

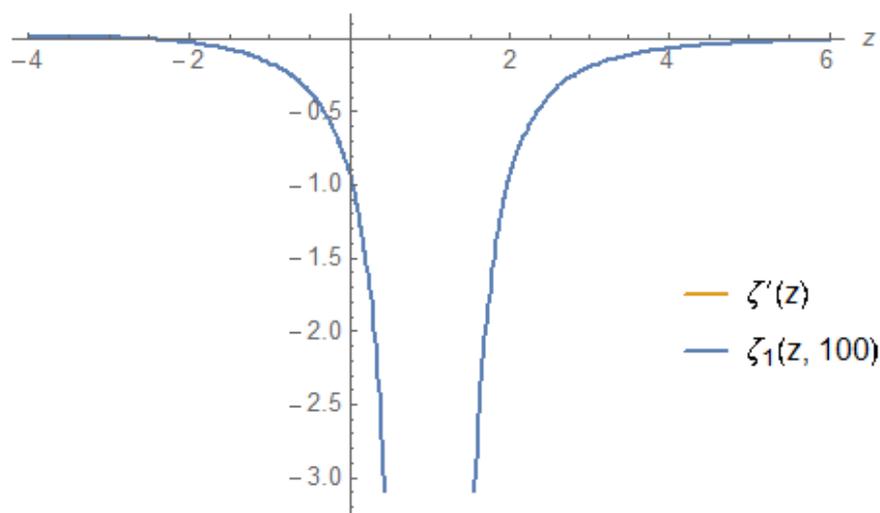
27 リーマン・ゼータの超微分の零点

27.1 $\zeta'(z)$ の零点

27.1.0 $\zeta'(z)$ のローラン展開

「26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分」公式 26.1.2h によれば、 γ_r をスチルチェス定数とすると、リーマン・ゼータ関数の1階導関数 $\zeta^{(1)}(z)$ は 1 の周りで次のようにローラン展開される

$$\zeta^{(1)}(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^{r-1}}{\Gamma(1+r-1)} \quad (1.0)$$



この式と図から明らかなように、 $\zeta^{(1)}(z)$ は $z=1$ において2位の極を持つ。

27.1.1 $\zeta'(z)$ の非自明な零点

"New zero-free regions for the derivatives of the Riemann Zeta Function" (T. Binder etc.) によれば、 $\zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点については、次のことが知られている。

- (i) リーマン仮説は $\zeta^{(1)}(x+iy)$ の零点が $0 < x < 1/2$ に存在しないことと同値である。
- (ii) $\zeta^{(1)}(x+iy)$ の零点は $x < 2.93938$ に存在する。
- (iii) $x \geq 1/2$ においては、 $\zeta^{(1)}(z)$ の零点の個数は $\zeta(z)$ の零点の個数よりも少ない。

本節では、これらのことを念頭において、 $\zeta^{(1)}(z)$ の零点を実際に求めて見る。

$\zeta^{(1)}(z)$ の零点においては、実数部 $\text{Re}\{\zeta^{(1)}(z)\}$ と虚数部 $\text{Im}\{\zeta^{(1)}(z)\}$ が共に0にならねばならない。つまり、次の連立方程式の零点を求めなければならない。

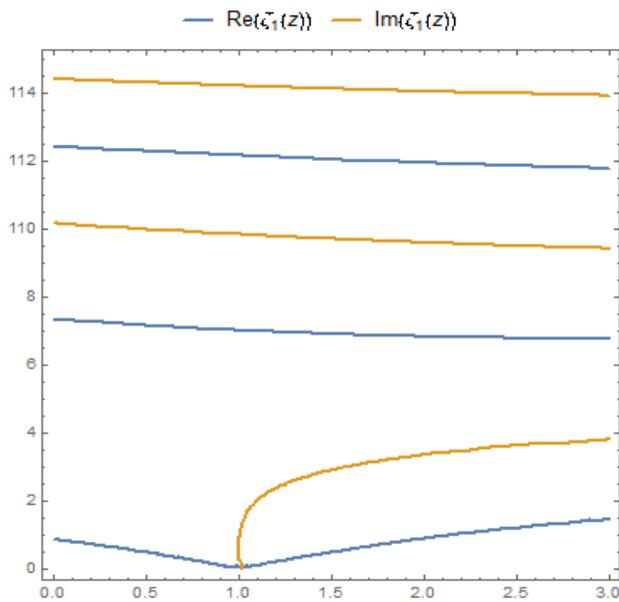
$$\begin{cases} \text{Re}[\zeta^{(1)}(x+iy)] = 0 & (1.1r) \\ \text{Im}[\zeta^{(1)}(x+iy)] = 0 & (1.1i) \end{cases}$$

これを解くことは不可能であるので、ニュートン・ラフソン法の如き数値解法を用いる他ない。数式処理ソフト *Mathematica* にはこのための関数 *FindRoot* [] が用意されているのでこれを

用いる。ところがそのためには、零点のおおよその位置が分かっているなければならない。これを知るには、(1.1r), (1.1i) の等高線図を描いてその交点を見つけるのが良い。Mathematica にはこのための関数 `ContourPlot[]` が用意されているのでこれを用いる。この際、上記 (ii) により、 x は高々3まで取れば良い、

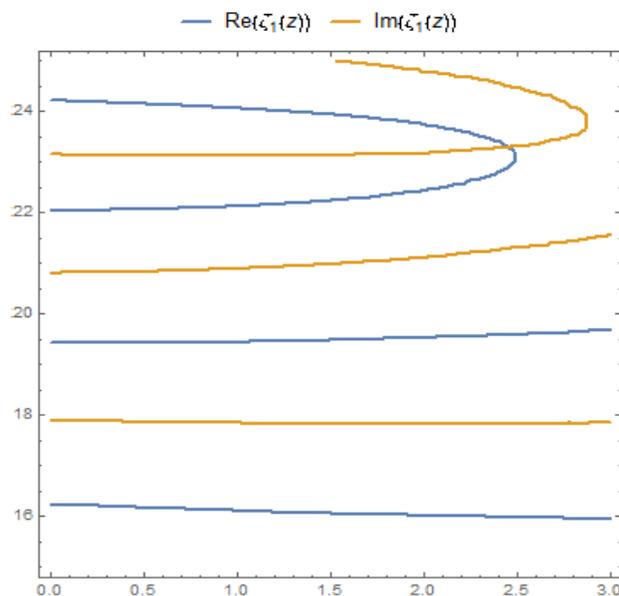
(1) $0 \leq y \leq 15$

この区間の等高線図を描くと次のようになる。(1, 0) において実数部と虚数部の交点らしきものが認められるが、これは零点ではなくて特異点(極)である。従って、この区間内に $\zeta^{(1)}(z)$ の零点は存在しない。



