

28 リーマン・ゼータの超積分の零点

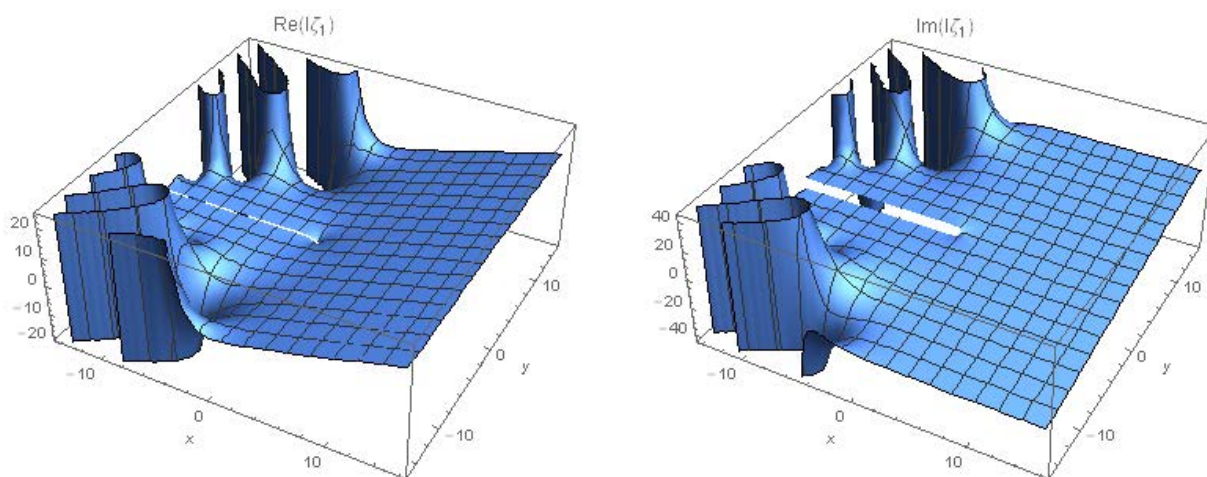
28.1 $\zeta(z)$ の1階積分の零点

28.1.0 $\zeta^{<1>}(z)$ の級数展開

「26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分」公式 26.1.1h によれば、 γ_r をスチルチェス定数とすると、リーマン・ゼータ関数の直系1階原始関数 $\zeta^{<1>}(z)$ は次式で表される。

$$\zeta^{<1>}(z) = \log(z-1) + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^{r+1}}{(r+1)!} \quad (1.0)$$

実数部と虚数部の3D図は次のとおり。左が実数部で右が虚数部である。両図から明らかなように半直線 $x < 0, y = 0$ 上には零点が存在しない。



28.1.1 $\zeta^{<1>}(z)$ の零点

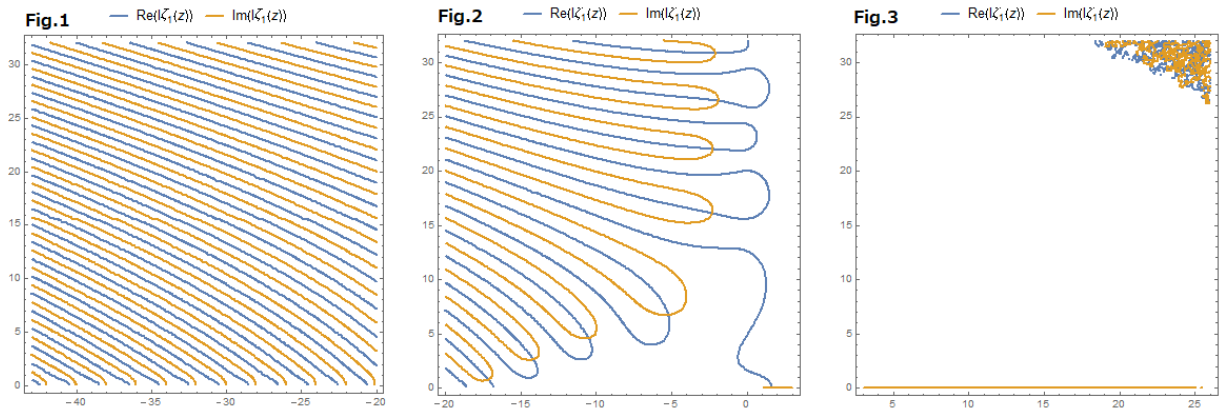
$\zeta^{<1>}(z)$ の零点においては、実数部 $Re\{\zeta^{<1>}(z)\}$ と虚数部 $Im\{\zeta^{<1>}(z)\}$ が共に0にならねばならない。つまり、次の連立方程式の零点を求めなければならない。

$$\begin{cases} Re[\zeta^{<1>}(x+iy)] = 0 & (1.1r) \\ Im[\zeta^{<1>}(x+iy)] = 0 & (1.1i) \end{cases}$$

