25　等比係数付高階積分級数

本章は「24 高階(重回)積分級数に関する杉岡の定理 」を一般化したものである。これらの元になった論文は「 e^x に関する公式の発見 」(2003 杉岡 幹生)である。

25･1　自然数階積分級数

本節では、次のような等比係数付高階積分級数を考察する。

$$c^1\int_a^x f(x)\,dx \pm c^2\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^2 + c^3\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^3 \pm c^4\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^4 +\pm \cdots$$

定理25･1･1

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m} c^r\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r = ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx - c^{m+1}e^{cx}\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^{-cx}dx \tag{1.1}$$

特に $\displaystyle\lim_{m\to\infty} c^m\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r = ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx \tag{1.1'}$$

証明

$$f^{<r>}(x) = \int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r \qquad r=1,2,\cdots,m \tag{1.r}$$

とすれば、$f^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m)$ である。よって

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx &= \left[f^{<1>}(x)e^{-cx}\right]_a^x + c\int_a^x f^{<1>}(x)e^{-cx}dx\\ &= f^{<1>}(x)e^{-cx} + c\int_a^x f^{<1>}(x)e^{-cx}dx\\ &= f^{<1>}(x)e^{-cx} + c\left[f^{<2>}(x)e^{-cx}\right]_a^x + c^2\int_a^x f^{<2>}(x)e^{-cx}dx\\ &= f^{<1>}(x)e^{-cx} + c^1 f^{<2>}(x)e^{-cx} + c^2\int_a^x f^{<2>}(x)e^{-cx}dx\\ &\ \,\vdots\\ &= e^{-cx}\sum_{r=1}^{m} c^{r-1}f^{<r>}(x) + c^m\int_a^x f^{<m>}e^{-cx}dx\end{aligned}$$

これに (1.r) を代入すれば

$$\int_a^x f(x)e^{-cx}dx = e^{-cx}\sum_{r=1}^{m} c^{r-1}\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r + c^m\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^{-cx}dx$$

両辺に e^{cx} を乗じれば

$$e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx = \sum_{r=1}^{m} c^{r-1}\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r + c^m e^{cx}\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^{-cx}dx$$

両辺に c を乗じて辺々移項して (1.1) を得る。

例1　$c^1\int_a^x dx + c^2\int_a^x\int_a^x dx^2 + c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x dx^3 + \cdots$

$$f(x)=1\,, \qquad \int_a^x\cdots\int_a^x dx^m = \frac{(x-a)^m}{m\,!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{m} c^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = ce^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx - c^{m+1}e^{cx}\int_a^x \frac{(x-a)^m}{m\,!}e^{-cx}dx$$

ここで、右辺第1項は

$$ce^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx = ce^{cx}\left[-\frac{e^{-cx}}{c}\right]_a^x = e^{c(x-a)}-1$$

右辺第2項は不完全ガンマ関数 $\Gamma(x,y)$ を用いて

$$\int_a^x \frac{(x-a)^m}{m\,!}e^{-cx}dx = \frac{e^{-ac}(x-a)^m(c(x-a))^{-m}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,\,c(x-a))\}}{c\,m\,!}$$

$$= \frac{e^{-ac}}{c\,m\,!}\frac{(x-a)^m}{\{c(x-a)\}^m}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,\,c(x-a))\}$$

$c>0$ & $x-a>0$ ならば

$$\int_a^x \frac{(x-a)^m}{m\,!}e^{-cx}dx = \frac{e^{-ac}}{c^{m+1}\,m\,!}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,c(x-a))\}$$

かくして

$$\sum_{r=1}^{m} c^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = e^{c(x-a)}-1-\frac{e^{c(x-a)}}{m\,!}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,c(x-a))\} \tag{1.2}$$

そして $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{e^{c(x-a)}}{m\,!}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,c(x-a))\} = 0$ となるから

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = e^{c(x-a)}-1 \tag{1.2'}$$

(1.2) の左辺の高階積分は

$$\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = \frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

故に、左辺は

$$\sum_{r=1}^{m} c^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r = \sum_{r=1}^{m} c^r\frac{(x-a)^r}{r\,!}$$

これを (1.2), (1.2’) の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m} c^r\frac{(x-a)^r}{r\,!} = e^{c(x-a)}-1-\frac{e^{c(x-a)}}{m\,!}\{\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,c(x-a))\} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r\frac{(x-a)^r}{r\,!} = e^{c(x-a)}-1 \tag{1.3'}$$

$x=2,\ a=0,\ c=3.3,\ m=4$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

```
Γ[x_] := Gamma[x]          Γ[x_, y_] := Gamma[x, y]
```

$$\mathrm{f}[x\_,a\_,c\_,m\_] := \sum_{r=1}^{m} c^r \frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$\mathrm{g}[x\_,a\_,c\_,m\_] := e^{c\,(x-a)} - 1 - \frac{e^{c\,(x-a)}}{m!}\left(\Gamma[m+1] - \Gamma[m+1, c\,(x-a)]\right)$$

```
N[f[2, 0, 3.3, 4]]          N[g[2, 0, 3.3, 4]]
155.357                     155.357
```

また、(1.3’) が正しいことは次より明らかである。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \frac{(x-a)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\{c(x-a)\}^r}{r!} - \frac{\{c(x-a)\}^0}{0!} = e^{c(x-a)} - 1$$

例2 $c^1\int_a^x e^x dx + c^2\int_a^x\int_a^x e^x dx^2 + c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3 + \cdots$

$$f(x) = e^x \quad , \quad \int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^m = e^x - e^a\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^r}{r!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、不完全ガンマ関数 $\Gamma(x,y)$ を用いて

$$\sum_{r=1}^{m} c^r \int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r = c e^{cx}\int_a^x e^x e^{-cx} dx - c^{m+1}e^{cx}\int_a^x \left\{\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^m\right\} e^{-cx}dx$$

$$= c e^{cx}\int_a^x e^{(1-c)x}dx - c^{m+1}e^{cx}\int_a^x\left\{e^x - e^a\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(x-a)^r}{r!}\right\}e^{-cx}dx$$

$$= c e^{cx}\int_a^x e^{(1-c)x}dx - c^{m+1}e^{cx}\int_a^x e^{(1-c)x}dx + c^{m+1}e^{cx+a}\sum_{r=0}^{m-1}\int_a^x\frac{(x-a)^r}{r!}e^{-cx}dx$$

$$= \frac{c e^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c} - \frac{c^{m+1}e^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c}$$

$$+ c^{m+1}e^{cx+a}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{e^{-\vec{a}\vec{c}}(x-a)^r(c(x-a))^{-r}\left(\Gamma(1+r) - \Gamma(1+r,c(x-a))\right)}{c\,r!}$$

$$= \frac{c e^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c} - \frac{c^{m+1}e^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c}$$

$$- c^m e^{cx+(1-c)a}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{1}{c^r}\left\{\frac{\Gamma(1+r,c(x-a))}{r!} - 1\right\}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{m} c^r \int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^r = \frac{c e^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c} - \frac{c^{m+1}e^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c}$$

$$- c^m e^{cx+(1-c)a}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{1}{c^r}\left\{\frac{\Gamma(1+r,c(x-a))}{r!} - 1\right\} \qquad (1.4)$$

特に $a=-\infty$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} e^x dx^r = e^x \qquad r=1,2,3,\cdots \qquad : \text{直系高階積分}$$

$$e^{(1-c)a} = 0 \quad , \quad \frac{\Gamma(1+r, c(x-a))}{c^r r!} = 0$$

よって (1.4) は次のようになる。

$$e^x \sum_{r=1}^{m} c^r = ce^x \frac{1-c^m}{1-c}$$

そしてこれより周知の次式が得られる。

$$\sum_{r=0}^{m-1} c^r = \frac{1-c^m}{1-c}$$

$0<c<1$ のとき、$\lim_{m\to\infty} c^m = 0$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x e^x dx^r = \frac{ce^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c} \tag{1.4'}$$

特に $a=-\infty$ のとき、

$$e^{cx} \sum_{r=1}^{\infty} c^r = \frac{ce^{cx}}{1-c}$$

そしてこれより周知の次式が得られる。

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^r = \frac{1}{1-c}$$

(1.4) の左辺の高階積分は

$$\int_a^x \cdots \int_a^x e^x dx^r = e^x - e^a \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(x-a)^s}{s!}$$

故に、左辺は

$$\sum_{r=1}^{m} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x dx^r = \sum_{r=1}^{m} c^r \left\{ e^x - e^a \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(x-a)^s}{s!} \right\}$$

これを (1.4), (1.4') の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m} c^r \left\{ e^x - e^a \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(x-a)^s}{s!} \right\} = \frac{1-c^m}{1-c} ce^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}$$
$$- c^m e^{cx+(1-c)a} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{c^r} \left\{ \frac{\Gamma(1+r, c(x-a))}{r!} - 1 \right\} \tag{1.5}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \left\{ e^x - e^a \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(x-a)^s}{s!} \right\} = \frac{ce^{cx}\left\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\right\}}{1-c} \tag{1.5'}$$

$x=4,\ a=1,\ c=2,\ m=3$ のとき、(1.5) の両辺を計算すると次のようになる。両辺は正確に一致している。かくして (1.4) が正しいことが数値的に確認された。

```
Γ[x_, y_] := Gamma[x, y]
```

```
f[x_, a_, c_, m_] := Sum[c^r (E^x - E^a Sum[(x - a)^s / s!, {s, 0, r-1}]), {r, 1, m}]

g[x_, a_, c_, m_] := (1 - c^m)/(1 - c) c E^(c x) (E^((1-c) x) - E^((1-c) a))
                     - c^m E^(c x + (1-c) a) Sum[1/c^r (Gamma[1 + r, c (x - a)]/r! - 1), {r, 0, m-1}]

N[f[4, 1, 2, 3]]        N[g[4, 1, 2, 3]]
530.602                 530.602
```