(2) $15 \leq y \leq 25$

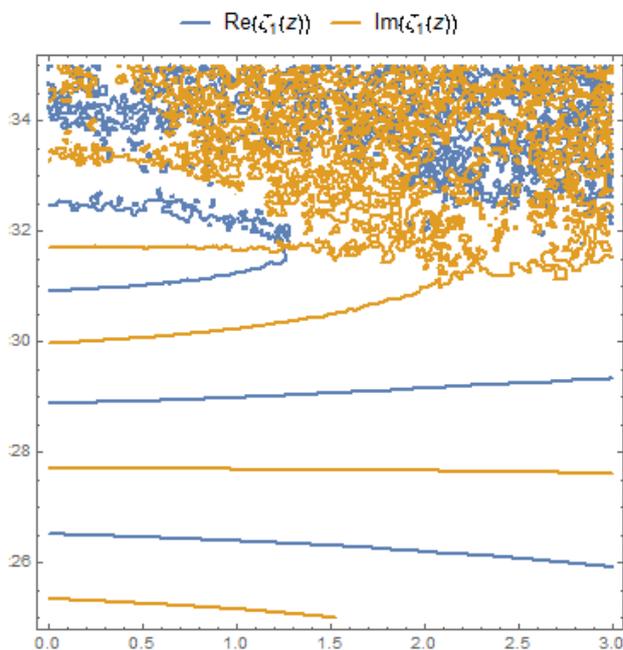
(2.5, 23) 付近に零点が認められる。数値計算すると右のようになる。これは $\zeta^{(1)}(z)$ の最初の零点である。



```
FindRoot[ $\zeta_1[z, 200]$ , {z, 2 + 23 i}]
{z → 2.46316 + 23.2983 i}
```

(3) $25 \leq y \leq 35$

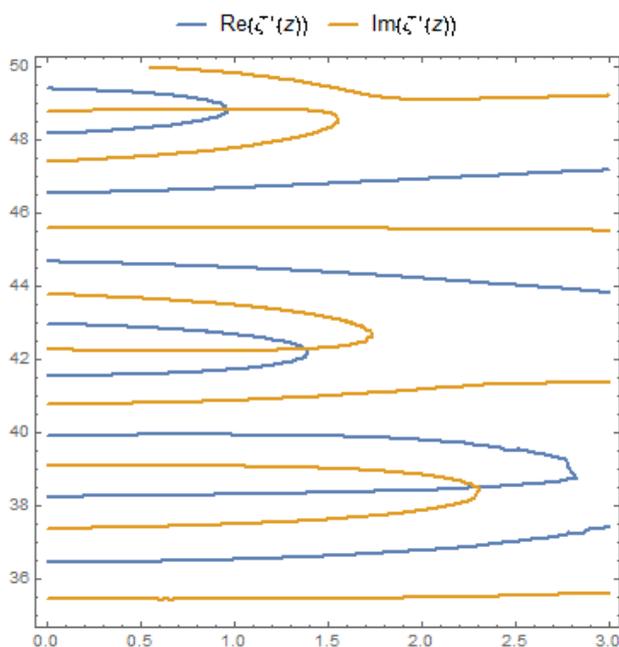
(1, 32) 付近に零点が認められるが、(1.0) の級数によっては正確な描画が出来ず、上の方はゴーストになっている。勿論、正確な数値計算もできない。そこで *Mathematica* の関数 *Zeta'[]* により数値計算したのが右である。



```
FindRoot[Zeta'[z], {z, 1 + 32 i}]
{z → 1.2865 + 31.7083 i}
```

(4) $35 \leq y \leq 50$

$y \geq 35$ は (1.0) の右辺ではなく左辺 (*Mathematica* の関数 *Zeta'[]*) により描画と数値計算を行なう。すると等高線図は次のようになる。零点は3か所認められる。これらを数値計算で求めると右のとおり。



```
FindRoot[Zeta'[z], {z, 1 + 49 i}]
{z → 0.964686 + 48.8472 i}
```

```
FindRoot[Zeta'[z], {z, 1 + 42 i}]
{z → 1.38276 + 42.291 i}
```

```
FindRoot[Zeta'[z], {z, 2 + 38 i}]
{z → 2.30757 + 38.49 i}
```

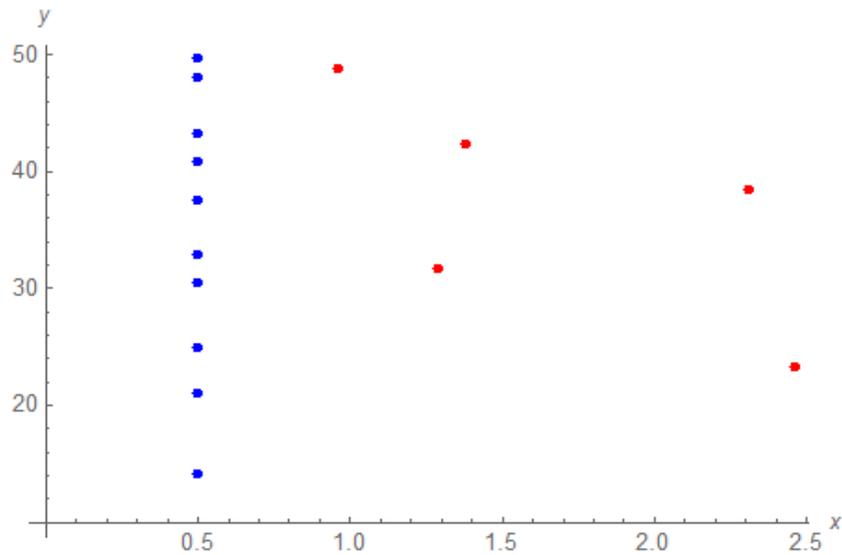
以上 $0 \leq y \leq 50$ の区間に5個の零点が得られた。有効16桁で再計算すれば次のとおり。

$2.46316186945432 + 23.29832049276286 i$
 $1.28649682226905 + 31.70825008311591 i$
 $2.30757006372263 + 38.48998317307893 i$
 $1.38276360571167 + 42.29096455459673 i$
 $0.96468562270569 + 48.84715990506848 i$

試みに最初の零点を $Zeta'[z]$ に代入すると次のようになる。

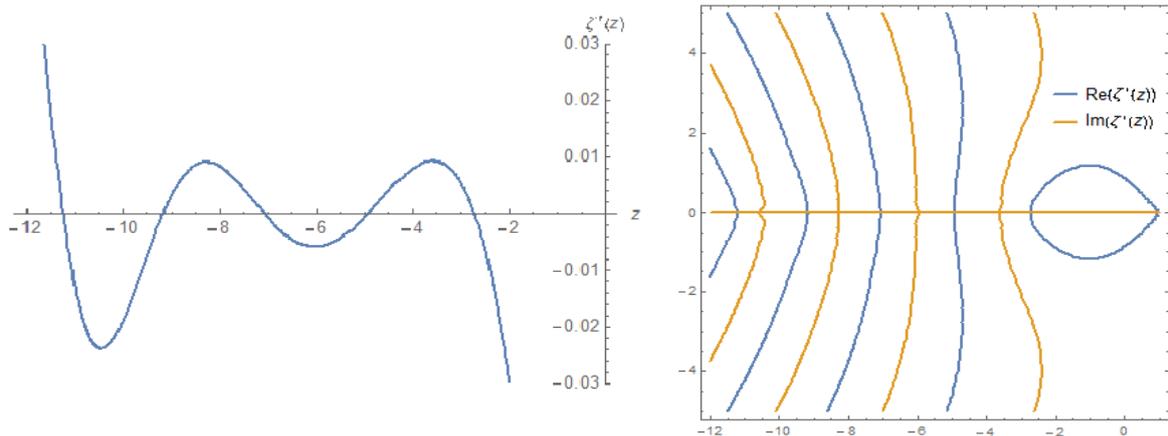
$N[Zeta'[2.46316186945432 + 23.29832049276286 i]]$
 $- 6.25143 \times 10^{-17} + 8.60553 \times 10^{-17} i$

