して偶数とならねばならない。
剰余項を移項して (2.1) を得る。
そして仮定により $\lim_{m\to\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m=0$ となる(定理24･1･1の証明 参照)から (2.1') を得る。

例2 $\int_0^x\int_0^x x^2dx^2-\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^4+\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^6-\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^8+-\cdots$

$f(x)=x^2$ であるから、これを (2.1) へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2r}=\sin x\int_0^x x^2\cos x\,dx-\cos x\int_0^x x^2\sin x\,dx$$

$$-\sin x\int_0^x\left\{\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2m}\right\}\cos(x+m\pi)dx$$

$$+\cos x\int_0^x\left\{\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2m}\right\}\sin(x+m\pi)dx$$

ここで

$$\sin x\int_0^x x^2\cos x\,dx-\cos x\int_0^x x^2\sin x\,dx=x^2-2+2\cos x$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x x^2\,dx^{2m}=\frac{2!}{(2+2m)!}x^{2+2m}$$

故、

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2r}=x^2-2+2\cos x$$

$$-\sin x\int_0^x\frac{2!}{(2+2m)!}x^{2+2m}\cos(x+m\pi)dx$$

$$+\cos x\int_0^x\frac{2!}{(2+2m)!}x^{2+2m}\sin(x+m\pi)dx \qquad (2.2)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2r}=x^2-2+2\cos x \qquad (2.2')$$

この左辺は

$$\int_0^x\cdots\int_0^x x^2\,dx^n=\frac{2!}{(2+n)!}x^{2+n}$$

これを (2.2), (2.2') の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{2!}{(2+2r)!}x^{2+2r}=x^2-2+2\cos x$$

$$-\sin x\int_0^x\frac{2!}{(2+2m)!}x^{2+2m}\cos(x+m\pi)dx$$

$$+\cos x\int_0^x \frac{2!}{(2+2m)!}x^{2+2m}\sin(x+m\pi)dx \quad (2.3)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{2!}{(2+2r)!}x^{2+2r}=x^2-2+2\cos x \quad (2.3')$$

x=5, m=6 のとき、(2.3) の両辺を計算すると次のようになる。

```
f[x_, m_] := Sum[(-1)^(r-1) 2!/(2 + 2 r)! x^(2+2 r), {r, 1, m}]
g[x_, m_] := x^2 - 2 + 2 Cos[x]
    - Sin[x] Integrate[2!/(2 + 2 m)! t^(2+2 m) Cos[t + m π], {t, 0, x}]
    + Cos[x] Integrate[2!/(2 + 2 m)! t^(2+2 m) Sin[t + m π], {t, 0, x}]
```

$$f[x\_,m\_] := \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{2!}{(2+2r)!}x^{2+2r}$$

$$g[x\_,m\_] := x^2-2+2\,\mathrm{Cos}[x] - \mathrm{Sin}[x]\int_0^x \frac{2!}{(2+2m)!}t^{2+2m}\,\mathrm{Cos}[t+m\pi]\,dt + \mathrm{Cos}[x]\int_0^x \frac{2!}{(2+2m)!}t^{2+2m}\,\mathrm{Sin}[t+m\pi]\,dt$$

N[f[5, 6]]	N[g[5, 6]]
23.5539	23.5539

24・4 積分級数展開 (e^x)

2012年3月、杉岡幹生氏は任意の関数の高階積分の級数が指数関数や三角関数の高階積分級数に展開されることを発見された(http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page216.htm)。これらの積分級数式は美しい。しかしもっと重要なことは、これらの二重級数による式が数値計算に有用なことである。以下の3節ではそれを紹介する。

定理24・4・1

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a,x\in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x e^{x-a}dx^r \tag{1.1'}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x e^{-(x-a)}dx^r \tag{1.2'}$$

証明

$f^{(r)}(a)=f_a^r$ と略記して $f(x)$ を a の周りでテイラー展開すると

$$f(x)= f_a^0\cdot\frac{(x-a)^0}{0!}+f_a^1\cdot\frac{(x-a)^1}{1!}+f_a^2\cdot\frac{(x-a)^2}{2!}+f_a^3\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots \tag{0}$$

両辺を a から x まで逐次項別積分すると

$$\int_a^x f(x)dx = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^1}{1!}+f_a^1\cdot\frac{(x-a)^2}{2!}+f_a^2\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}+f_a^3\cdot\frac{(x-a)^4}{4!}+\cdots$$

$$\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^2}{2!}+f_a^1\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}+f_a^2\cdot\frac{(x-a)^4}{4!}+f_a^3\cdot\frac{(x-a)^5}{5!}+\cdots$$

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}+f_a^1\cdot\frac{(x-a)^4}{4!}+f_a^2\cdot\frac{(x-a)^5}{5!}+f_a^3\cdot\frac{(x-a)^6}{6!}+\cdots$$

$$\vdots$$

(0) も含めてこれらを縦に加え合わせると

$$f(x)+\int_a^x f(x)dx+\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2+\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3+\cdots$$

$$= f_a^0\left\{\frac{(x-a)^0}{0!}+\frac{(x-a)^1}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots\right\}$$

$$+ f_a^1\left\{\frac{(x-a)^1}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\frac{(x-a)^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$+ f_a^2\left\{\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\frac{(x-a)^4}{4!}+\frac{(x-a)^5}{5!}+\cdots\right\}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f_a^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

i.e.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.1}$$

さらに

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} = \int_a^x \cdots \int_a^x e^{x-a} dx^r$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{\infty} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \int_a^x \cdots \int_a^x e^{x-a} dx^r \tag{1.1'}$$

次に

$$f(x) = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^0}{0!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$-\int_a^x f(x)dx = -f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} - f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} - f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} - f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} - \cdots$$

$$\int_a^x \int_a^x f(x)dx^2 = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^5}{5!} + \cdots$$

$$-\int_a^x \int_a^x \int_a^x f(x)dx^3 = -f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} - f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} - f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^5}{5!} - f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^6}{6!} - \cdots$$

としてこれらを縦に加え合わせると

$$f(x) - \int_a^x f(x)dx + \int_a^x \int_a^x f(x)dx^2 - \int_a^x \int_a^x \int_a^x f(x)dx^3 + - \cdots$$

$$= f_a^0 \left\{ \frac{(x-a)^0}{0!} - \frac{(x-a)^1}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} - \frac{(x-a)^3}{3!} + - \cdots \right\}$$

$$+ f_a^1 \left\{ \frac{(x-a)^1}{1!} - \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{(x-a)^4}{4!} + - \cdots \right\}$$

$$+ f_a^2 \left\{ \frac{(x-a)^2}{2!} - \frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{(x-a)^5}{5!} + - \cdots \right\}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r f_a^r \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

i.e.