例3 $c^1\int_0^x \log x\,dx + c^2\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^2 + c^3\int_0^x\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^3 + \cdots$

$f(x) = \log x$, $a = 0$ を (1.1') へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x \log x\,dx^r = c e^{cx}\int_a^x \log x\,e^{-cx}dx$$

右辺の積分は次のようになる。

$$\int_0^x \log x\,e^{-cx}dx = \left[\frac{-e^{-cx}\log|x| + Ei(-cx)}{c}\right]_0^x$$

$$= \frac{-e^{-cx}\log|x| + Ei(-cx)}{c} - \frac{\log c + \gamma}{c}$$

ここで $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt$, $\gamma = 0.5772\cdots$ （オイラー・マスケロニの定数）

両辺に ce^{cx} を乗じて

$$ce^{cx}\int_0^x \log x\,e^{-cx}dx = -\log|x| + e^{cx}\{Ei(-cx) - \gamma - \log c\}$$

これを上の右辺に代入して、

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x \log x\,dx^r = -\log|x| + e^{cx}\{Ei(-cx) - \gamma - \log c\} \tag{1.6'}$$

左辺の高階積分は次のような直系積分になる。

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log x\,dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)$$

よって (1.6') は

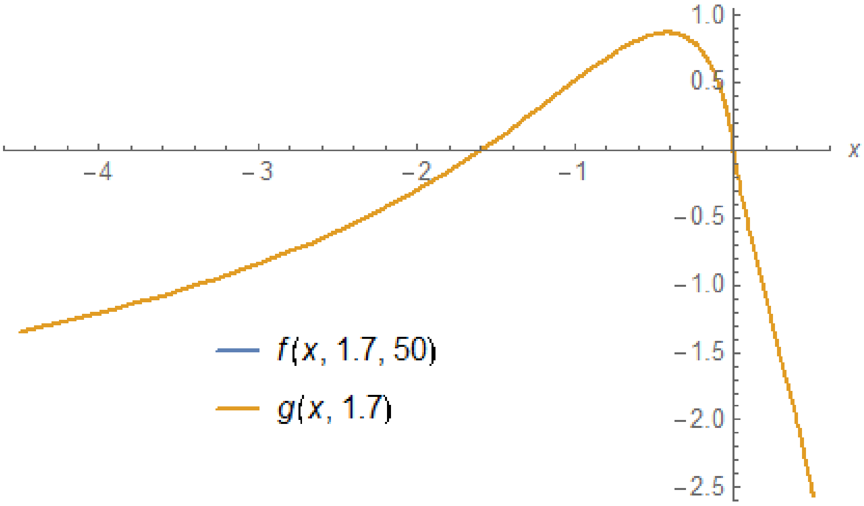
$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c^r x^r}{r!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) = -\log|x| + e^{cx}\{Ei(-cx) - \gamma - \log c\}$$

$c=1.7$ のとき、Σの上限を10項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

```
Ei[x_] := ExpIntegralEi[x]        γ := EulerGamma
```

$$\mathtt{f[x\_,\ c\_,\ m\_]} := \sum_{r=1}^{m} \frac{c^r x^r}{r!}\left(\mathtt{Log[Abs[x]]} - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right)$$

$$\mathtt{g[x\_,\ c\_]} := -\mathtt{Log[Abs[x]]} + e^{c x}\left(\mathtt{Ei[-c\ x]} - \gamma - \mathtt{Log[c]}\right)$$



定理25・1・2

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = ce^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx$$
$$-(-1)^m c^{m+1}e^{-cx}\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}e^{cx}dx \tag{2.1}$$

特に $\lim_{m\to\infty} c^m\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = ce^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx \tag{2.1'}$$

証明

定理 25・1・1の証明 と類似の方法による。

例4 $c^1\int_a^x \sin x\,dx - c^2\int_a^x\int_a^x \sin x\,dx^2 + c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x \sin x\,dx^3 - c^4\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^4 +- \cdots$

$f(x)=\sin x$ を (2.1') へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^r\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^r = ce^{-cx}\int_a^x \sin x\,e^{cx}dx$$

右辺の積分は

$$\int_a^x \sin x\cdot e^{cx}\,dx = \frac{(c\sin x - \cos x)e^{cx} - (c\sin a - \cos a)e^{ca}}{1+c^2}$$

両辺に ce^{-cx} を乗じると

$$ce^{-cx}\int_a^x \sin x \cdot e^{cx}\,dx = \frac{c}{1+c^2}\left\{c\sin x - \cos x - \left(c\sin a - \cos a\right)e^{c(a-x)}\right\}$$

かくして

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^r\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^r = \frac{c}{1+c^2}\left\{c\sin x - \cos x - \left(c\sin a - \cos a\right)e^{c(a-x)}\right\} \tag{2.2'}$$

左辺の高階積分は定理4･1･3(4･1)より次のようになる。

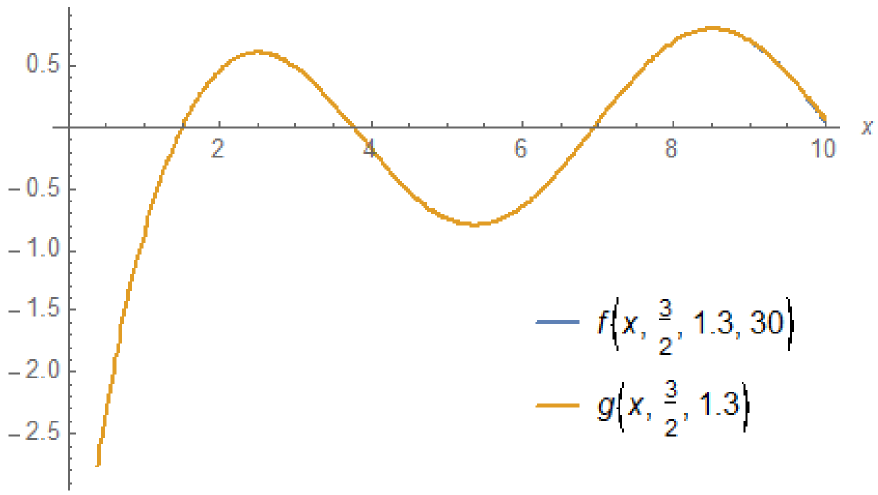
$$\int_a^x\cdots\int_a^x \sin x\,dx^n = \sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right) - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\sin\left\{a-\frac{\pi(n-s)}{2}\right\}$$

よって (2.2') は

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^r\left\{\sin\left(x-\frac{\pi r}{2}\right) - \sum_{s=0}^{r-1}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\sin\left\{a-\frac{\pi(r-s)}{2}\right\}\right\}$$
$$= \frac{c}{1+c^2}\left\{c\sin x - \cos x - \left(c\sin a - \cos a\right)e^{c(a-x)}\right\}$$

$a=3/2$, $c=1.3$ のときΣを30項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっているので青(左辺)は見えない。

```
f[x_, a_, c_, m_] := Sum[(-1)^(r-1) c^r (Sin[x - π r/2] - Sum[(x - a)^s/s! Sin[a - π (r - s)/2], {s, 0, r-1}]), {r, 1, m}]
g[x_, a_, c_] := c/(1 + c^2) (c Sin[x] - Cos[x] - (c Sin[a] - Cos[a]) E^(c (a-x)))
```



25·2 奇数階積分級数

本節では、次のような等比係数付高階積分級数を考察する。

$$c^1\int_a^x f(x)\,dx \pm c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^3 + c^5\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^5 \pm c^7\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^7 +\pm\ \cdots$$

定理25·2·1

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m} c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} &= \frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx\right\}\\ &- (-1)^{2m-1}c^{2m}\cosh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\frac{e^{cx}+(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx\\ &+ (-1)^{2m-1}c^{2m}\sinh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\frac{e^{cx}-(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx\end{aligned} \tag{1.1}$$

特に $\lim_{m\to\infty} c^{2m}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1} = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx\right\} \tag{1.1'}$$

証明

2つの関数の積の積分について次の反復部分積分の公式が成立する。(拙著ア·ラ·カルト編「 01 一般化されたテイラーの定理 」)

$$\int_a^x f(x)g(x)\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)g^{(r-1)}(x)\right]_a^x + (-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)g^{(m)}(x)\,dx$$

$g(x)=\cosh cx\,,\ \sinh cx$ のとき、

$$(\cosh cx)^{(r-1)} = c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\ ,\quad (\cosh cx)^{(m)} = c^m\frac{e^{cx}+(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}$$

$$(\sinh cx)^{(r-1)} = c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\ ,\quad (\sinh cx)^{(m)} = c^m\frac{e^{cx}-(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)\cosh cx\,dx &= \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\right]_a^x\\ &+ (-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)c^m\frac{e^{cx}+(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)\sinh cx\,dx &= \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\right]_a^x\\ &+ (-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)c^m\frac{e^{cx}-(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx\end{aligned}$$

ここで

$$f^{<r>}(x) = \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r \qquad r=1,2,\cdots,m$$

とすれば、$f^{\langle r\rangle}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m)$ であるから、

$$\int_a^x f(x)\cosh cx\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\frac{e^{cx}+(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx$$

$$\int_a^x f(x)\sinh x\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\frac{e^{cx}-(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}=c^0\cosh cx-c^1\sinh cx+c^2\cosh cx-c^3\sinh cx+-\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}=c^0\sinh cx-c^1\cosh cx+c^2\sinh cx-c^3\cosh cx+-\cdots$$