これらを $\zeta(z)$ の零点と共に複素平面上にプロットすると次のようになる。青は $\zeta(z)$ の零点で赤は $\zeta^{(1)}(z)$ の零点である。後者の個数は前者から半減している。また、後者はいずれも前者の右側 ($y > 1/2$) に存在する。



27.1.2 $\zeta'(z)$ の自明な零点

$\zeta^{(1)}(z)$ の自明な零点について筆者は知見が無い。そこで先ずこの2D図と等高線図を描いて見ると、それぞれ次のようになる。



これらの図を観察すると、 $\zeta^{(1)}(z)$ の自明な零点は x 軸の負領域に分布していることが分かる。最初のいくつかを有効16桁で計算すれば次のようになる。

- 2.717262829204574

- 4.936762108594946

- 7.074597145007147

- 9.170493162785828

- 11.24121232537534

これらを観察すると、次のことが分かる。

- (1) -2 の近くには零点が存在しない。
- (2) $-4n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の近くには零点が存在しない。
- (3) $-(4n-1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の近くには零点が存在する。
- (4) 実数部の等高線の数は虚数部の等高線の数と同数である。

27.2 $\zeta^{(1/2)}(z)$ の零点

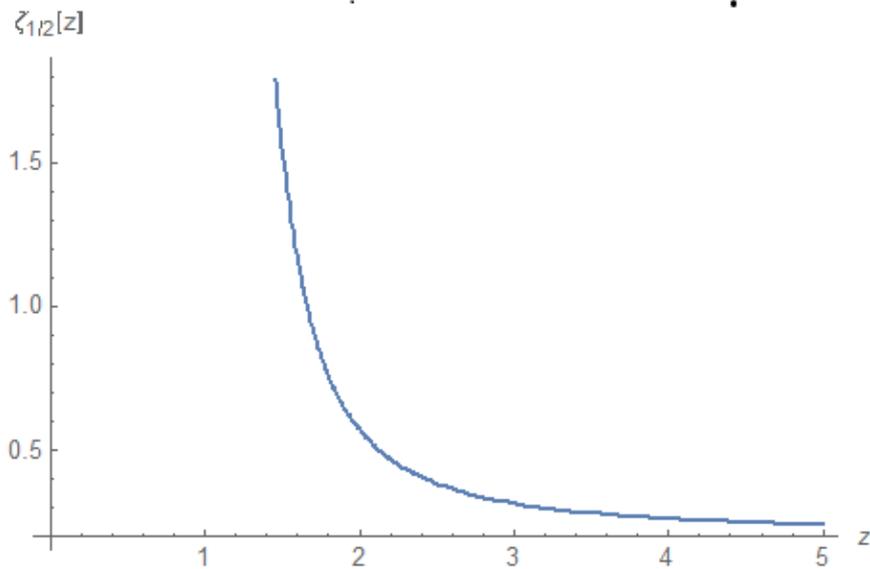
27.2.0 $\zeta(z)$ の超微分のローラン展開

「26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分」公式 26.1.2s によれば、 p を正数、 $\Gamma(p)$ をガンマ関数、 $\psi(p)$ をディ・ガンマ関数、そして γ_r をスチルチェス定数とすると、リーマン・ゼータ関数の p 階導関数 $\zeta^{(p)}(z)$ は 1 の周りで次のようにローラン展開される。

$$\zeta^{(p)}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(-p) - \gamma_0}{\Gamma(-p)} (z-1)^{-p-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)} \quad (2.0)$$

但し $p=0, 1, 2, \dots$ のとき、 $\frac{\psi(-p)}{\Gamma(-p)} = (-1)^{1+p} p!$

$p=1/2$ についてこれを図示すると次のようになる。この式と図から明らかのように、 $\zeta^{(p)}(z)$ は $z=1$ において $(1+p)$ 位の極を持つ。



(2.0) を用いれば任意の $p > 0$ について超微分が可能であるが、本章では $\zeta^{(0)}(z)$ と $\zeta^{(1)}(z)$ の間の超微分を取り扱う。そしてこの区間の超導関数の零点を俯瞰するには、ど真ん中である $\zeta^{(1/2)}(z)$ の零点を観察するのが良さそうである。

用いる関数は (2.0) から次のようになる。

$$\zeta^{(1/2)}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(-1/2) - \gamma_0}{\Gamma(-1/2)} (z-1)^{-3/2} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^{r-1/2}}{\Gamma(r+1/2)} \quad (2.1)$$

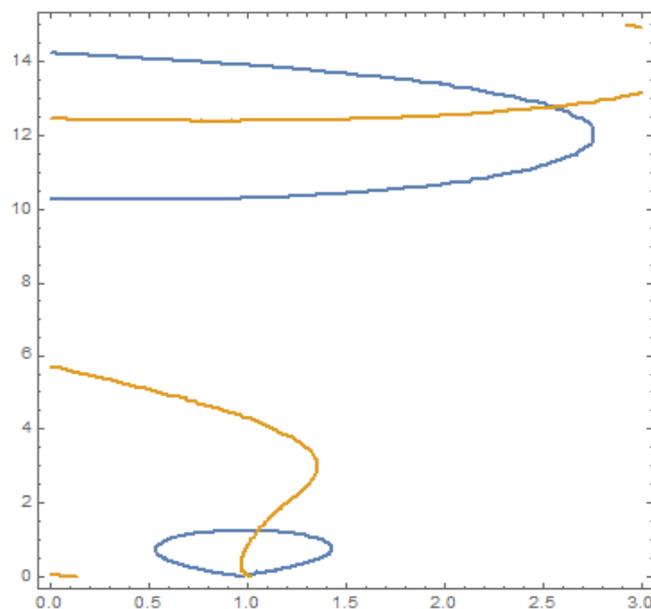
27.2.1 $\zeta^{(1/2)}(z)$ の非自明な零点

零点を見つける方法は 前節のやり方 を踏襲するが、 z の実数部 x の区間は少し広く取る。

(1) $0 \leq y \leq 15$

この区間の等高線図を描くと次のようになる。実数部と虚数部の交点(零点)は2カ所に認められる。数値計算するとそれぞれ右のようになる。一番下の交点は零点ではなくて特異点である。

```
ContourPlot[{Re[ $\zeta_{1/2}[x + i y, 200]$ ] == 0, Im[ $\zeta_{1/2}[x + i y, 200]$ ] == 0},
  {x, 0, 3}, {y, 0, 15},
  PlotLegends -> Placed[{Re[ $\zeta_{1/2}[z]$ ], Im[ $\zeta_{1/2}[z]$ ]}, Above]]
  — Re[ $\zeta_{1/2}(z)$ ] — Im[ $\zeta_{1/2}(z)$ ]
```