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.2}$$

さらに

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} = \int_a^x \cdots \int_a^x e^{-(x-a)} dx^r$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x e^{-(x-a)}dx^r \tag{1.2'}$$

例1 $\log x+\int_1^x\log x\,dx+\int_1^x\int_1^x\log x\,dx^2+\int_1^x\int_1^x\int_1^x\log x\,dx^3+\cdots$

$f(x)=\log x\,,\quad(\log x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}\quad n=1,2,3,\cdots$

であるから、(1.1), (1.1') より

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_1^x\cdots\int_1^x\log x\,dx^r = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(r-1)!\int_1^x\cdots\int_1^x e^{x-1}dx^r$$

$$=0!\int_1^x e^{x-1}dx-1!\int_1^x\int_1^x e^{x-1}dx^2+2!\int_1^x\int_1^x\int_1^x e^{x-1}dx^3-3!\int_1^x\cdots\int_1^x e^{x-1}dx^4+-\cdots$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、これらに任意の1点 $x=0.8$ を与えたところ次のようになった。

```
m = 10;
f1[x_] := Log[x] + Sum[1/Gamma[r] Integrate[(x - t)^(r-1) Log[t], {t, 1, x}], {r, 1, m}]
fm[x_] := Sum[(-1)^(r-1) (r - 1)! Sum[(x - 1)^(s+r)/(s + r)!, {s, 0, ∞}], {r, 1, m}]
fr[x_] := Sum[(-1)^(r-1) (r - 1)! 1/Gamma[r] Integrate[(x - t)^(r-1) e^(t-1), {t, 1, x}], {r, 1, m}]

N[f1[0.8]]        N[fm[0.8]]        N[fr[0.8]]
-0.202997         -0.202997         -0.202997
```

例2 $\sqrt{x}-\int_1^x\sqrt{x}\,dx+\int_1^x\int_1^x\sqrt{x}\,dx^2-\int_1^x\int_1^x\int_1^x\sqrt{x}\,dx^3+-\ \cdots$

$f(x)=\sqrt{x}$ であるから、

$$f^{(n)}(1)=\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-n)}1^{\frac{1}{2}-n}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}$$

故に (1.2), (1.2') より

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_1^x\cdots\int_1^x\sqrt{x}\,dx^r=e^{-(x-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{(2r-3)!!}{2^r}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$=e^{-(x-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{(2r-3)!!}{2^r}\int_1^x\cdots\int_1^x e^{-(x-1)}dx^r$$

$$=e^{-(x-1)}+\frac{(-1)!!}{2^1}\int_1^x e^{x-1}dx-\frac{1!!}{2^2}\int_1^x\int_1^x e^{x-1}dx^2+\frac{3!!}{2^3}\int_1^x\int_1^x\int_1^x e^{x-1}dx^3-+\cdots$$

前定理の証明中において、(0)を含めずに計算すると次の定理を得る。

定理24･4･1'

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)\,!}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)\,!}$$

この 定理24･4･1' と 24･1 を併せると、指数関数と任意の関数の積の傍系積分を与える次の公式を得る。

公式24･4･2

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\int_a^x e^x f(x)\,dx = e^x \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)\,!} \tag{2.1}$$

$$\int_a^x e^{-x} f(x)\,dx = e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)\,!} \tag{2.2}$$

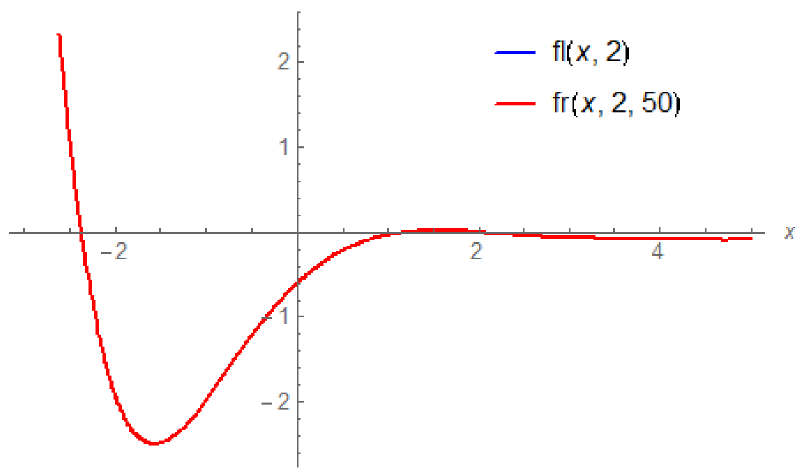
例 $\displaystyle\int_a^x e^{-x}\cos x\,dx$

$(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\pi/2) \quad n=1,2,3,\cdots$ であるから

$$\int_a^x e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}\cos\left(a+\frac{r\pi}{2}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)\,!}$$

$a=2$ としΣを50項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

$$\texttt{fl[x\_, a\_]:=}\int_a^x e^{-t}\,\texttt{Cos[t]}\,dt \qquad \texttt{fr[x\_, a\_, m\_]:=}\,e^{-x}\sum_{r=0}^{m}\texttt{Cos}\left[a+\frac{r\,\pi}{2}\right]\sum_{s=1}^{m}\frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)\,!}$$