両辺に $\cosh cx,\ \sinh cx$ をそれぞれ乗じれば

$$\cosh cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}$$
$$=c^0\cosh^2 cx-c^1\cosh cx\sinh cx+c^2\cosh^2 cx-c^3\cosh cx\sinh cx+-\cdots$$

$$\sinh cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}$$
$$=c^0\sinh^2 cx-c^1\sinh cx\cosh cx+c^2\sinh^2 cx-c^3\sinh cx\cosh cx+-\cdots$$

右辺第2項は

$$(-1)^m\cosh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\frac{e^{cx}+(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx$$

$$(-1)^m\sinh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\frac{e^{cx}-(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx$$

$\cosh^2 cx-\sinh^2 cx=1$ であるから、

$$\cosh cx\int_a^x f(x)\cosh cx\,dx-\sinh cx\int_a^x f(x)\sinh cx\,dx=\sum_{r=1}^{m}c^{2r-2}\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1}$$
$$+(-1)^{2m-1}\cosh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}c^{2m-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$
$$-(-1)^{2m-1}\sinh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}c^{2m-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して奇数とならねばならない。

さらに

$$\cosh cx\int_a^x f(x)\cosh cx\,dx-\sinh cx\int_a^x f(x)\sinh cx\,dx$$
$$=\frac{e^{cx}+e^{-cx}}{2}\int_a^x f(x)\frac{e^{cx}+e^{-cx}}{2}dx-\frac{e^{cx}-e^{-cx}}{2}\int_a^x f(x)\frac{e^{cx}-e^{-cx}}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx \right\}$$

であるからこれを用いれば

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r-2}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \frac{1}{2}\left\{ e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx \right\}$$
$$- (-1)^{2m-1}c^{2m-1}\cosh cx\int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2m-1} \right\} \frac{e^{cx}+(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$
$$+ (-1)^{2m-1}c^{2m-1}\sinh cx\int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2m-1} \right\} \frac{e^{cx}-(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$

両辺に c を乗じて (1.1) を得る。

例1 $c^1\int_a^x dx + c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x dx^3 + c^5\int_a^x \cdots \int_a^x dx^5 + c^7\int_a^x \cdots \int_a^x dx^7 + \cdots$

$$f(x)=1\,, \qquad \int_a^x \cdots \int_a^x dx^m = \frac{(x-a)^m}{m\,!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r-1} = \frac{c}{2}\left\{ e^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x e^{cx}dx \right\}$$
$$- (-1)^{2m-1}c^{2m}\cosh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^{cx}+(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$
$$+ (-1)^{2m-1}c^{2m}\sinh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^{cx}-(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$

ここで

$$\frac{c}{2}\left\{ e^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x e^{cx}dx \right\} = \frac{ce^{cx}}{2}\left[-\frac{e^{-cx}}{c} \right]_a^x + \frac{ce^{cx}}{2}\left[\frac{e^{cx}}{c} \right]_a^x$$
$$= \frac{e^{c(x-a)}-e^{-c(x-a)}}{2} = \sinh\{c(x-a)\}$$

であるから、

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r-1} = \sinh\{c(x-a)\}$$
$$- (-1)^{2m-1}c^{2m}\cosh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^{cx}+(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$
$$+ (-1)^{2m-1}c^{2m}\sinh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)\,!}\,\frac{e^{cx}-(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx \tag{1.2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r-1} = \sinh\{c(x-a)\} \tag{1.2'}$$

この左辺は

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r-1}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r-1} = \sum_{r=1}^{m} c^{2r-1}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)\,!}$$

これを (1.2), (1.2') の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r-1}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)!} = sinh\{c(x-a)\}$$
$$-(-1)^{2m-1}c^{2m}cosh\, cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{e^{cx}+(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx$$
$$+(-1)^{2m-1}c^{2m}sinh\, cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{e^{cx}-(-1)^{-2m+1}e^{-cx}}{2}dx \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1}\frac{(x-a)^{2r-1}}{(2r-1)!} = sinh\{c(x-a)\} \tag{1.3'}$$

$x=3,\ a=1,\ c=2.1,\ m=5$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

```
f[x_, a_, c_, m_] := Sum[c^(2 r - 1) (x - a)^(2 r - 1)/(2 r - 1)!, {r, 1, m}]
g[x_, a_, c_, m_] := Sinh[c (x - a)]
    - (-1)^(2 m - 1) c^(2 m) Cosh[c x] Integrate[(t - a)^(2 m - 1)/(2 m - 1)! (E^(c t) + (-1)^(-2 m + 1) E^(-c t))/2, {t, a, x}]
    + (-1)^(2 m - 1) c^(2 m) Sinh[c x] Integrate[(t - a)^(2 m - 1)/(2 m - 1)! (E^(c t) - (-1)^(-2 m + 1) E^(-c t))/2, {t, a, x}]

N[f[3, 1, 2.1, 5]]        N[g[3, 1, 2.1, 5]]
33.1338                   33.1338
```

また、(1.3') が正しいことは、左辺が右辺のテイラー級数であることから明らかである。

定理25・2・2

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = c\cos cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx + c\sin cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx$$
$$-(-1)^{2m-1}c^{2m}\cos cx\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\cos\left\{cx+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx$$
$$-(-1)^{2m-1}c^{2m}\sin cx\int_a^x\left\{\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\sin\left\{cx+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx \tag{2.1}$$

特に $\lim_{m\to\infty} c^{2m}\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1} = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_a^x\!\!\cdots\!\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = c\cos cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx + c\sin cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx \tag{2.1'}$$

証明

2つの関数の積の積分について次式が成立する。

$$\int_a^x f(x)g(x)\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{<r>}(x)g^{(r-1)}(x)\right]_a^x + (-1)^m\int_a^x f^{<m>}(x)g^{(m)}(x)\,dx$$

$g(x)=\sin cx$, $\cos cx$ のとき、

$$(\cos cx)^{(r-1)}=c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\quad,\quad(\cos cx)^{(m)}=c^{m}\cos\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$(\sin cx)^{(r-1)}=c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\quad,\quad(\sin cx)^{(m)}=c^{m}\sin\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\int_a^x f(x)\cos cx\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{\langle r\rangle}(x)c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\right]_a^x$$
$$+(-1)^m\int_a^x f^{\langle m\rangle}(x)c^m\cos\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$\int_a^x f(x)\sin cx\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\left[f^{\langle r\rangle}(x)c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\right]_a^x$$
$$+(-1)^m\int_a^x f^{\langle m\rangle}(x)c^m\sin\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

ここで

$$f^{\langle r\rangle}(x)=\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r\qquad r=1,2,\cdots,m$$

とすれば、$f^{\langle r\rangle}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m)$ であるから、

$$\int_a^x f(x)\cos cx\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\cos\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$\int_a^x f(x)\sin x\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\sin\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}=c^0\cos cx+c^1\sin cx-c^2\cos cx-c^3\sin cx\ ++--\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}=c^0\sin cx-c^1\cos cx-c^2\sin cx+c^3\cos cx\ ++--\cdots$$

両辺に $\cos cx,\ \sin cx$ をそれぞれ乗じれば

$$\cos cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}$$
$$=c^0\cos^2 cx+c^1\sin cx\cos cx-c^2\cos^2 cx-c^3\sin cx\cos cx\ ++--\cdots$$

$$\sin cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}$$
$$=c^0\sin^2 cx-c^1\sin cx\cos cx-c^2\sin^2 cx+c^3\sin cx\cos cx\ ++--\cdots$$

右辺第2項は、

$$(-1)^m \cos cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\cos\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$(-1)^m \sin cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\sin\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$\cos^2 cx+\sin^2 cx=1$ であるから、

$$\cos cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx+\sin cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{2r-2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1}$$

$$+(-1)^{2m-1}c^{2m-1}\cos cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\cos\left\{cx+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx$$

$$+(-1)^{2m-1}c^{2m-1}\sin cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m-1}\right\}\sin\left\{cx+\frac{(2m-1)\pi}{2}\right\}dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して奇数とならねばならない。

両辺に c を乗じ剰余項を移項して (2.1) を得る。

例2 $c^1\int_a^x e^x dx-c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3+c^5\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^5-c^7\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^7+-\cdots$

$f(x)=e^x$ であるから、これを (2.1') へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^{2r-1}=c\cos cx\int_a^x e^x\cos cx\,dx+c\sin cx\int_a^x e^x\sin cx\,dx$$

右辺は

$$\int_a^x e^x\cos cx\,dx=\frac{1}{1+c^2}\left\{e^x(c\sin cx+\cos cx)-e^a(c\sin ca+\cos ca)\right\}$$

$$\int_a^x e^x\sin cx\,dx=\frac{1}{1+c^2}\left\{e^x(\sin cx-c\cos cx)-e^a(\sin ca-c\cos ca)\right\}$$

より

$$\cos x\int_a^x e^x\cos x\,dx+\sin x\int_a^x e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{1+c^2}-\frac{e^a}{1+c^2}\left[\cos\{c(x-a)\}-c\sin\{c(x-a)\}\right]$$

故に

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^{2r-1}=\frac{ce^x}{1+c^2}-\frac{ce^a}{1+c^2}\left[\cos\{c(x-a)\}-c\sin\{c(x-a)\}\right]$$

(2.2')