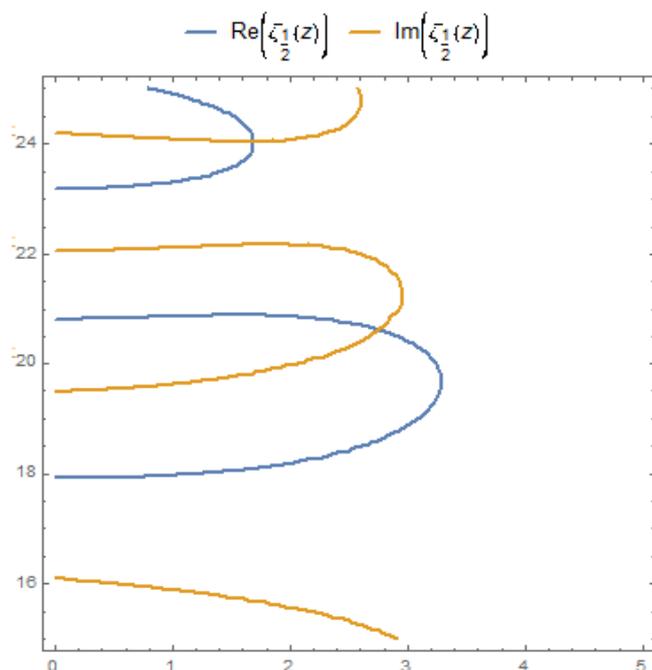


```
FindRoot[ $\zeta_{1/2}[z, 500]$ , {z, 2 + 12 i}]
{z -> 2.55716 + 12.7817 i}
```

```
FindRoot[ $\zeta_{1/2}[z, 500]$ , {z, 1 + i}]
{z -> 1.05107 + 1.24731 i}
```

(2) $15 \leq y \leq 25$

この区間にも2個の零点が認められる。数値計算するとそれぞれ右のようになる。但し、最初の零点は推定値である。



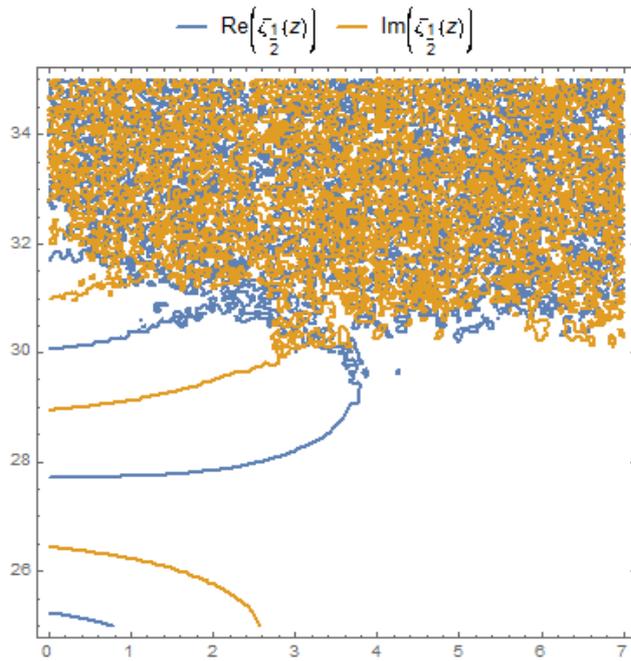
```
FindRoot[ $\zeta_{1/2}[z, 800]$ , {z, 2 + 24 i}]
{z -> 1.69601 + 24.0402 i} (estimate)
```

```
FindRoot[ $\zeta_{1/2}[z, 500]$ , {z, 3 + 20 i}]
{z -> 2.75378 + 20.6323 i}
```

(3) $25 \leq y \leq 35$

等高線図は次のようになる。ほとんどゴーストで、交点の所在は不明である。この図は、上記(2.1)の式と筆者のパソコン&ソフトによってはこれ以上の区間の零点を得ることが不可能なこと

を示している。



以上 $0 \leq y \leq 25$ の間に4個の零点が得られた。最初の3個を有効16桁で再計算すれば次のとおり。

$$1.051072530522430 + 1.247313910052378 i$$

$$2.557158597919913 + 12.781692663345648 i$$

$$2.75378063939152 + 20.63230715264229 i$$

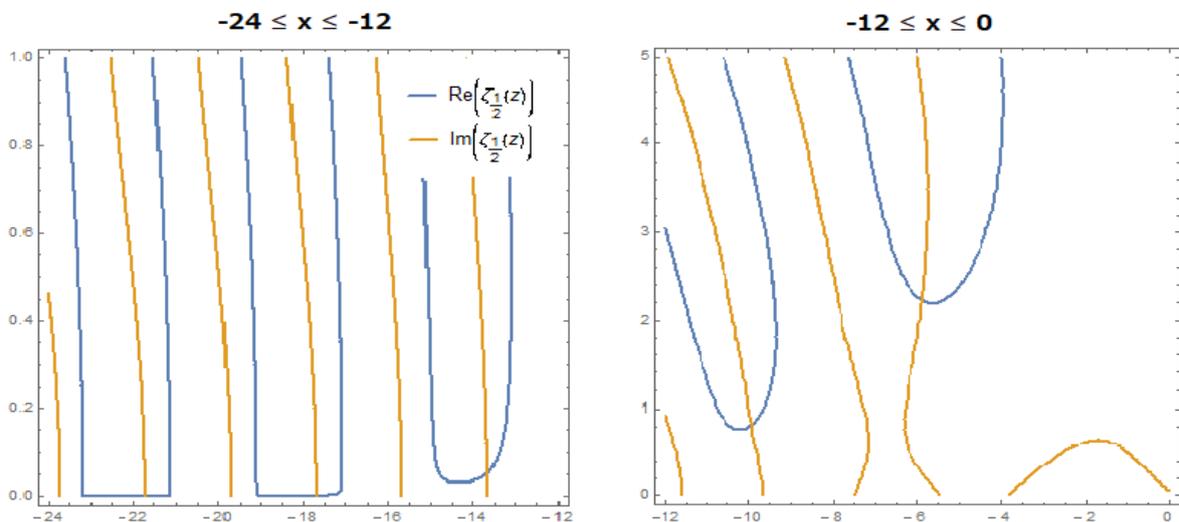
試みに最初の零点を(2.1)に代入すると次のようになる。

$$N[\zeta_{1/2}[1.051072530522430 + 1.247313910052378 i, 800]]$$

$$1.66533 \times 10^{-16} - 5.55112 \times 10^{-17} i$$

27.2.2 $\zeta^{(1/2)}(z)$ の自明な零点

$-24 \leq x \leq 12$ 及び $-12 \leq x \leq 0$ における等高線図を描くとそれぞれ次のようになる。左が前者で右が後者である。青線は実数部で橙線は虚数部である。