24・5 積分級数展開 (sin x)

定理24・5・1

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \int_a^x \cdots \int_a^x \sinh(x-a)\,dx^r \tag{1.1'}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \int_a^x \cdots \int_a^x \sin(x-a)\,dx^r \tag{1.2'}$$

証明

$f^{(r)}(a) = f_a^r$ と略記して $f(x)$ を a の周りでテイラー展開すると

$$f(x) = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^0}{0!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

両辺を a から x まで1回飛ばしに項別積分すると

$$\int_a^x f(x)\,dx = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + \cdots$$

$$\int_a^x \int_a^x \int_a^x f(x)\,dx^3 = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^5}{5!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^6}{6!} + \cdots$$

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^5 = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^5}{5!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^6}{6!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^7}{7!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^8}{8!} + \cdots$$

$$\vdots$$

これらを縦に加え合わせると

$$\int_a^x f(x)\,dx + \int_a^x \int_a^x \int_a^x f(x)\,dx^3 + \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^5 + \cdots$$

$$= f_a^0 \left\{ \frac{(x-a)^1}{1!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{(x-a)^5}{5!} + \frac{(x-a)^7}{7!} + \cdots \right\}$$

$$+ f_a^1 \left\{ \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^4}{4!} + \frac{(x-a)^6}{6!} + \frac{(x-a)^8}{8!} + \cdots \right\}$$

$$+ f_a^2 \left\{ \frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{(x-a)^5}{5!} + \frac{(x-a)^7}{7!} + \frac{(x-a)^9}{9!} + \cdots \right\}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f_a^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} \tag{1.1}$$

さらに

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} = \int_a^x\cdots\int_a^x sinh(x-a)\,dx^r$$

であるから

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x sinh(x-a)\,dx^r \tag{1.1'}$$

次に

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^1}{1!}+f_a^1\cdot\frac{(x-a)^2}{2!}+f_a^2\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}+f_a^3\cdot\frac{(x-a)^4}{4!}+\cdots$$

$$-\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^3 = -f_a^0\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}-f_a^1\cdot\frac{(x-a)^4}{4!}-f_a^2\cdot\frac{(x-a)^5}{5!}-f_a^3\cdot\frac{(x-a)^6}{6!}-\cdots$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^5 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^5}{5!}+f_a^1\cdot\frac{(x-a)^6}{6!}+f_a^2\cdot\frac{(x-a)^7}{7!}+f_a^3\cdot\frac{(x-a)^8}{8!}+\cdots$$

$$-\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^7 = -f_a^0\cdot\frac{(x-a)^7}{7!}-f_a^1\cdot\frac{(x-a)^8}{8!}-f_a^2\cdot\frac{(x-a)^9}{9!}-f_a^3\cdot\frac{(x-a)^{10}}{10!}-\cdots$$

$$\vdots$$

これらを縦に加え合わせると

$$\int_a^x f(x)\,dx - \int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^3 + \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^5 - \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^7 +- \cdots$$

$$= f_a^0\left\{\frac{(x-a)^1}{1!}-\frac{(x-a)^3}{3!}+\frac{(x-a)^5}{5!}-\frac{(x-a)^7}{7!}+-\cdots\right\}$$

$$+ f_a^1\left\{\frac{(x-a)^2}{2!}-\frac{(x-a)^4}{4!}+\frac{(x-a)^6}{6!}-\frac{(x-a)^8}{8!}+-\cdots\right\}$$

$$+ f_a^2\left\{\frac{(x-a)^3}{3!}-\frac{(x-a)^5}{5!}+\frac{(x-a)^7}{7!}-\frac{(x-a)^9}{9!}+-\cdots\right\}$$

$$+ f_a^3\left\{\frac{(x-a)^4}{4!}-\frac{(x-a)^6}{6!}+\frac{(x-a)^8}{8!}-\frac{(x-a)^{10}}{10!}+-\cdots\right\}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f_a^r\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} \tag{1.2}$$

さらに

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} = \int_a^x\cdots\int_a^x sin(x-a)\,dx^r$$

であるから

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x \sin(x-a)dx^r \tag{1.2'}$$

例1 $\int_0^x \tan x\,dx + \int_0^x\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^3 + \int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^5 + \int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^7 + \cdots$

公式9･2･6 (9･2)より、$\tan x$ の $x=0$ における高階微係数は次のようになる。

$$(\tan x)^{(2n-1)}|_{x=0} = T_{2n-1} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{2n} \quad , \quad (\tan x)^{(2n)}|_{x=0} = 0$$

ここで T_{2n-1} はタンジェント数であり、B_{2n} はベルヌイ数である。かくして (1.1), (1.1') より

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^{2r-1} = \sum_{r=1}^{\infty}T_{2r-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s+2r}}{(2s+2r)!} = \sum_{r=1}^{\infty}T_{2r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x \sinh x\,dx^{2r-1}$$

$$= 1\int_0^x \sinh x\,dx + 2\int_0^x\int_0^x\int_0^x \sinh x\,dx^3 + 16\int_0^x\cdots\int_0^x \sinh x\,dx^5 + \cdots$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、これらに任意の1点 $x=0.9$ を与えたところ次のようになった。

```
m = 10;
fl[x_] := Sum[1/Gamma[2 r - 1] Integrate[(x - t)^(2 r-2) Tan[t], {t, 0, x}], {r, 1, m}]
T[r_] := 2^(2 r) (2^(2 r) - 1) Abs[BernoulliB[2 r]] / (2 r)
fm[x_] := Sum[T[r] Sum[x^(2 s+2 r)/(2 s + 2 r)!, {s, 0, ∞}], {r, 1, m}]
fr[x_] := Sum[T[r]/Gamma[2 r - 1] Integrate[(x - t)^(2 r-2) Sinh[t], {t, 0, x}], {r, 1, m}]
```

$$f1[x\_] := \sum_{r=1}^{m}\frac{1}{\mathrm{Gamma}[2r-1]}\int_0^x (x-t)^{2r-2}\,\mathrm{Tan}[t]\,dt$$

$$T[r\_] := \frac{2^{2r}(2^{2r}-1)\,\mathrm{Abs}[\mathrm{BernoulliB}[2r]]}{2r}$$

$$fm[x\_] := \sum_{r=1}^{m}T[r]\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s+2r}}{(2s+2r)!}$$

$$fr[x\_] := \sum_{r=1}^{m}\frac{T[r]}{\mathrm{Gamma}[2r-1]}\int_0^x (x-t)^{2r-2}\,\mathrm{Sinh}[t]\,dt$$