左辺の高階積分は定理4·1·3(4·1)より次のようになる。

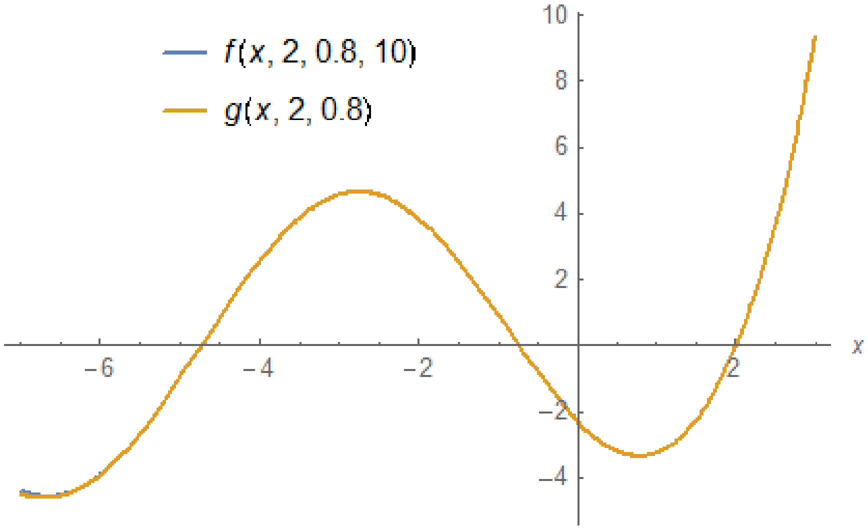
$$\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^n=e^x-e^a\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(x-a)^s}{s!}$$

よって (2.2') は

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\left\{e^x-e^a\sum_{s=0}^{2r-2}\frac{(x-a)^s}{s!}\right\}=\frac{ce^x}{1+c^2}-\frac{ce^a}{1+c^2}\left[\cos\{c(x-a)\}-c\sin\{c(x-a)\}\right]$$

(2.3')

$a=2$, $c=0.8$ としΣを10項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



f(x, 2, 0.8, 10)
g(x, 2, 0.8)
10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−4
−2
2
x

25・3 偶数階積分級数

本節では、次のような等比係数付高階積分級数を考察する。

$$c^2\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 \pm c^4\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^4 + c^6\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^6 \pm c^8\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^8 +\pm\ \cdots$$

定理25・3・1

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m} c^{2r}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} &= \frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx - e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx\right\}\\ &\quad - c^{2m+1}\sinh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\cosh cx\,dx\\ &\quad + c^{2m+1}\cosh cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\sinh cx\,dx \qquad (1.1)\end{aligned}$$

特に $\lim_{m\to\infty} c^{2m+1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m} = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx - e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx\right\} \qquad (1.1')$$

証明

定理25・2・1の証明中で 次式が得られた。

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)\cosh cx\,dx &= \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r\\ &\quad + (-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\frac{e^{cx}+(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)\sinh cx\,dx &= \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r\\ &\quad + (-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\frac{e^{cx}-(-1)^{-m}e^{-cx}}{2}dx\end{aligned}$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2} = c^0\cosh cx - c^1\sinh cx + c^2\cosh cx - c^3\sinh cx +- \cdots$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2} = c^0\sinh cx - c^1\cosh cx + c^2\sinh cx - c^3\cosh cx +- \cdots$$

両辺に $\sinh cx,\ \cosh cx$ をそれぞれ乗じれば

$$\begin{aligned}&\sinh cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}+(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\\ &\qquad = c^0\sinh cx\cosh cx - c^1\sinh^2 cx + c^2\sinh cx\cosh cx - c^3\sinh^2 cx +- \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cosh cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\frac{e^{cx}-(-1)^{-r+1}e^{-cx}}{2}\\ &\qquad = c^0\cosh cx\sinh cx - c^1\cosh^2 cx + c^2\cosh cx\sinh cx - c^3\cosh^2 cx +- \cdots\end{aligned}$$

右辺第2項は

$$(-1)^m \sinh cx \int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^m \right\} c^m \frac{e^{cx}+(-1)^{-m} e^{-cx}}{2} dx$$

$$(-1)^m \cosh cx \int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^m \right\} c^m \frac{e^{cx}-(-1)^{-m} e^{-cx}}{2} dx$$

$\cosh^2 cx - \sinh^2 cx = 1$ であるから、

$$\sinh cx \int_a^x f(x) \cosh cx\, dx - \cosh cx \int_a^x f(x) \sinh cx\, dx = \sum_{r=1}^{m} c^{2r-1} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^{2r}$$

$$+(-1)^{2m} \sinh cx \int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^{2m} \right\} c^{2m} \frac{e^{cx}+(-1)^{-2m} e^{-cx}}{2} dx$$

$$-(-1)^{2m} \cosh cx \int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^{2m} \right\} c^{2m} \frac{e^{cx}-(-1)^{-2m} e^{-cx}}{2} dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して偶数とならねばならない。さらに

$$\sinh cx \int_a^x f(x) \cosh cx\, dx - \cosh cx \int_a^x f(x) \sinh cx\, dx$$

$$= \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{2} \int_a^x f(x) \frac{e^{cx}+e^{-cx}}{2} dx - \frac{e^{cx}+e^{-cx}}{2} \int_a^x f(x) \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ e^{cx} \int_a^x f(x) e^{-cx} dx - e^{-cx} \int_a^x f(x) e^{cx} dx \right\}$$

であるからこれを用いれば

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r-1} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^{2r} = \frac{1}{2} \left\{ e^{cx} \int_a^x f(x) e^{-cx} dx - e^{-cx} \int_a^x f(x) e^{cx} dx \right\}$$

$$- c^{2m} \sinh cx \int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^{2m} \right\} \cosh cx\, dx$$

$$+ c^{2m} \cosh cx \int_a^x \left\{ \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\, dx^{2m} \right\} \sinh cx\, dx$$

両辺に c を乗じて (1.1) を得る。

例1 $c^2 \int_a^x \int_a^x dx^2 + c^4 \int_a^x \cdots \int_a^x dx^4 + c^6 \int_a^x \cdots \int_a^x dx^6 + c^8 \int_a^x \cdots \int_a^x dx^8 + \cdots$

$$f(x)=1\,, \quad \int_a^x \cdots \int_a^x dx^m = \frac{(x-a)^m}{m\,!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r} \int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r} = \frac{c}{2} \left\{ e^{cx} \int_a^x e^{-cx} dx - e^{-cx} \int_a^x e^{cx} dx \right\}$$

$$- c^{2m+1} \sinh cx \int_a^x \frac{(x-a)^{2m}}{(2m)\,!} \cosh cx\, dx$$

$$+ c^{2m+1} \cosh cx \int_a^x \frac{(x-a)^{2m}}{(2m)\,!} \sinh cx\, dx$$

ここで

$$\frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx - e^{-cx}\int_a^x e^{cx}dx\right\} = \frac{ce^{cx}}{2}\left[-\frac{e^{-cx}}{c}\right]_a^x - \frac{ce^{cx}}{2}\left[\frac{e^{cx}}{c}\right]_a^x$$

$$= \frac{e^{c(x-a)}-1}{2} - \frac{-e^{-c(x-a)}+1}{2}$$

$$= \cosh\{c(x-a)\} - 1$$

であるから、

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r} = \cosh\{c(x-a)\} - 1 - c^{2m+1}\sinh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m}}{(2m)!}\cosh cx\,dx$$
$$+ c^{2m+1}\cosh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m}}{(2m)!}\sinh cx\,dx \tag{1.2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r} = \cosh\{c(x-a)\} - 1 \tag{1.2'}$$

この左辺は

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r}\int_a^x \cdots \int_a^x dx^{2r} = \sum_{r=1}^{m} c^{2r}\frac{(x-a)^{2r}}{(2r)!}$$

これを (1.2), (1.2') の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m} c^{2r}\frac{(x-a)^{2r}}{(2r)!} = \cosh\{c(x-a)\} - 1 - c^{2m+1}\sinh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m}}{(2m)!}\cosh cx\,dx$$
$$+ c^{2m+1}\cosh cx\int_a^x \frac{(x-a)^{2m}}{(2m)!}\sinh cx\,dx \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r}\frac{(x-a)^{2r}}{(2r)!} = \cosh\{c(x-a)\} - 1 \tag{1.3'}$$

$x=3,\ a=1,\ c=2.3,\ m=4$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

$$f[x\_, a\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} c^{2r}\frac{(x-a)^{2r}}{(2r)!}$$

$$g[x\_, a\_, c\_, m\_] := \mathrm{Cosh}[c(x-a)] - 1$$
$$- c^{2m+1}\,\mathrm{Sinh}[c\,x]\int_a^x \frac{(t-a)^{2m}}{(2m)!}\mathrm{Cosh}[c\,t]\,dt$$
$$+ c^{2m+1}\,\mathrm{Cosh}[c\,x]\int_a^x \frac{(t-a)^{2m}}{(2m)!}\mathrm{Sinh}[c\,t]\,dt$$

```
N[f[3, 1, 2.3, 4]]          N[g[3, 1, 2.3, 4]]
47.3669                     47.3669
```

また、(1.3') が正しいことは、$\cosh\{c(x-a)\}$ をテイラー展開すれば明らかである。

定理25・3・2

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{2r}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = c\sin cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx - c\cos cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx$$
$$- c^{2m+1}\sin cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\cos(cx+m\pi)\,dx$$
$$+ c^{2m+1}\cos cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\sin(cx+m\pi)\,dx \tag{2.1}$$

特に $\lim_{m\to\infty} c^{2m+1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}=0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = c\sin cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx - c\cos cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx \tag{2.1'}$$

証明

定理 25・2・2の証明中で 次式が得られた。

$$\int_a^x f(x)\cos cx\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\cos\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$$\int_a^x f(x)\sin cx\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r$$
$$+(-1)^m\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\sin\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

これらの右辺第1項の一部を展開すると

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\cos\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = c^0\cos cx+c^1\sin cx - c^2\cos cx - c^3\sin cx ++--\cdots$$
$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{r-1}\sin\left\{cx+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\} = c^0\sin cx - c^1\cos cx - c^2\sin cx + c^3\cos cx ++--\cdots$$