これらの零点を有効16桁で計算すれば次のとおり。

$$-5.864198759417357 + 2.229323948865088 i$$

$$-9.918588597642838 + 0.821020955865908 i$$

$$-13.65599352145248 + 0.054348228602989 i$$

$$-17.68830911654609 + 0.000815036808679 i$$

$$-21.71469646228788 + 0.000005378781454 i$$

これらを観察すると、次のことが分かる。

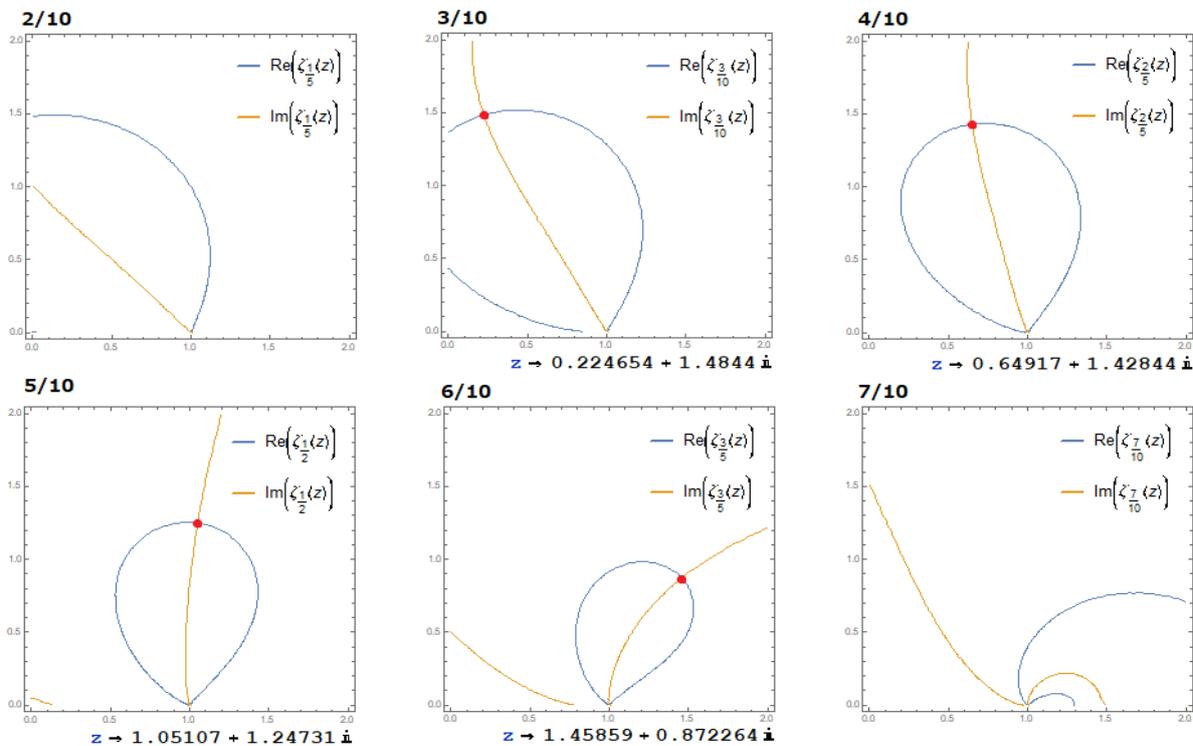
- (1) $x = -2$ の近くには零点が存在しない。
- (2) $x = -4n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の近くには零点が存在しない。
- (3) $x = -(4n+2)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の近くには零点が存在する。
- (4) 実数部の等高線の数は虚数部の等高線の数の半分である。

27・3 超微分に伴う非自明な零点の遷移

本節では、公式 (2.0) を用いて超微分に伴う $\zeta(z)$ の非自明な零点の遷移を調べる。

27・3・1 $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点 ($0 \leq y \leq 2$)

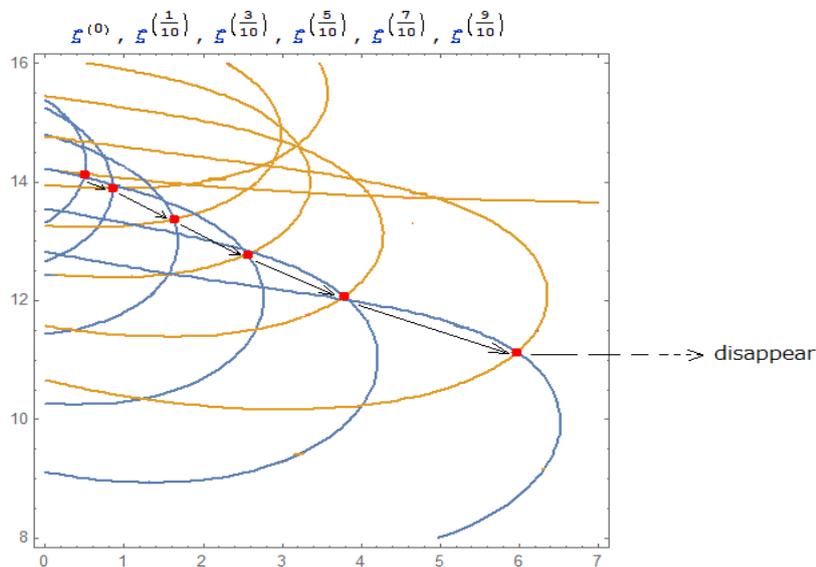
ここでは $0 \leq y \leq 2$ における $\zeta^{(2/10)}(z) \sim \zeta^{(7/10)}(z)$ の非自明な零点の変遷を調べる。
 x の区間は $0 \leq x \leq 2$ とする。これらの等高線図を描いて零点(赤点)を求めると次のようになる。



$\zeta^{(p)}(z)$ の零点は $p = 3/10$ 辺りから現れ、 $p = 4/10, 5/10, 6/10$ では右に移動して行き、 $p = 7/10$ では消滅している。これは非整数階においてのみ現れる超微分に固有の零点である。

27・3・2 $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の零点 ($8 \leq y \leq 16$)

次は $8 \leq y \leq 16$ における $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点の変遷を調べる。 x の区間は $0 \leq x \leq 7$ とする。これらの等高線と零点を纏めて1図に示すと次のようになる。