N[f1[0.9]]	N[fm[0.9]]	N[fr[0.9]]
0.505231 + 2.40581 × 10^{-18} i	0.505231	0.505068

例2 $\int_0^x \sec x\,dx - \int_0^x\int_0^x\int_0^x \sec x\,dx^3 + \int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^5 - \int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^7 +- \cdots$

公式9･2･8 (9･2)より、$\sec x$ の $x=0$ における高階微係数は次のようになる。

$$(\sec x)^{(2n)}|_{x=0} = |E_{2n}| \quad , \quad (\sec x)^{(2n+1)}|_{x=0} = 0$$

ここで E_{2n} はオイラー数である。かくして (1.2), (1.2') より

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty}|E_{2r}|\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+1+2r}}{(2s+1+2r)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}|E_{2r}|\int_0^x\cdots\int_0^x \sin x\,dx^{2r}$$

$$= \sin x + \int_0^x\int_0^x \sin x\,dx^2 + 5\int_0^x\cdots\int_0^x \sin x\,dx^4 + 61\int_0^x\cdots\int_0^x \sin x\,dx^6 + \cdots$$

24･6 積分級数展開 (cos x)

定理24･6･1

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a,x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x \cdots \int_a^x \cosh(x-a)\,dx^{2r} \tag{1.1'}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x \cdots \int_a^x \cos(x-a)\,dx^{r} \tag{1.2'}$$

証明

$f^{(r)}(a) = f_a^r$ と略記して $f(x)$ を a の周りでテイラー展開すると

$$f(x) = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^0}{0!} + f_a^1\cdot\frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^2\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^3\cdot\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots \tag{0}$$

両辺を a から x まで1回飛ばしで項別積分すると

$$\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^1\cdot\frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^2\cdot\frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^3\cdot\frac{(x-a)^5}{5!} + \cdots$$

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^4 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^1\cdot\frac{(x-a)^5}{5!} + f_a^2\cdot\frac{(x-a)^6}{6!} + f_a^3\cdot\frac{(x-a)^7}{7!} + \cdots$$

$$\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^6 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^6}{6!} + f_a^1\cdot\frac{(x-a)^7}{7!} + f_a^2\cdot\frac{(x-a)^8}{8!} + f_a^3\cdot\frac{(x-a)^9}{9!} + \cdots$$

$$\vdots$$

(0) も含めてこれらを縦に加え合わせると

$$f(x) + \int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 + \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^4 + \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^6$$

$$= f_a^0\left\{\frac{(x-a)^0}{0!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^4}{4!} + \frac{(x-a)^6}{6!} + \cdots\right\}$$

$$+ f_a^1\left\{\frac{(x-a)^1}{1!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{(x-a)^5}{5!} + \frac{(x-a)^7}{7!} + \cdots\right\}$$

$$+ f_a^2\left\{\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^4}{4!} + \frac{(x-a)^6}{6!} + \frac{(x-a)^8}{8!} + \cdots\right\}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f_a^r \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

i.e.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{1.1}$$

さらに

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} = \int_a^x\cdots\int_a^x \cosh(x-a)\,dx^r$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x \cosh(x-a)\,dx^r \tag{1.1'}$$

次に

$$f(x) = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^0}{0!} + f_a^1\cdot\frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^2\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^3\cdot\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$-\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 = -f_a^0\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} - f_a^1\cdot\frac{(x-a)^3}{3!} - f_a^2\cdot\frac{(x-a)^4}{4!} - f_a^3\cdot\frac{(x-a)^5}{5!} - \cdots$$

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^4 = f_a^0\cdot\frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^1\cdot\frac{(x-a)^5}{5!} + f_a^2\cdot\frac{(x-a)^6}{6!} + f_a^3\cdot\frac{(x-a)^7}{7!} + \cdots$$

$$-\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^6 = -f_a^0\cdot\frac{(x-a)^6}{6!} - f_a^1\cdot\frac{(x-a)^7}{7!} - f_a^2\cdot\frac{(x-a)^8}{8!} - f_a^3\cdot\frac{(x-a)^9}{9!} - \cdots$$

$$\vdots$$

これらを縦に加え合わせ、定理24･5･1 と類似の計算をして (1.2), (1.2') を得る。

例1 $\tan^{-1}x + \int_1^x\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^2 + \int_1^x\cdots\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^4 + \int_1^x\cdots\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^6 + \cdots$

「岩波数学公式Ⅰ」p39 によれば、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = (n-1)!\cos^n\left(\tan^{-1}x\right)\sin\left(n\left(\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

これより

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)}\Big|_{x=1} = \frac{(n-1)!}{2^{n/2}}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