両辺に $\sin cx,\ \cos cx$ をそれぞれ乗じれば

$$\sin cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\cos\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}$$
$$= c^0\sin cx\cos cx + c^1\sin^2 cx - c^2\sin cx\cos cx - c^3\sin^2 cx ++--\cdots$$

$$\cos cx\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sin\left\{x+\frac{(r-1)\pi}{2}\right\}$$
$$= c^0\cos cx\sin cx - c^1\cos^2 cx - c^2\cos cx\sin cx + c^3\cos^2 cx ++--\cdots$$

右辺第2項は

$$(-1)^m\sin cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\cos\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$
$$(-1)^m\cos cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^m\right\}c^m\sin\left(cx+\frac{m\pi}{2}\right)dx$$

$\cos^2 cx+\sin^2 cx=1$ であるから、

$$\sin cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx - \cos cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r}$$
$$+\,c^{2m}\sin cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\cos(cx+m\pi)\,dx$$
$$-\,c^{2m}\cos cx\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2m}\right\}\sin(cx+m\pi)\,dx$$

ここで、右辺第2項と第3項の m は第1項に対応して偶数とならねばならない。
両辺に c を乗じ、剰余項を移項して (2.1) を得る。

例2 $c^2\int_0^x\int_0^x x^2dx^2 - c^4\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^4 + c^6\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^6 - c^8\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^8 +- \cdots$

$f(x)=x^2$ であるから、これを (2.1') へ代入すれば、

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r}\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2r} = c\sin cx\int_0^x x^2\cos cx\,dx - c\cos cx\int_0^x x^2\sin cx\,dx$$

右辺は

$$\int_0^x x^2\cos cx\,dx = \frac{2cx\cos cx + (c^2x^2-2)\sin cx}{c^3}$$
$$\int_0^x x^2\sin cx\,dx = \frac{2cx\sin cx - (c^2x^2-2)\cos cx - 2}{c^3}$$

であるから

$$c\sin cx\int_0^x x^2\cos cx\,dx - c\cos cx\int_0^x x^2\sin cx\,dx = \frac{c^2x^2-2+2\cos cx}{c^2}$$

故に

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r}\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^{2r} = \frac{c^2x^2-2+2\cos cx}{c^2} \tag{2.2'}$$

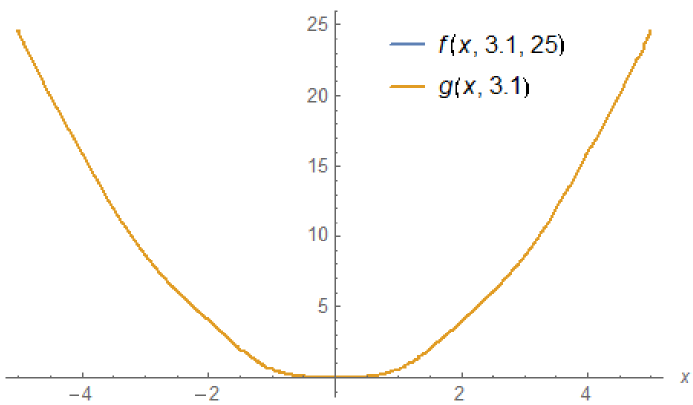
左辺の高階積分は次のようになる。

$$\int_0^x\cdots\int_0^x x^2\,dx^n = \frac{2!}{(2+n)!}x^{2+n}$$

よって (2.2') は

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r}\frac{2!}{(2+2r)!}x^{2+2r} = \frac{c^2x^2-2+2\cos cx}{c^2} \tag{2.3'}$$

$c=3.1$ のとき Σを25項ほど計算して両辺を図示すると次頁のとおり。両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



25･4 係数付高階積分級数

本節では、次のような等差係数と等比係数のを持つ高階積分級数を考察する。

$$1c^1\int_a^x f(x)dx \pm 2c^2\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2 + 3c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3 \pm 4c^4\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^4 +\pm \cdots$$

定理25･4･1

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m} rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r &= ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + c^2e^{cx}\int_a^x\int_a^x f(x)e^{-cx}dx^2 \\ &\quad -(m+1)c^{m+1}e^{cx}\int_a^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{m-1}\right\}e^{-cx}dx^2 \\ &\quad + mc^{m+2}e^{cx}\int_a^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m\right\}e^{-cx}dx^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

特に $\lim_{m\to\infty} mc^{m+2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty} rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + c^2e^{cx}\int_a^x\int_a^x f(x)e^{-cx}dx^2 \tag{1.1'}$$

証明

$f^{<r>}(a)=0 \ \ (r=1,2,\cdots,m+n-1)$ のとき、定理16･1･2 (16･1) により次式が成立する。

$$\begin{aligned}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx^n &= \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{<n+r>}g^{(r)} \\ &\quad + \frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^n\end{aligned}$$

そこで $g=e^{-cx}$, $n=2$ と置けば、$g^{(r)}=(-1)^r c^r e^{-cx}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_a^x\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx^2 &= \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-2}{r} f^{<2+r>}(-1)^r c^r e^{-cx} \\ &\quad + \frac{(-1)^m}{B(2,m)}\frac{{}_1C_0}{m+0}\int_a^x\int_a^x f^{<m+0>}(-1)^{m+0}c^{m+0}e^{-cx}dx^2 \\ &\quad + \frac{(-1)^m}{B(2,m)}\frac{{}_1C_1}{m+1}\int_a^x\int_a^x f^{<m+1>}(-1)^{m+1}c^{m+1}e^{-cx}dx^2\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\int_a^x\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx^2 &= \sum_{r=0}^{m-1}(1+r)f^{<2+r>}c^r e^{-cx} \\ &\quad + (m+1)c^m\int_a^x\int_a^x f^{<m>}e^{-cx}dx^2 - mc^{m+1}\int_a^x\int_a^x f^{<m+1>}e^{-cx}dx^2 \\ &\quad \left\{\because \ \ (-1)^r\binom{-2}{r} = 1+r \ , \ \frac{1}{B(2,m)} = m(m+1)\right\}\end{aligned}$$

ここで関数 f の積分演算子 $<r>$ のインデックスから 1 を減じると

$$\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<-1>}e^{-cx}dx^2=\sum_{r=0}^{m-1}(1+r)f^{<1+r>}c^r e^{-cx}$$

$$+(m+1)c^m\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m-1>}e^{-cx}dx^2-mc^{m+1}\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m>}e^{-cx}dx^2$$

左辺は、

$$\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<-1>}e^{-cx}dx^2=\int_a^x\left\{\left[f^{<0>}e^{-cx}\right]_a^x+c\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx\right\}dx$$

$$=\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx+c\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx^2$$

これを上の左辺に代入すると

$$\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx+c\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx^2=\sum_{r=0}^{m-1}(1+r)f^{<1+r>}c^r e^{-cx}$$

$$+(m+1)c^m\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m-1>}e^{-cx}dx^2-mc^{m+1}\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m>}e^{-cx}dx^2$$

これより

$$e^{-cx}\sum_{r=1}^{m}rc^{r-1}f^{<r>}(x)=\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx+c\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<0>}e^{-cx}dx^2$$

$$-(m+1)c^m\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m-1>}e^{-cx}dx^2+mc^{m+1}\int_a^x\!\!\int_a^x f^{<m>}e^{-cx}dx^2$$

ここで

$$f^{<r>}=\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^r\ ,\quad f^{<m-1>}=\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^{m-1}\ ,\quad f^{<m>}=\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^m$$

と置けばこれらは条件 $f^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m+1)$を満たす。よってこれらを代入し両辺に$ce^{cx}$ を乗じれば

$$\sum_{r=1}^{m}rc^r\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^r=ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx+c^2e^{cx}\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^{-cx}dx^2$$

$$-(m+1)c^{m+1}e^{cx}\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^{m-1}\right\}e^{-cx}dx^2$$

$$+mc^{m+2}e^{cx}\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x f(x)dx^m\right\}e^{-cx}dx^2 \quad (1.1)$$

例1　$1c^1\int_a^x dx+2c^2\int_a^x\!\!\int_a^x dx^2+3c^3\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x dx^3+\cdots$

$$f(x)=1\ ,\quad \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x dx^{m-1}=\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}\ ,\quad \int_a^x\!\cdots\!\int_a^x dx^m=\frac{(x-a)^m}{m!}$$

であるから、これらを (1.1) へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{m}rc^r\int_a^x\!\cdots\!\int_a^x dx^r=ce^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx+c^2e^{cx}\int_a^x\!\!\int_a^x e^{-cx}dx^2$$

$$-(m+1)c^{m+1}e^{cx}\int_a^x\!\!\int_a^x\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-cx}dx^2$$

$$+mc^{m+2}e^{cx}\int_a^x\int_a^x\frac{(x-a)^m}{m!}e^{-cx}dx^2$$

右辺第1項と第2項は

$$ce^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx+ce^{cx}\int_a^x\int_a^x e^{-cx}dx^2=ce^{cx}\frac{e^{ca}-e^{cx}}{c}+ce^{cx}\int_a^x\frac{e^{ca}-e^{cx}}{c}dx$$

$$=ce^{c(x-a)}(x-a)$$

右辺第3項と第4項は、長い計算の末、次のようになる。

$$-(m+1)c^{m+1}e^{cx}\int_a^x\int_a^x\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-cx}dx^2+mc^{m+2}e^{cx}\int_a^x\int_a^x\frac{(x-a)^m}{m!}e^{-cx}dx^2$$

$$=-ce^{c(x-a)}(x-a)$$

$$+\frac{m+1}{(m-1)!}e^{c(x-a)}[c(x-a)\Gamma\{m,c(x-a)\}-\Gamma\{1+m,c(x-a)\}]$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}e^{c(x-a)}[c(x-a)\Gamma\{1+m,c(x-a)\}-\Gamma\{2+m,c(x-a)\}]$$