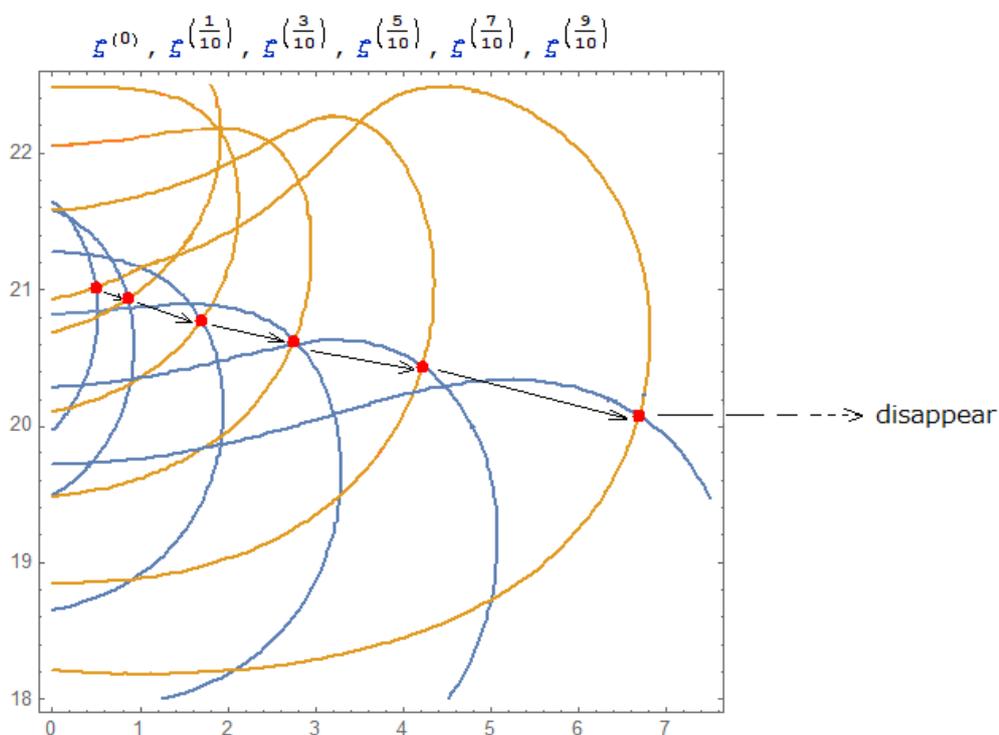


青線は実数部で橙線は虚数部である。赤点はこれらの交点、即ち零点である。左端の赤点は $\zeta(z)$ の最初の零点 $1/2+i 14.1347\dots$ である。この零点は $p=1/10 \sim 9/10$ では右に移動して行くが、 $p < 1$ である限り存在する。そしてこの零点は $p=1$ となった瞬間に突然消滅する。何故ならば、このときに実数部と虚数部は平行線になって交わらないからである。ちなみに、 $\zeta^{(0.99999)}(z)$ の零点は $z=20.59398\dots + i 9.68836\dots$ である。

以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2732.gif](#)

27.3.3 $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点 ($18 \leq y \leq 22.5$)

次は $18 \leq y \leq 22.5$ における $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点の変遷を調べる。 x の区間は $0 \leq x \leq 7.5$ とする。これらの等高線と零点を纏めて1図に示すと次のようになる。

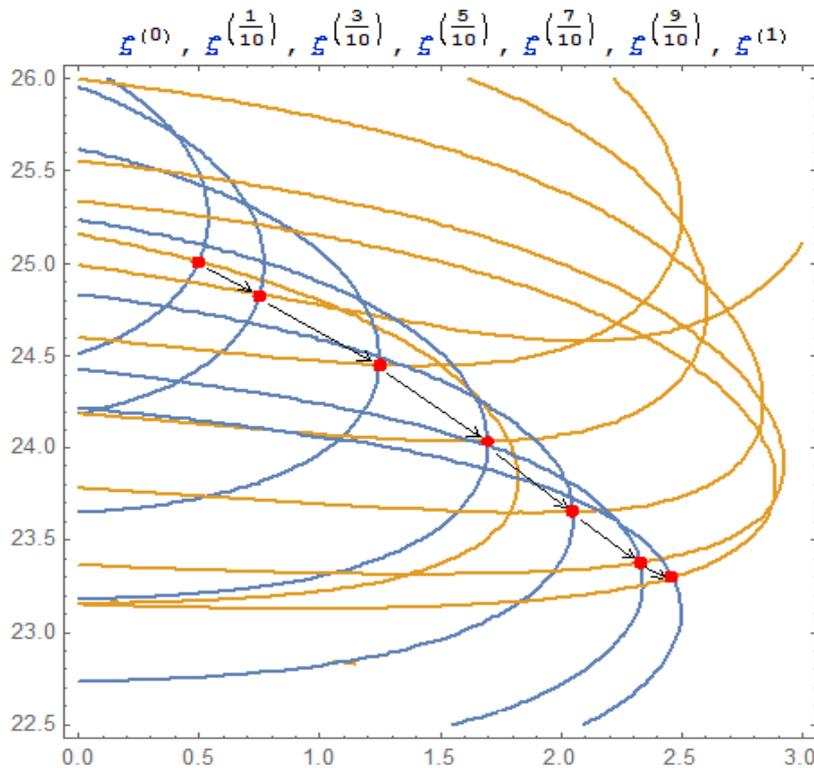


青線は実数部で橙線は虚数部である。赤点はこれらの交点、即ち零点である。左端の赤点は $\zeta(z)$ の2番目の零点 $1/2+i 21.0220\dots$ である。この零点は $p=1/10 \sim 9/10$ では右に移動して行くが、 $p < 1$ である限り存在する。そしてこの零点は $p=1$ となった瞬間に突然消滅する。何故ならば、このときに実数部と虚数部は平行線になって交わらないからである。ちなみに、 $\zeta^{(0.999)}(z)$ の零点はおおよそ $z=13.984 + i 19.522$ である。

27.3.4 $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点 ($22.5 \leq y \leq 26$)

最後は $22.5 \leq y \leq 26$ における $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点の変遷を調べる。 x の区間は $0 \leq x \leq 3$ とする。これらの等高線と零点を纏めて1図に示すと次頁のようになる。青線は実数部で橙線は虚数部である。赤点はこれらの交点、即ち零点である。

左端の赤点は $\zeta(z)$ の3番目の零点 $1/2+i 25.0108\dots$ である。この零点は $p=1/10 \sim 9/10$ では右に移動して行き、終に $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $2.4631\dots+i 23.2983\dots$ に至る。



以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2734.gif](#)

まとめ

$0 \leq y \leq 26$ の区間について $\zeta^{(p)}(z)$ $p = 0 \sim 1$ の非自明な零点の遷移を調べたところ、次の結果を得た。