これを (1.1), (1.1) に代入して

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}\int_1^x\cdots\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^{2r} &= \frac{\pi}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2s}}{(2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r-1)!}{2^{r/2}}\sin\left(\frac{3r\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2s+r}}{(2s+r)!}\\ &= \frac{\pi}{4}\cosh(x-1) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{2^{r/2}}\sin\left(\frac{3r\pi}{4}\right)\int_1^x\cdots\int_1^x \cosh(x-1)\,dx^r\\ &= \frac{\pi}{4}\cosh(x-1) + \frac{1}{2}\int_1^x \cosh(x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int_1^x\int_1^x \cosh(x-1)\,dx^2 + \cdots\end{aligned}$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、これらに任意の1点 x=1.8 を与えたところ、次のようになった。

```
m = 15;
f1[x_] := ArcTan[x] + Sum[1/Gamma[2 r] Integrate[(x - t)^(2 r - 1) ArcTan[t], {t, 1, x}], {r, 1, m}]
```

$$f1[x\_] := \text{ArcTan}[x] + \sum_{r=1}^{m}\frac{1}{\text{Gamma}[2\,r]}\int_1^x (x-t)^{2\,r-1}\,\text{ArcTan}[t]\,dt$$

```
fm[x_] := π/4 Sum[(x-1)^(2s)/(2s)!, {s,0,∞}] + Sum[(r-1)!/2^(r/2) Sin[3rπ/4] Sum[(x-1)^(2s+r)/(2s+r)!, {s,0,∞}], {r,1,m}]

fr[x_] := π/4 Cosh[x-1] + Sum[(r-1)!/2^(r/2) Sin[3rπ/4] 1/Gamma[r] Integrate[(x-t)^(r-1) Cosh[t-1], {t,1,x}], {r,1,m}]

N[fl[1.8]]        N[fm[1.8]]        N[fr[1.8]]
1.36536           1.36536           1.36536
```

例2 $\sin^{-1}x - \int_0^x\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^2 + \int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^4 - \int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^6 +- \cdots$

公式9･3･2(9･3)より、$\sin^{-1}x$ の $x=0$ における高階微係数は次のようになる。

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(2n+1)}\Big|_{x=0} = {}_{2n}C_0(2n-1)!!\,(2n-1)!!\,0^0 = (2n-1)!!^2$$

よって (1.2), (1.2') より

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}(2r-1)!!^2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+2r+1}}{(2s+2r+1)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(2r-1)!!^2\int_0^x\cdots\int_0^x \cos x\,dx^{2r+1}$$

$$= (-1)!!^2\int_0^x \cos x\,dx + 1!!^2\int_0^x\int_0^x\int_0^x \cos x\,dx^3 + 3!!^2\int_0^x\cdots\int_0^x \cos x\,dx^5 + \cdots$$

前定理の証明中において、(0) を含めずに計算すると次の定理を得る。

定理24･6･1'

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}f^{(r)}(a)\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{1.4}$$

Note

この定理には形式的な美はない。しかしこの定理は計算には有用である。

例 $\int_0^x\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^2 - \int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^4 + \int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^6 - \int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^8 +- \cdots$

$\sin^{-1}x$ の $x=0$ における高階微係数は例2と同じであるから、(1.4) より次式を得る。

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}(2r-1)!!^2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{x^{2s+2r+1}}{(2s+2r+1)!}$$

左辺を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、これらに任意の1点 $x=0.6$ を与えたところ、次のようになった。

m = 7;

$$fl[x\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^{r-1}}{Gamma[2\,r]} \int_0^x (x - t)^{2\,r-1}\, ArcSin[t]\, dt$$

$$fr[x\_] := \sum_{r=0}^{m} ((2\,r - 1)\,!!)^2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{x^{2\,s+2\,r+1}}{(2\,s + 2\,r + 1)\,!}$$

N[fl[0.6]]	N[fr[0.6]]
0.0360572	0.0360572

24・7 係数付高階積分級数

定理24・1・1 は ${}_{n-1+r}C_{n-1}$ を係数とする高階積分級数に拡張することができる。これらの係数はパスカルの三角形の斜辺の数であるが、$n \geqq 3$ のような係数はあまり面白くない。そこで本節では $n=2$ 、即ち次のような高階積分級数の和を求める。

$$1\int_a^x f(x)dx \pm 2\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2 + 3\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3 \pm 4\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^4 +\pm \cdots$$

定理24・7・1

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m} r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx + e^x\int_a^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx^2$$
$$-(m+1)e^x\int_a^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{m-1}\right\}e^{-x}dx^2$$
$$+me^x\int_a^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m\right\}e^{-x}dx^2 \tag{1.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx + e^x\int_a^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx^2 \tag{1.1'}$$

証明

$f^{<r>}(a)=0 \ \ (r=1,2,\cdots,m+n-1)$ のとき、定理16・1・2 (16・1) により次式が成立する。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)}$$
$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^n$$

そこで $g=e^{-x}$, $n=2$ と置けば、$g^{(r)}=(-1)^r e^{-x}$ であるから

$$\int_a^x\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx^2 = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-2}{r} f^{<2+r>}(-1)^r e^{-x}$$
$$+\frac{(-1)^m}{B(2,m)}\frac{{}_1C_0}{m+0}\int_a^x\int_a^x f^{<m+0>}(-1)^{m+0}e^{-x}dx^2$$
$$+\frac{(-1)^m}{B(2,m)}\frac{{}_1C_1}{m+1}\int_a^x\int_a^x f^{<m+1>}(-1)^{m+1}e^{-x}dx^2$$

i.e.

$$\int_a^x\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx^2 = \sum_{r=0}^{m-1}(1+r)f^{<2+r>}e^{-x} + (m+1)\int_a^x\int_a^x f^{<m>}e^{-x}dx^2 - m\int_a^x\int_a^x f^{<m+1>}e^{-x}dx^2$$
$$\left\{\because \ \ (-1)^r\binom{-2}{r} = 1+r \ , \ \frac{1}{B(2,m)} = m(m+1)\right\}$$

ここで関数 f の積分演算子 ⟨r⟩ のインデックスから1を減じると

$$\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<-1>}e^{-x}dx^2=\sum_{r=0}^{m-1}(1+r)f^{<1+r>}e^{-x}$$
$$+(m+1)\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m-1>}e^{-x}dx^2-m\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m>}e^{-x}dx^2$$