これらを上に代入すれば

$$\sum_{r=1}^{m}rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r=ce^{c(x-a)}(x-a)-ce^{c(x-a)}(x-a)$$

$$+\frac{m+1}{(m-1)!}e^{c(x-a)}[c(x-a)\Gamma\{m,c(x-a)\}-\Gamma\{1+m,c(x-a)\}]$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}e^{c(x-a)}[c(x-a)\Gamma\{1+m,c(x-a)\}-\Gamma\{2+m,c(x-a)\}]$$

(1.2)

$$\sum_{r=1}^{\infty}rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r=ce^{c(x-a)}(x-a)\qquad(1.2')$$

この左辺は

$$\sum_{r=1}^{m}rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x dx^r=\sum_{r=1}^{m}\frac{rc^r(x-a)^r}{r!}$$

これを (1.2), (1.2’) の左辺に用いると

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{rc^r(x-a)^r}{r!}=ce^{c(x-a)}(x-a)-ce^{c(x-a)}(x-a)$$

$$+\frac{m+1}{(m-1)!}e^{c(x-a)}[c(x-a)\Gamma\{m,c(x-a)\}-\Gamma\{1+m,c(x-a)\}]$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}e^{c(x-a)}[c(x-a)\Gamma\{1+m,c(x-a)\}-\Gamma\{2+m,c(x-a)\}]$$

(1.3)

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rc^r(x-a)^r}{r!}=ce^{c(x-a)}(x-a)\qquad(1.3')$$

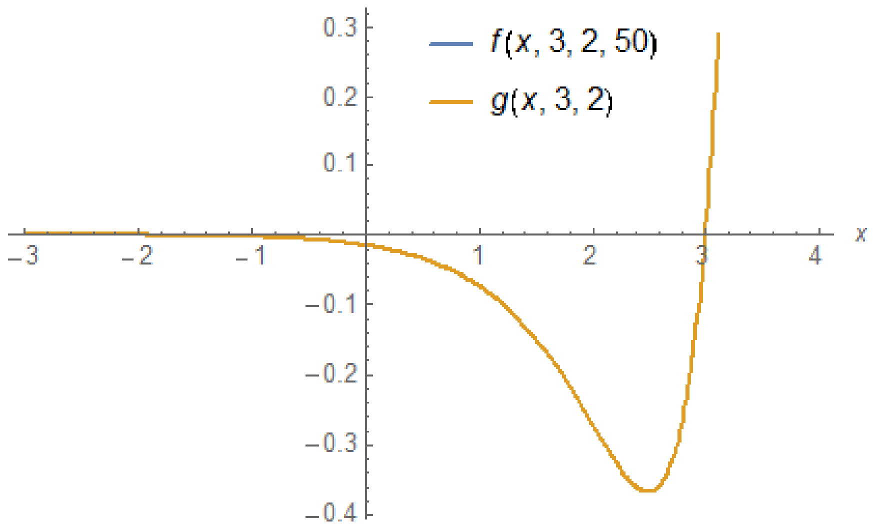
$x=4,\ a=3,\ c=2,\ m=7$ のとき、(1.3) の両辺を計算すると次のようになる。

$$\texttt{f[x\_, a\_, c\_, m\_] :=}\sum_{r=1}^{m}\frac{r\,c^r\,(x-a)^r}{r!}\qquad \texttt{Γ[x\_, y\_] := Gamma[x, y]}$$

```
g[x_, a_, c_, m_] := c e^(c (x-a)) (x - a) - c e^(c (x-a)) (x - a)
    + (m + 1)/(m - 1)! e^(c (x-a)) (c (x - a) Γ[m, c (x - a)] - Γ[1 + m, c (x - a)])
    - 1/(m - 1)! e^(c (x-a)) (c (x - a) Γ[1 + m, c (x - a)] - Γ[2 + m, c (x - a)])
```

```
N[f[4, 3, 2, 7]]            N[g[4, 3, 2, 7]]
14.7111                     14.7111
```

また、$a=3,\ c=2$ のとき Σを50項ほど計算して (1.3') の両辺を図示すると次のとおり。
両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



定理25･4･2

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = ce^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx - c^2e^{-cx}\int_a^x\int_a^x f(x)e^{cx}dx^2$$
$$-(-1)^m(m+1)c^{m+1}e^{-cx}\int_a^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{m-1}\right\}e^{cx}dx^2$$
$$+(-1)^{m+1}mc^{m+2}e^{-cx}\int_a^x\int_a^x\left\{\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m\right\}e^{cx}dx^2 \qquad (2.1)$$

特に $\displaystyle\lim_{m\to\infty} mc^{m+2}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m = 0$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}rc^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = ce^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx - c^2e^{-cx}\int_a^x\int_a^x f(x)e^{cx}dx^2 \qquad (2.1')$$

証明

定理 25･4･1の証明 と類似の方法による。

例2 $\displaystyle 1c\int_0^x \log x\,dx - 2c^2\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^2 + 3c^3\int_0^x\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^3 - 4c^4\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\,dx^4 + - \cdots$

$f(x)=log\,x$, $a=0$ を 定理の (2.1) へ代入すれば

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}rc^r\int_0^x\cdots\int_0^x log\,x\,dx^r = ce^{-cx}\int_0^x log\,x\,e^{cx}dx - c^2e^{-cx}\int_0^x\int_0^x log\,x\,e^{cx}dx^2$$

$$-(-1)^m(m+1)c^{m+1}e^{-cx}\int_0^x\int_0^x\left\{\int_0^x\cdots\int_0^x log\,x\,dx^{m-1}\right\}e^{cx}dx^2$$

$$+(-1)^{m+1}mc^{m+2}e^{-cx}\int_0^x\int_0^x\left\{\int_0^x\cdots\int_0^x log\,x\,dx^m\right\}e^{cx}dx^2$$

右辺第1項と第2項は

$$\int_0^x log\,x e^{cx}dx = \frac{1}{c}\left[e^{cx}log|x| - Ei(cx)\right]_0^x = \frac{1}{c}\left\{e^{cx}log|x| - Ei(cx)+\gamma+log\,c\right\}$$

$$\int_0^x\int_0^x log\,x e^{cx}dx = \frac{1}{c}\int_0^x\left\{e^{cx}log|x| - Ei(cx)+\gamma+log\,c\right\}dx$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[e^{cx}(log|x|+1)-(cx+1)Ei(cx)+(\gamma+log\,c)cx\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{e^{cx}(log|x|+1)-(cx+1)Ei(cx)+(\gamma+log\,c)cx\right\}-\frac{1}{c^2}(1-\gamma-log\,c)$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{e^{cx}(log|x|+1)-(cx+1)Ei(cx)+cx(\gamma+log\,c)+\gamma+log\,c-1\right\}$$

ここで $Ei(x)=\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}dt$, $\gamma=0.5772\cdots$ (オイラー・マスケロニの定数)

これらより

$$ce^{-cx}\int_0^x log\,x\,e^{cx}dx - c^2e^{-cx}\int_0^x\int_0^x log\,x\,e^{cx}dx^2 = \frac{ce^{-cx}}{c}\left\{e^{cx}log|x| - Ei(cx)+\gamma+log\,c\right\}$$

$$-\frac{c^2e^{-cx}}{c^2}\left\{e^{cx}(log|x|+1)-(cx+1)Ei(cx)+cx(\gamma+log\,c)+\gamma+log\,c-1\right\}$$

$$= -1+e^{-cx}-\gamma cxe^{-cx}+cxe^{-cx}Ei(cx)-cxe^{-cx}log\,c$$

$$= cxe^{-cx}\left\{Ei(cx)-log\,c-\gamma\right\}+e^{-cx}-1$$

i.e.

$$ce^{-cx}\int_0^x log\,x\,e^{cx}dx - c^2e^{-cx}\int_0^x\int_0^x log\,x\,e^{cx}dx^2 = cxe^{-cx}\left\{Ei(cx)-logc-\gamma\right\}+e^{-cx}-1$$

次に、

$$\int_0^x\cdots\int_0^x log\,x\,dx^m = \frac{x^m}{m!}\left(log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right)$$

であるから、これを右辺の第3項と第4項に用いれば、右辺は次のようになる。

$$cxe^{-cx}\left\{Ei(cx)-logc-\gamma\right\}+e^{-cx}-1$$

$$-(-1)^m(m+1)c^{m+1}e^{-cx}\int_0^x\int_0^x\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right)e^{cx}dx^2$$

$$+(-1)^{m+1}mc^{m+2}e^{-cx}\int_0^x\int_0^x\frac{x^m}{m!}\left(log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right)e^{cx}dx^2$$

i.e.

$$cx e^{-cx}\{Ei(cx) - \log c - \gamma\} + e^{-cx} - 1$$
$$- (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} c^{m+1} e^{-cx} \int_0^x\!\!\int_0^x x^{m-1}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^{cx} dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{(m-1)!} c^{m+2} e^{-cx} \int_0^x\!\!\int_0^x x^{m}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^{cx} dx^2$$

かくして次を得る。

$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} r c^r \int_0^x \cdots \int_0^x \log x \, dx^r = cx e^{-cx}\{Ei(cx) - \log c - \gamma\} + e^{-cx} - 1$$
$$- (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} c^{m+1} e^{-cx} \int_0^x\!\!\int_0^x x^{m-1}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^{cx} dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{(m-1)!} c^{m+2} e^{-cx} \int_0^x\!\!\int_0^x x^{m}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^{cx} dx^2 \quad (2.2)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} r c^r \int_0^x \cdots \int_0^x \log x \, dx^r = cx e^{-cx}\{Ei(cx) - \log c - \gamma\} + e^{-cx} - 1 \quad (2.2')$$