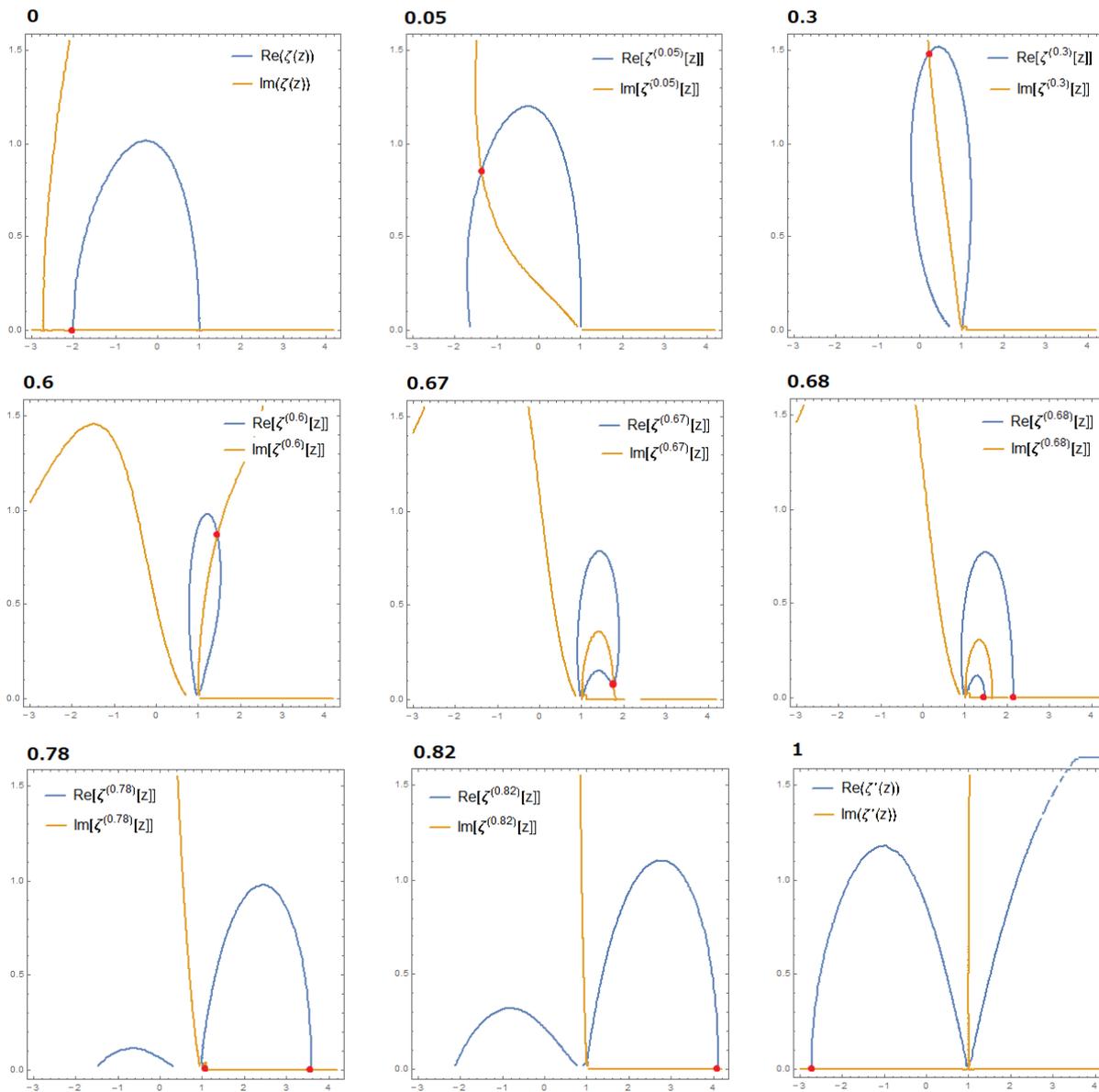
- (1) 非整数階導関数 ($0 < p < 1$) に固有の非自明な零点が存在する。
- (2) $\zeta(z)$ の最初の2つの零点 $1/2+i 14.1347\dots$ 及び $1/2+i 21.0220\dots$ は p の増加に伴って右下に移動し、 $\zeta^{(1)}(z)$ に至って突然消滅する。このことは $\zeta^{(1)}(z)$ の零点の個数が $\zeta(z)$ の零点の個数よりも少ないこと (27・1・1 (iii)) に符合する。
- (3) $\zeta(z)$ の3番目の零点 $1/2+i 25.0108\dots$ は p の増加に伴って右下に移動し、 $\zeta^{(1)}(z)$ の最初の零点 $2.4631\dots+i 23.2983\dots$ となる。このことは $\zeta^{(1)}(z)$ の零点が $0 < x < 1/2$ に存在しないと言う主張 (27・1・1 (i)) を支援する。
- (4) (2.0) の式と筆者のパソコン&ソフトによっては、 $y \geq 26$ での零点を得ることは不可能である。より収束の速い公式か、より高速のパソコンか、専用のプログラムか、その全てかが必要である。

27・4 超微分に伴う自明な零点の遷移

本節では、公式 (2.0) を用いて超微分に伴う $\zeta(z)$ の自明な零点の遷移を調べる。

27・4・1 自明な零点 $z = -2$ の $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ における遷移

ここでは $\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -2$ の $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ における変遷を調べる。 x の区間は $-3 \leq x \leq 4.2$ とする。9枚の等高線図で零点をトレースすると次のようになる。青線は実数部の等高線、橙線は虚数部の等高線、そして赤点が零点である。

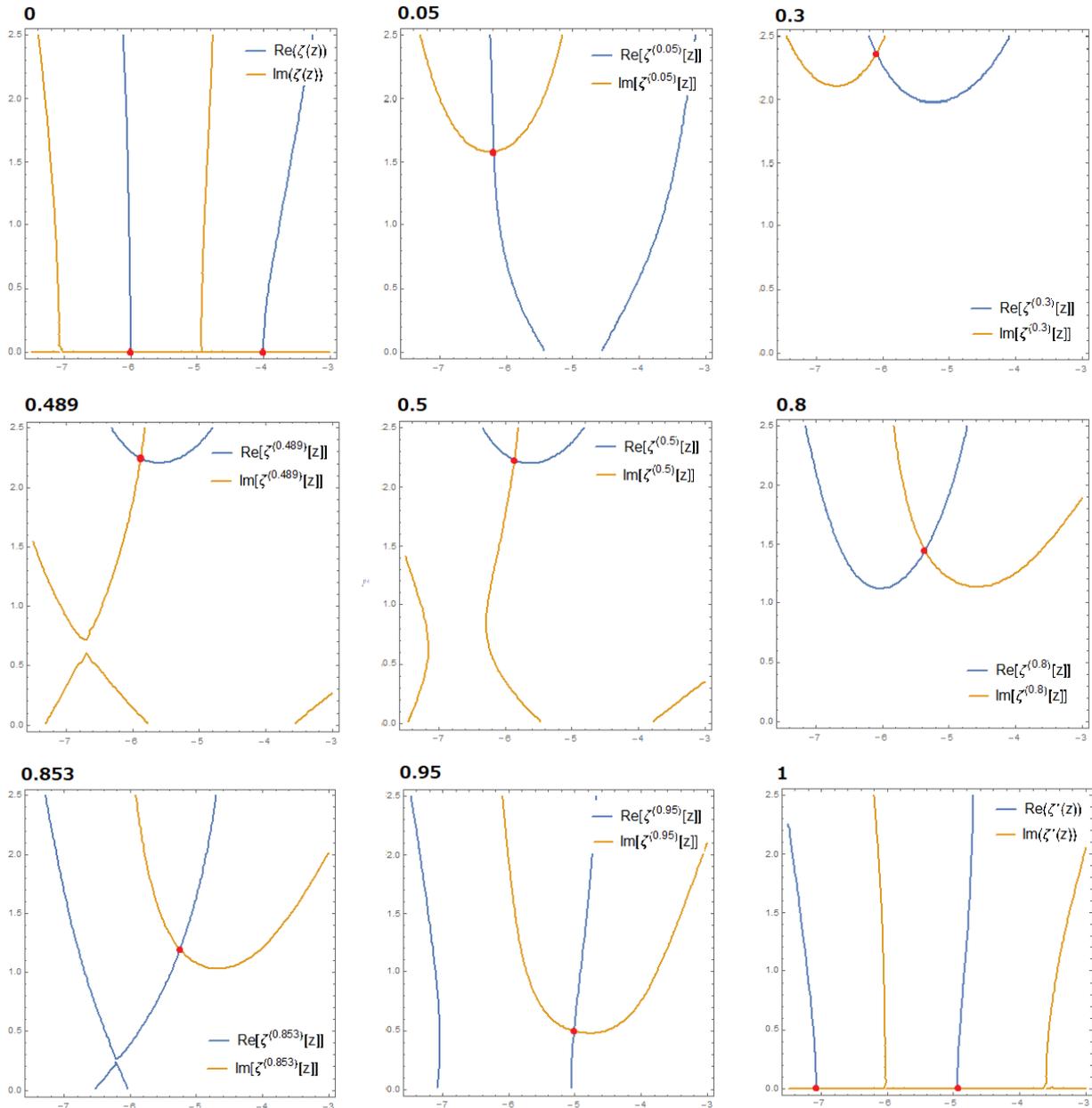


$\zeta(z)$ の零点 -2 は p の増加に伴って複素平面上に弾道軌道を描いて 1.77 付近に落下する。**0**~**0.67** はその状況を示す。**0.68** においてこの零点は x 軸上で2つの零点に分離する。**0.78** において2つの零点はそれぞれ左右に移動する。**0.82** において左側の零点は特異点 1 に飲み込まれて消滅する。**1** において右側の零点は消滅する。同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $-2.71726 \dots$ が左側に出現する。これは $x=1$ からの転生のように見える。なお、 $0.670597 \leq p < 1$ で半直線 $x > 1, y = 0$ 上に存在する零点は非整数階導関数に固有の自明な零点である。