左辺は、

$$\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<-1>}e^{-x}dx^2=\int_a^x\left\{\left[f^{<0>}e^{-x}\right]_a^x+\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx\right\}dx$$
$$=\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx+\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx^2$$

これを上の左辺に代入すると

$$\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx+\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<0>}e^{-x}dx^2=\sum_{r=0}^{m-1}(1+r)f^{<1+r>}e^{-x}$$
$$+(m+1)\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m-1>}e^{-x}dx^2-m\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m>}e^{-x}dx^2$$

これより

$$e^{-x}\sum_{r=1}^{m}r\,f^{<r>}(x)=\int_a^x f(x)e^{-x}dx+\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^{-x}dx^2$$
$$-(m+1)\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m-1>}e^{-x}dx^2+m\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m>}e^{-x}dx^2$$

ここで

$$f^{<r>}=\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^r\ ,\quad f^{<m-1>}=\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^{m-1}\ ,\quad f^{<m>}=\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^m$$

と置けばこれらは条件 $f^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m+1)$を満たす。よってこれらを代入し
両辺にe^xを乗じれば

$$\sum_{r=1}^{m}r\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^r=e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx+e^x\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^{-x}dx^2$$
$$-(m+1)e^x\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^{m-1}\right\}e^{-x}dx^2$$
$$+m\,e^x\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^m\right\}e^{-x}dx^2 \qquad (1.1)$$

そして仮定により $\lim_{m\to\infty}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^m=0$ となる（定理24・1・1の証明 参照）から (1.1') を得る。

例1 $1\int_a^x dx+2\int_a^x\!\!\int_a^x dx^2+3\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x dx^3+\cdots$

$$f(x)=1\quad ,\quad \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x dx^{m-1}=\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}\quad ,\quad \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x dx^m=\frac{(x-a)^m}{m!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{m} r\int_a^x \cdots \int_a^x dx^r = e^x \int_a^x e^{-x}dx + e^x\int_a^x\int_a^x e^{-x}dx^2 - (m+1)e^x\int_a^x\int_a^x \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-x}dx^2$$
$$+ me^x\int_a^x\int_a^x \frac{(x-a)^m}{m!}e^{-x}dx^2$$

右辺第1項と第2項は

$$e^x\int_a^x e^{-x}dx + e^x\int_a^x\int_a^x e^{-x}dx^2 = e^x\left(e^a - e^x\right) + e^x\int_a^x\left(e^a - e^x\right)dx$$
$$= e^{x-a}(x-a)$$

右辺第3項と第4項は、長い計算の末、次のようになる。

$$-(m+1)e^x\int_a^x\int_a^x \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-x}dx^2 + me^x\int_a^x\int_a^x \frac{(x-a)^m}{m!}e^{-x}dx^2$$
$$= -e^{x-a}(x-a)$$
$$+ \frac{m+1}{(m-1)!}e^{x-a}\left\{(x-a)\Gamma(m,x-a) - \Gamma(1+m,x-a)\right\}$$
$$- \frac{1}{(m-1)!}e^{x-a}\left\{(x-a)\Gamma(1+m,x-a) - \Gamma(2+m,x-a)\right\}$$

これらを上に代入すれば

$$\sum_{r=1}^{m} r\int_a^x \cdots \int_a^x dx^r = e^{x-a}(x-a) - e^{x-a}(x-a)$$
$$+ \frac{m+1}{(m-1)!}e^{x-a}\left\{(x-a)\Gamma(m,x-a) - \Gamma(1+m,x-a)\right\}$$
$$- \frac{1}{(m-1)!}e^{x-a}\left\{(x-a)\Gamma(1+m,x-a) - \Gamma(2+m,x-a)\right\} \tag{1.2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\int_a^x \cdots \int_a^x dx^r = e^{x-a}(x-a) \tag{1.2'}$$

この左辺は

$$\sum_{r=1}^{m} r\int_a^x \cdots \int_a^x dx^r = \sum_{r=1}^{m} \frac{r(x-a)^r}{r!}$$

これを (1.2), (1.2’) の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{r(x-a)^r}{r!} = e^{x-a}(x-a) - e^{x-a}(x-a)$$
$$+ \frac{m+1}{(m-1)!}e^{x-a}\left\{(x-a)\Gamma(m,x-a) - \Gamma(1+m,x-a)\right\}$$
$$- \frac{1}{(m-1)!}e^{x-a}\left\{(x-a)\Gamma(1+m,x-a) - \Gamma(2+m,x-a)\right\} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(x-a)^r}{r!} = e^{x-a}(x-a) \tag{1.3'}$$

$x=4$, $a=3$, $m=7$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

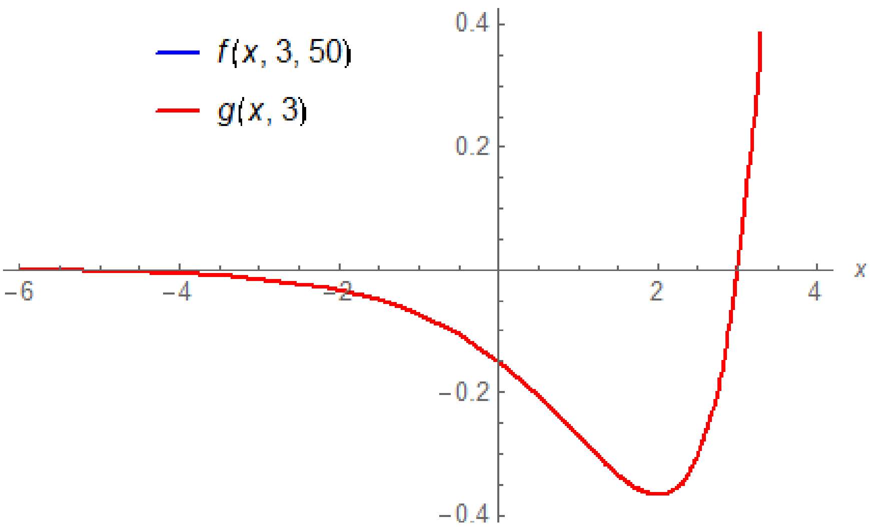
$$\mathtt{f}[x\_,\ a\_,\ m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{r\,(x-a)^r}{r\,!} \qquad\qquad \Gamma[x\_,\ y\_] := \mathtt{Gamma}[x,\ y]$$