これらの左辺は、

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log x \, dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)$$

であるから、これを用いれば

$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \frac{r c^r x^r}{r!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) = cx e^{-cx}\{Ei(cx) - \log c - \gamma\} + e^{-cx} - 1$$
$$- (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} c^{m+1} e^{-cx} \int_0^x\!\!\int_0^x x^{m-1}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^{cx} dx^2$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{(m-1)!} c^{m+2} e^{-cx} \int_0^x\!\!\int_0^x x^{m}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^{cx} dx^2 \quad (2.3)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{r c^r x^r}{r!}\left(\log|x| - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right) = cx e^{-cx}\{Ei(cx) - \log c - \gamma\} + e^{-cx} - 1 \quad (2.3')$$

$x=-0.2,\ c=1.7,\ m=3$ のとき、(2.3) の両辺を計算すると次のようになる。

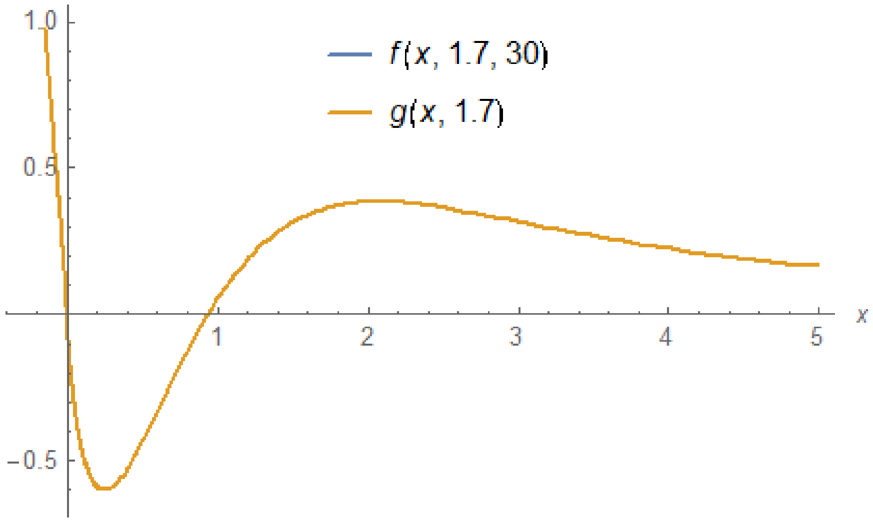
```
Ei[x_] := ExpIntegralEi[x]          γ := EulerGamma
```

$$f[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \frac{r\, c^r x^r}{r!}\left(\text{Log}[x] - \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right)$$

$$g[x\_, c\_, m\_] := c\, x\, e^{-c x} (\text{Ei}[c\, x] - \text{Log}[c] - \gamma) + e^{-c x} - 1$$
$$- (-1)^m \frac{m+1}{(m-1)!} c^{m+1} e^{-c x} \int_0^x \left(\int_0^u t^{m-1}\left(\text{Log}[\text{Abs}[t]] - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{s}\right) e^{c t}\, dt\right) du$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{(m-1)!} c^{m+2} e^{-c x} \int_0^x \left(\int_0^u t^{m}\left(\text{Log}[\text{Abs}[t]] - \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s}\right) e^{c t}\, dt\right) du$$

```
N[f[-0.2, 1.7, 3]]          N[g[-0.2, 1.7, 3]]
1.31432                     1.31432
```

また、c=1.7 のとき Σを30項ほど計算して(2.3') の両辺を図示すると次のとおり。
両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



25·5 二重級数による計算

等比係数付高階積分級数はまた二重級数により計算可能である。その方法は 24·4 ～ 24·6 とほとんど同じである。

定理 25·5·1

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \int_a^x \cdots \int_a^x e^{c(x-a)}\,dx^r \tag{1.1'}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \int_a^x \cdots \int_a^x e^{-c(x-a)}\,dx^r \tag{1.2'}$$

証明

$f^{(r)}(a) = f_a^r$ と略記して $f(x)$ を a の周りでテイラー展開すると

$$f(x) = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^0}{0!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots \tag{0}$$

両辺を a から x まで逐次項別積分すると

$$\int_a^x f(x)\,dx = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + \cdots$$

$$\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^2 = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^5}{5!} + \cdots$$

$$\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^3 = f_a^0 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f_a^1 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + f_a^2 \cdot \frac{(x-a)^5}{5!} + f_a^3 \cdot \frac{(x-a)^6}{6!} + \cdots$$

$$\vdots$$

(0) も含めてこれらにそれぞれ $c^0, c^1, c^2, \cdots$ を乗じると

$$c^0 f(x) = f_a^0 \cdot \frac{c^0 (x-a)^0}{0!} + f_a^1 \cdot \frac{c^0 (x-a)^1}{1!} + f_a^2 \cdot \frac{c^0 (x-a)^2}{2!} + f_a^3 \cdot \frac{c^0 (x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$c^1 \int_a^x f(x)\,dx = f_a^0 \cdot \frac{c^1 (x-a)^1}{1!} + f_a^1 \cdot \frac{c^1 (x-a)^2}{2!} + f_a^2 \cdot \frac{c^1 (x-a)^3}{3!} + f_a^3 \cdot \frac{c^1 (x-a)^4}{4!} + \cdots$$

$$c^2 \int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^2 = f_a^0 \cdot \frac{c^2 (x-a)^2}{2!} + f_a^1 \cdot \frac{c^2 (x-a)^3}{3!} + f_a^2 \cdot \frac{c^2 (x-a)^4}{4!} + f_a^3 \cdot \frac{c^2 (x-a)^5}{5!} + \cdots$$

$$c^3 \int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^3 = f_a^0 \cdot \frac{c^3 (x-a)^3}{3!} + f_a^1 \cdot \frac{c^3 (x-a)^4}{4!} + f_a^2 \cdot \frac{c^3 (x-a)^5}{5!} + f_a^3 \cdot \frac{c^3 (x-a)^6}{6!} + \cdots$$

$$\vdots$$

これらを縦に加え合わせると

$$c^0 f(x) + c^1 \int_a^x f(x)\,dx + c^2 \int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^2 + c^3 \int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)\,dx^3 \ \cdots$$

$$= f_a^0\left\{\frac{c^0(x-a)^0}{0!}+\frac{c^1(x-a)^1}{1!}+\frac{c^2(x-a)^2}{2!}+\frac{c^3(x-a)^3}{3!}+\cdots\right\}$$
$$+f_a^1\left\{\frac{c^0(x-a)^1}{1!}+\frac{c^1(x-a)^2}{2!}+\frac{c^2(x-a)^3}{3!}+\frac{c^3(x-a)^4}{4!}+\cdots\right\}$$
$$+f_a^2\left\{\frac{c^0(x-a)^2}{2!}+\frac{c^1(x-a)^3}{3!}+\frac{c^2(x-a)^4}{4!}+\frac{c^3(x-a)^5}{5!}+\cdots\right\}$$
$$\vdots$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty} f_a^r \sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s(x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

i.e.

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^r \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.1}$$

さらに

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} = \int_a^x\cdots\int_a^x e^{c(x-a)}dx^r$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^r \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x e^{c(x-a)}dx^r \tag{1.1'}$$

(1.2) , (1.2') も類似の方法で証明される。

Note

(1.1'), (1.2') を書き下せば次のようである。

$$c^0 f(x)\pm c^1\int_a^x f(x)dx + c^2\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2 \pm c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx^3 \pm + \cdots$$
$$= f^{(0)}(a)\pm f^{(1)}(a)\int_a^x e^{\pm c(x-a)}dx + f^{(2)}(a)\int_a^x\int_a^x e^{\pm c(x-a)}dx^2 \pm f^{(3)}(a)\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^{\pm c(x-a)}dx^3 + \pm \cdots$$

これらはテイラー級数に似ていて美しく、観賞用としては大変良い。しかし、あまり実用的ではない。

例1　$\log x + c^1\int_1^x \log x\,dx + c^2\int_1^x\int_1^x \log x\,dx^2 + c^3\int_1^x\int_1^x\int_1^x \log x\,dx^3 + \cdots$

$$f(x)=\log x\,,\quad (\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

であるから、(1.1), (1.1') より

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^r \int_1^x\cdots\int_1^x \log x\,dx^r = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s(x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(r-1)!\int_1^x\cdots\int_1^x e^{c(x-1)}dx^r$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、これらに $x=0.8$, $c=1.7$ を与えて Σを各10項ほど計算すると、次のようになる。

$$f[x\_, c\_, m\_] := \mathrm{Log}[x] + \sum_{r=1}^{m} \frac{c^r}{\mathrm{Gamma}[r]} \int_1^x (x-t)^{r-1} \mathrm{Log}[t]\, dt$$

$$g[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c^s (x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$h[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{\mathrm{Gamma}[r]} \int_1^x (x-t)^{r-1} e^{c(t-1)}\, dt$$

```
N[f[0.8, 1.7, 10]]      N[g[0.8, 1.7, 10]]      N[h[0.8, 1.7, 10]]
-0.190362               -0.190362               -0.190362
```

例2 $\sqrt{x} - c^1\int_1^x \sqrt{x}\,dx + c^2\int_1^x\int_1^x \sqrt{x}\,dx^2 - c^3\int_1^x\int_1^x\int_1^x \sqrt{x}\,dx^3 +- \cdots$

$f(x)=\sqrt{x}$ であるから、

$$f^{(n)}(1) = \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-n)} 1^{\frac{1}{2}-n} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}$$