以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2741.gif](#)

27.4.2 自明な零点 $z = -4, -6$ の $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ における変遷

ここでは $\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -4, -6$ の $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ における変遷を調べる。
 x の区間は $-7.5 \leq x \leq -3$ とする。9枚の等高線図で零点をトレースすると次のようになる。
 青線は実数部の等高線、橙線は虚数部の等高線、そして赤点が零点である。

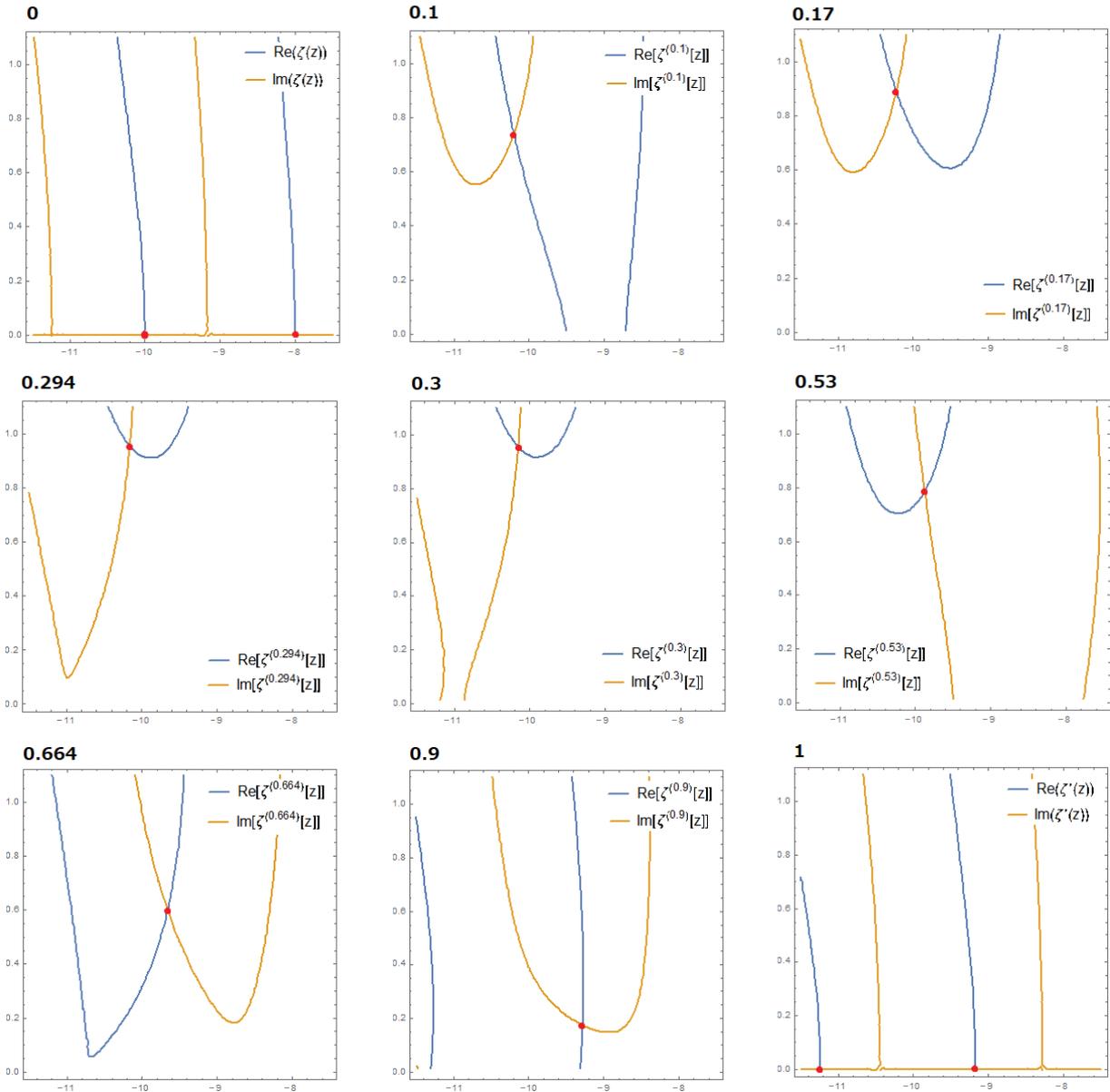


0 では $\zeta(z)$ の2個の零点 $-4, -6$ が存在する。 p が増加した瞬間に零点 -4 は消滅し、零点 -6 はロフテッド軌道を描いて $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $-4.93676\dots$ に落下する。そして同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の別の零点 $-7.07459\dots$ が左側に出現する。これは -6 からの転生のように見える。
 以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2742.gif](#)

27.4.3 自明な零点 $z = -8, -10$ の $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ における変遷

ここでは $\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -8, -10$ の $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ における変遷を調べる。

x の区間は $-11.5 \leq x \leq -7.5$ とする。9枚の等高線図で零点をトレースすると次のようになる。青線は実数部の等高線、橙線は虚数部の等高線、そして赤点が零点である。



0 では $\zeta(z)$ の2個の零点 $-8, -10$ が存在する。 p が増加した瞬間に零点 -8 は消滅し、零点 -10 はロフトッド軌道を描いて $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $-9.17049\dots$ に落下する。そして同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の別の零点 $-11.24121\dots$ が左側に出現する。これは -10 からの転生のように見える。

まとめ

$\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -2, -4 \sim, -10$ の $\zeta^{(p)}(z)$ $p = 0 \sim 1$ に伴う遷移を調べたところ、次の結論を得た。

- (1) 非整数階導関数 ($0.670597 \leq p < 1$) に固有の自明な零点が存在する。それは1よりも大きい実数である。
- (2) $\zeta(z)$ の零点 -2 の半分は特異点 1 から $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $-2.71726\dots$ に転生し、他の半分は $p = 1$ の瞬間に消滅する。上記 (1) はこの過程で生じる。

- (3) $\zeta(z)$ の零点 -6 は $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $-4.93676\dots$ に移動し、同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の他の零点 $-7.07459\dots$ に転生する。 $\zeta(z)$ の零点 -4 は $p > 0$ の瞬間に消滅する。
- (4) $\zeta(z)$ の零点 -10 は $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 $-9.17049\dots$ に移動し、同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の他の零点 $-11.24121\dots$ に転生する。 $\zeta(z)$ の零点 -8 は $p > 0$ の瞬間に消滅する。

2018.12.07

2018.12.20 Renewed

2021.01.29 Added animations

Kano Kono

宇宙人の数学