$$\begin{aligned}\mathtt{g}[x\_,\ a\_,\ m\_] := {} & e^{x-a}\,(x-a) - e^{x-a}\,(x-a) \\ & + \frac{m+1}{(m-1)\,!}\, e^{x-a}\,\big((x-a)\,\Gamma[m,\ x-a] - \Gamma[1+m,\ x-a]\big) \\ & - \frac{1}{(m-1)\,!}\, e^{x-a}\,\big((x-a)\,\Gamma[1+m,\ x-a] - \Gamma[2+m,\ x-a]\big)\end{aligned}$$

```
N[f[4, 3, 7]]
2.71806
```

```
N[g[4, 3, 7]]
2.71806
```

また、$a=3$ のとき Σを50項ほど計算して (1.3') の両辺を図示すると次のとおり。
両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



例2 $\displaystyle 1\int_a^x \cos x\,dx + 2\int_a^x\!\!\int_a^x \cos x\,dx^2 + 3\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x \cos x\,dx^3 + \cdots$

$f(x)=\cos x$ を (1.1') へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\int_a^x\!\!\cdots\!\!\int_a^x \cos x\,dx^r = e^x\int_a^x \cos x\,e^{-x}dx + e^x\int_a^x\!\!\int_a^x \cos x\,e^{-x}dx^2$$

この右辺を力づくで積分すると次式を得る。

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\int_a^x\!\!\cdots\!\!\int_a^x \cos x\,dx^r = \frac{e^{x-a}(x-a)(\cos a - \sin a)}{2} + \frac{e^{x-a}\cos a - \cos x}{2}$$

左辺の高階積分は定理4･1･3(4･1)より次のようになる。

$$\int_a^x\!\!\cdots\!\!\int_a^x \cos x\,dx^n = \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(x-a)^s}{s\,!}\cos\left\{a - \frac{\pi(n-s)}{2}\right\}$$

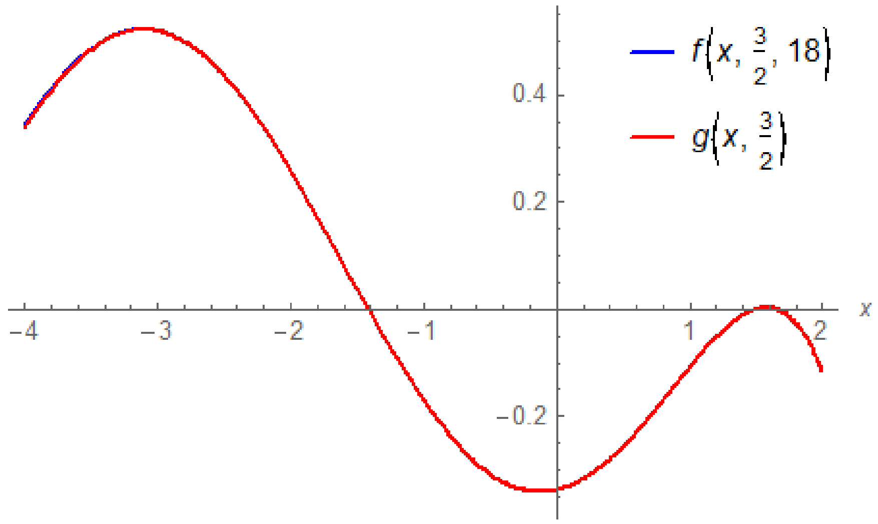
よって左辺は

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\left\{\cos\left(x-\frac{\pi r}{2}\right)-\sum_{s=0}^{r-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\cos\left\{a-\frac{\pi(r-s)}{2}\right\}\right\}$$

$a=3/2$ としΣを18項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり一致していて青(左辺)は見えない。

$$\mathrm{f}[x\_,\ a\_,\ m\_] := \sum_{r=1}^{m} r\left(\mathrm{Cos}\left[x-\frac{\pi\, r}{2}\right]-\sum_{s=0}^{r-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\mathrm{Cos}\left[a-\frac{\pi\,(r-s)}{2}\right]\right)$$

$$\mathrm{g}[x\_,\ a\_] := \frac{e^{x-a}\,(x-a)\,(\mathrm{Cos}[a]-\mathrm{Sin}[a])}{2}+\frac{e^{x-a}\,\mathrm{Cos}[a]-\mathrm{Cos}[x]}{2}$$



定理24･7･2

$f(x)$ を閉区間 I 上で定義された解析関数とするとき、$a, x \in I$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1} r\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r = e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx - e^{-x}\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^x dx^2$$

$$-(-1)^m(m+1)e^x\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{m-1}\right\}e^x dx^2$$

$$+(-1)^{m+1} m\, e^x\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{m}\right\}e^x dx^2 \qquad (2.1)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} r\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r = e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx - e^{-x}\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^x dx^2 \qquad (2.1')$$

証明

定理24･7･1の証明 と類似の方法による。

例3　$1\int_0^x \log x\,dx - 2\int_0^x\!\!\int_0^x \log x\,dx^2 + 3\int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x \log x\,dx^3 - 4\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x \log x\,dx^4 + - \cdots$

$f(x) = \log x$, $a=0$ を (2.1) へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1} r\int_a^x\cdots\int_a^x \log x\, dx^r = e^{-x}\int_a^x \log x\, e^x dx - e^{-x}\int_a^x\int_a^x \log x\, e^x dx^2$$
$$- (-1)^m (m+1) e^x \int_a^x\int_a^x \left\{\int_a^x\cdots\int_a^x \log x\, dx^{m-1}\right\} e^x dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} m e^x \int_a^x\int_a^x \left\{\int_a^x\cdots\int_a^x \log x\, dx^m\right\} e^x dx^2$$