故に (1.2) より

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c^r \int_a^x \cdots \int_a^x \sqrt{x}\,dx^r = e^{-c(x-1)} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-1}\frac{(2r-3)!!}{2^r} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、両辺に $x=0.9$, $c=1.3$ を与えて Σ を各15項ほど計算すると、次のようになる。

$$f[x\_, c\_, m\_] := \sqrt{x} + \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^r c^r}{\mathrm{Gamma}[r]} \int_1^x (x-t)^{r-1} \sqrt{t}\, dt$$

$$g[x\_, c\_, m\_] := e^{-c(x-1)} + \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \frac{(2r-3)!!}{2^r} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c^s (x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$

```
N[f[0.9, 1.3, 15]]      N[g[0.9, 1.3, 15]]
1.08406                 1.08406
```

前定理の証明中 において、(0)を含めずに計算すると次の定理を得る。

定理25・5・1’

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a) \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.3'}$$

この定理と 25・1 を併せると、指数関数と任意の関数の積の傍系積分を与える次の定理を得る。

定理25•5•1”

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\int_a^x e^{cx} f(x)dx = e^{cx}\sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{c^{s-1}(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.4}$$

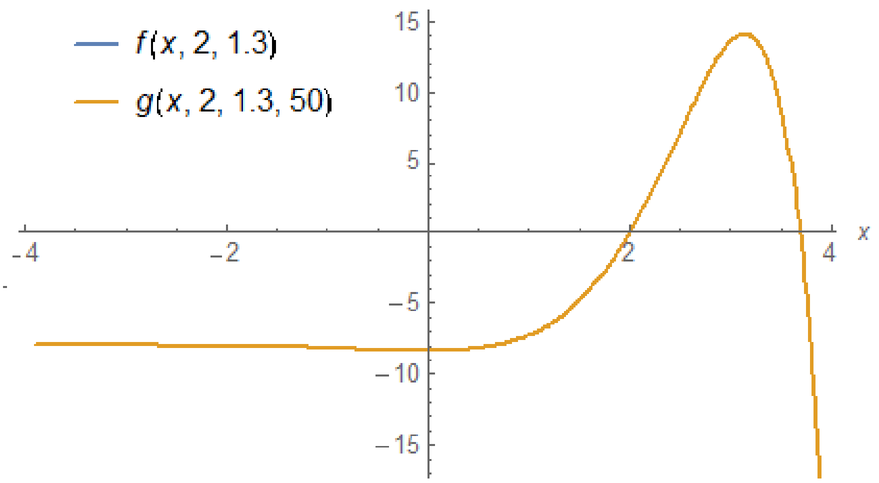
$$\int_a^x e^{-cx} f(x)dx = e^{-cx}\sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c^{s-1}(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} \tag{1.4'}$$

例2” $\int_a^x e^{cx}\sin x\,dx$

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\pi/2)$ $n=1,2,3,\cdots$ であるから、(1.4) より

$$\int_a^x e^{cx}\sin x\,dx = e^{cx}\sum_{r=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{r\pi}{2}\right)\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{c^{s-1}(x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$a=2,\ c=1.3$ のとき、Σを50項ほど計算して両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



定理 25•5•2

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s+1}(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} \tag{2.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x \sinh\{c(x-a)\}dx^r \tag{2.1'}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^{2s+1}(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} \tag{2.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x \sin\{c(x-a)\}dx^r \tag{2.2'}$$

証明

定理25•5•1の証明 と類似の方法による。

例3 $c^1\int_0^x \tan x\,dx + c^3\int_0^x\int_0^x\int_0^x \tan x\,dx^3 + c^5\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^5 + c^7\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^7 + \cdots$

公式9･2･6 (9･2) より、$\tan x$ の $x=0$ における高階微係数は次のようになる。

$$(\tan x)^{(2n-1)}\big|_{x=0} = T_{2n-1} = \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)\left|B_{2n}\right|}{2n} \quad , \quad (\tan x)^{(2n)}\big|_{x=0} = 0$$

ここで T_{2n-1} はタンジェント数であり、B_{2n} はベルヌイ数である。かくして (2.1) より

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^{2r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} T_{2r-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s+1}x^{2s+2r}}{(2s+2r)\,!}$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、両辺に $x=0.9$, $c=1.2$ を与えて Σを各12項ほど計算すると、次のようになる。

$$f[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{c^{2r-1}}{\text{Gamma}[2r-1]} \int_0^x (x-t)^{2r-2}\,\text{Tan}[t]\,dt$$

$$T[r\_] := \frac{2^{2r}\left(2^{2r}-1\right)\text{Abs}[\text{BernoulliB}[2r]]}{2r}$$

$$g[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} T[r] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c^{2s+1}x^{2s+2r}}{(2s+2r)\,!}$$

```
SetPrecision[f[0.9,1.2,12],6]
0.622605 + 0. × 10^-17 i
```

```
SetPrecision[g[0.9,1.2,12],6]
0.622605
```

例4 $c^1\int_0^x \sec x\,dx - c^3\int_0^x\int_0^x\int_0^x \sec x\,dx^3 + c^5\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^5 - c^7\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^7 +- \cdots$

公式9･2･8 (9･2) より、$\sec x$ の $x=0$ における高階微係数は次のようになる。

$$(\sec x)^{(2n)}\big|_{x=0} = \left|E_{2n}\right| \quad , \quad (\sec x)^{(2n+1)}\big|_{x=0} = 0$$

ここで E_{2n} はオイラー数である。かくして (2.2) より

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r-1}\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty}\left|E_{2r}\right|\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^{2s+1}x^{2s+1+2r}}{(2s+1+2r)\,!}$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、両辺に $x=0.3$, $c=1.1$ を与えて Σを各12項ほど計算すると、次のようになる。

$$f[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^{r-1}c^{2r-1}}{\text{Gamma}[2r-1]} \int_0^x (x-t)^{2r-2}\,\text{Sec}[t]\,dt$$

$$g[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} \text{Abs}[\text{EulerE}[2r]] \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c^{2s+1}x^{2s+1+2r}}{(2s+1+2r)\,!}$$

```
SetPrecision[f[0.3, 1.1, 12],6]
0.329080 + 0. × 10^-15 i
```

```
SetPrecision[g[0.3, 1.1, 12],6]
0.329080
```

定理 25･5･3

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^{2r}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{3.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x \cosh\{c(x-a)\}\,dx^{2r} \tag{3.1'}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c^{2r}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^{2s}(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{3.2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x \cos\{c(x-a)\}\,dx^{r} \tag{3.2'}$$

証明

定理 25･5･1の証明 と類似の方法による。

例5 $\tan^{-1}x + c^2\int_1^x\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^2 + c^4\int_1^x\cdots\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^4 + c^6\int_1^x\cdots\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^6 + \cdots$

「岩波数学公式Ｉ」p39 によれば、自然数 n について次式が成立する。

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = (n-1)!\cos^n(\tan^{-1}x)\sin\left(n\left(\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

これより

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)}\Big|_{x=1} = \frac{(n-1)!}{2^{n/2}}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

これを (3.1) に代入して

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^{2r}\int_1^x\cdots\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^{2r} = \frac{\pi}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-1)^{2s}}{(2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r-1)!}{2^{r/2}}\sin\left(\frac{3r\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-1)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、両辺に $x=1.8$, $c=2.1$ を与えて Σを各17項ほど計算したところ、次のようになった。

$$f[x\_,c\_,m\_] := \mathrm{ArcTan}[x] + \sum_{r=1}^{m}\frac{c^{2r}}{\mathrm{Gamma}[2r]}\int_1^x (x-t)^{2r-1}\,\mathrm{ArcTan}[t]\,dt$$

$$g[x\_,c\_,m\_] := \frac{\pi}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-1)^{2s}}{(2s)!} + \sum_{r=1}^{m}\frac{(r-1)!}{2^{r/2}}\sin\left[\frac{3r\pi}{4}\right]\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-1)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

```
N[f[1.8, 2.1, 17]]        N[g[1.8, 2.1, 17]]
2.63984                   2.63984
```

前定理の証明中 において、(0) を含めずに計算すると次の定理を得る。

定理 25･5･3'

c を任意の正数、a を解析関数 $f(x)$ の定義域上の任意の実数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{4.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r}\int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{c^{2s}(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} \tag{4.2}$$

例6 $c^2\int_0^x\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^2 - c^4\int_0^x \cdots \int_0^x \sin^{-1}x\,dx^4 + c^6\int_0^x \cdots \int_0^x \sin^{-1}x\,dx^6 - c^8\int_0^x \cdots \int_0^x \sin^{-1}x\,dx^8 +- \cdots$

公式9･3･2(9･3)より、$\sin^{-1}x$ の $x=0$ における高階微係数は次のようになる。

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(2n+1)}\Big|_{x=0} = {}_{2n}C_0(2n-1)!!\,(2n-1)!!\,0^0 = (2n-1)!!^2$$

よって (4.2) より

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}c^{2r}\int_0^x \cdots \int_0^x \sin^{-1}x\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}(2r-1)!!^2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{c^{2s}x^{2s+2r+1}}{(2s+2r+1)!}$$

高階積分を Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、両辺に $x=0.6$, $c=2.3$ を与えて Σを各10項ほど計算すると、次のようになる。

$$f[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=1}^{m}\frac{(-1)^{r-1}c^{2r}}{\mathrm{Gamma}[2r]}\int_0^x (x-t)^{2r-1}\,\mathrm{ArcSin}[t]\,dt$$

$$g[x\_, c\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}((2r-1)!!)^2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{c^{2s}x^{2s+2r+1}}{(2s+2r+1)!}$$

```
N[f[0.6, 2.3, 10]]          N[g[0.6, 2.3, 10]]
0.17668                     0.17668
```

2018.06.09

Kano Kono

宇宙人の数学