右辺の積分は次のようになる。

$$\int_0^x \log x e^x dx = \left[e^x \log|x| - Ei(x)\right]_0^x = e^x \log|x| - Ei(x) + \gamma$$
$$\int_0^x\int_0^x \log x e^x dx = \int_0^x \left\{e^x \log|x| - Ei(x) + \gamma\right\} dx$$
$$= \left[e^x(\log|x|+1) - (x+1)Ei(x) + \gamma x\right]_0^x$$
$$= e^x(\log|x|+1) - (x+1)Ei(x) + \gamma x - (1-\gamma)$$

ここで $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt,\quad \gamma = 0.5772\cdots$ （オイラー・マスケロニの定数）

よって、右辺第1項と第2項は

$$e^{-x}\int_0^x \log x e^x dx - e^{-x}\int_a^x\int_a^x \log x e^x dx^2 = e^{-x} x\{Ei(x) - \gamma\} + e^{-x} - 1$$

次に、

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\, dx^m = \frac{x^m}{m!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right)$$

であるから、これを右辺の第3項と第4項に用いれば、右辺は次のようになる。

$$e^{-x} x\{Ei(x) - \gamma\} + e^{-x} - 1$$
$$- (-1)^m (m+1) e^x \int_a^x\int_a^x \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} m e^x \int_a^x\int_a^x \frac{x^m}{m!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2$$

i.e.

$$e^{-x} x\{Ei(x) - \gamma\} + e^{-x} - 1$$
$$- (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} e^x \int_a^x\int_a^x x^{m-1}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{(m-1)!} e^x \int_a^x\int_a^x x^m\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2$$

かくして次を得る。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1} r\int_a^x\cdots\int_a^x \log x\, dx^r = e^{-x} x\{Ei(x) - \gamma\} + e^{-x} - 1$$
$$- (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} e^x \int_a^x\int_a^x x^{m-1}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{(m-1)!} e^x \int_a^x\int_a^x x^m\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2 \qquad (2.2)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} r \int_a^x \cdots \int_a^x \log x\, dx^r = e^{-x} x\{Ei(x)-\gamma\} + e^{-x} - 1 \tag{2.2'}$$

これらの左辺は、

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)$$

であるから、これを用いれば

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{rx^r}{r!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) &= e^{-x}x\{Ei(x)-\gamma\} + e^{-x} - 1 \\ &\quad - (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} e^x \int_a^x\int_a^x x^{m-1}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2 \\ &\quad + (-1)^{m+1}\frac{1}{(m-1)!} e^x \int_a^x\int_a^x x^m\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^x dx^2\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{rx^r}{r!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) = e^{-x}x\{Ei(x)-\gamma\} + e^{-x} - 1 \tag{2.3'}$$

x=-0.2, m=4 のとき、(2.3) の両辺を計算すると次のようになる。

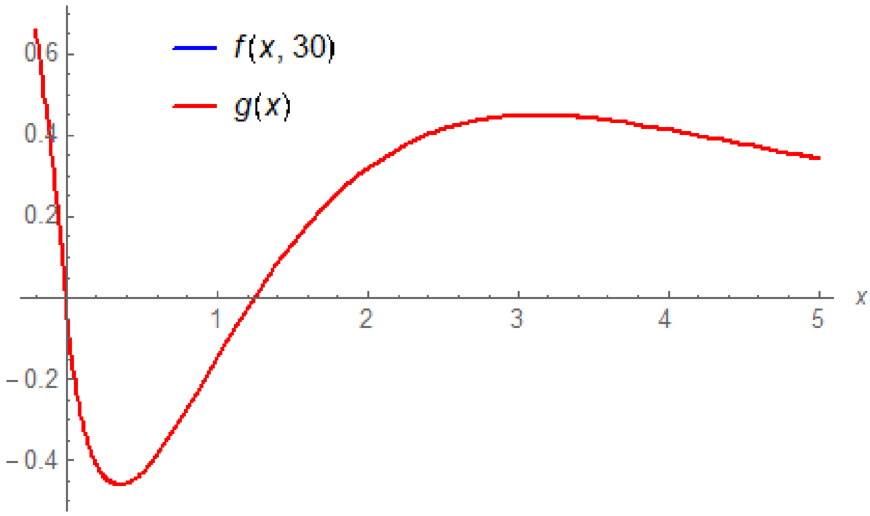
$$f[x\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\frac{r\, x^r}{r!}\left(\mathrm{Log}[\mathrm{Abs}[x]] - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right)$$

$$\begin{aligned} g[x\_, m\_] :=\ & x\, e^{-x}(\mathrm{Ei}[x]-\gamma) + e^{-x} - 1 \\ & - (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} e^{-x}\int_0^x\left(\int_0^u t^{m-1}\left(\mathrm{Log}[\mathrm{Abs}[t]] - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^t\, dt\right) du \\ & + (-1)^{m+1}\frac{1}{(m-1)!} e^{-x}\int_0^x\left(\int_0^u t^{m}\left(\mathrm{Log}[\mathrm{Abs}[t]] - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^t\, dt\right) du \end{aligned}$$

```
SetPrecision[f[-0.2, 4], 8]
0.66102092
```

```
SetPrecision[g[-0.2, 4], 8]
0.66102092
```

また、Σを30項ほど計算して(2.3') の両辺を図示すると次のとおり。
両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



c.f.

杉岡氏は 定理24･7･1 に良く似た次の定理(杉岡の定理3－１)を示された。

$$1\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2 + 2\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3 + 3\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^4 + \cdots = e^x\int_a^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx^2$$

これを 定理24･1･1の (1.1') に加えれば定理24･7･1の (1.1') を得る。

2012.09.01

2018.06.05 Updated

Kano Kono

宇宙人の数学