これを解くことは不可能であるので、ニュートン・ラフソン法の如き数値解法を用いる他ない。数式処理ソフト *Mathematica* にはこのための関数 *FindRoot* [] が用意されているのでこれを用いる。ところがそのためには、零点のおおよその位置が分かっているなければならない。これを知るには、(1.1r), (1.1i) の等高線図を描いてその交点を見つけるのが良い。*Mathematica* にはこのための関数 *ContourPlot* [] が用意されているのでこれを用いる。

(1) 広域図

零点の所在を探るために、この範囲を3枚の等高線図で描いて見る。y の範囲は $0 \leq y \leq 32$ とする。すると次のようになる。青が実数部の等高線、橙が虚数部の等高線、その交点が零点である。



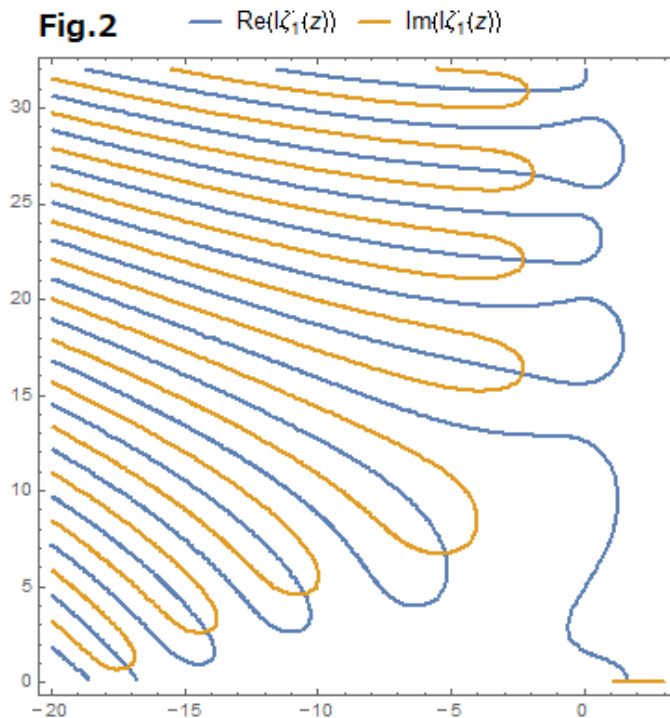
第1図は $-43 \leq x \leq -20$ である。ここには零点が存在しない。第2図は $-20 \leq x \leq 3$ である。ここには零点が9個存在する。第3図は $3 \leq x \leq 26$ である。ここには零点が存在しない。

この3枚の上 ($y \geq 32$) の等高線図で描いて見たが、3枚ともゴーストになった。(1.0) の式と筆者のパソコン&ソフトによってはこれ以上の作図は困難である。しかし、次のことは言えそうである。

- ① 第1図と第3図の上方には零点が存在しそうにない。
- ② 第2図の上方には零点が無数に存在しそうである。

(2) 拡大図

第2図の拡大図を描き、そして *Mathematica* の関数 *FindRoot* [] を用いてこれら零点の値を有効16桁で求めると次のようになる。



- 2.30074531502972 + 16.08542457590717 i
- 2.25748998985921 + 22.00901540490299 i
- 1.9080 + 26.4561 i estimated
- 2.0862 + 30.8579 i estimated

1.669008212478207

-5.207610164448825 + 6.722221913809304 *i*

-10.491624715391694 + 4.611112879246793 *i*

-14.14832472367627 + 2.63517233968627 *i*

-17.14106466110841 + 0.77114740836467 *i*

28・2 超積分に伴う非自明な零点の遷移

本節では超積分に伴う $\zeta(z)$ の非自明な零点の遷移を調べる。

28・2・0 $\zeta(z)$ の超積分のローラン展開

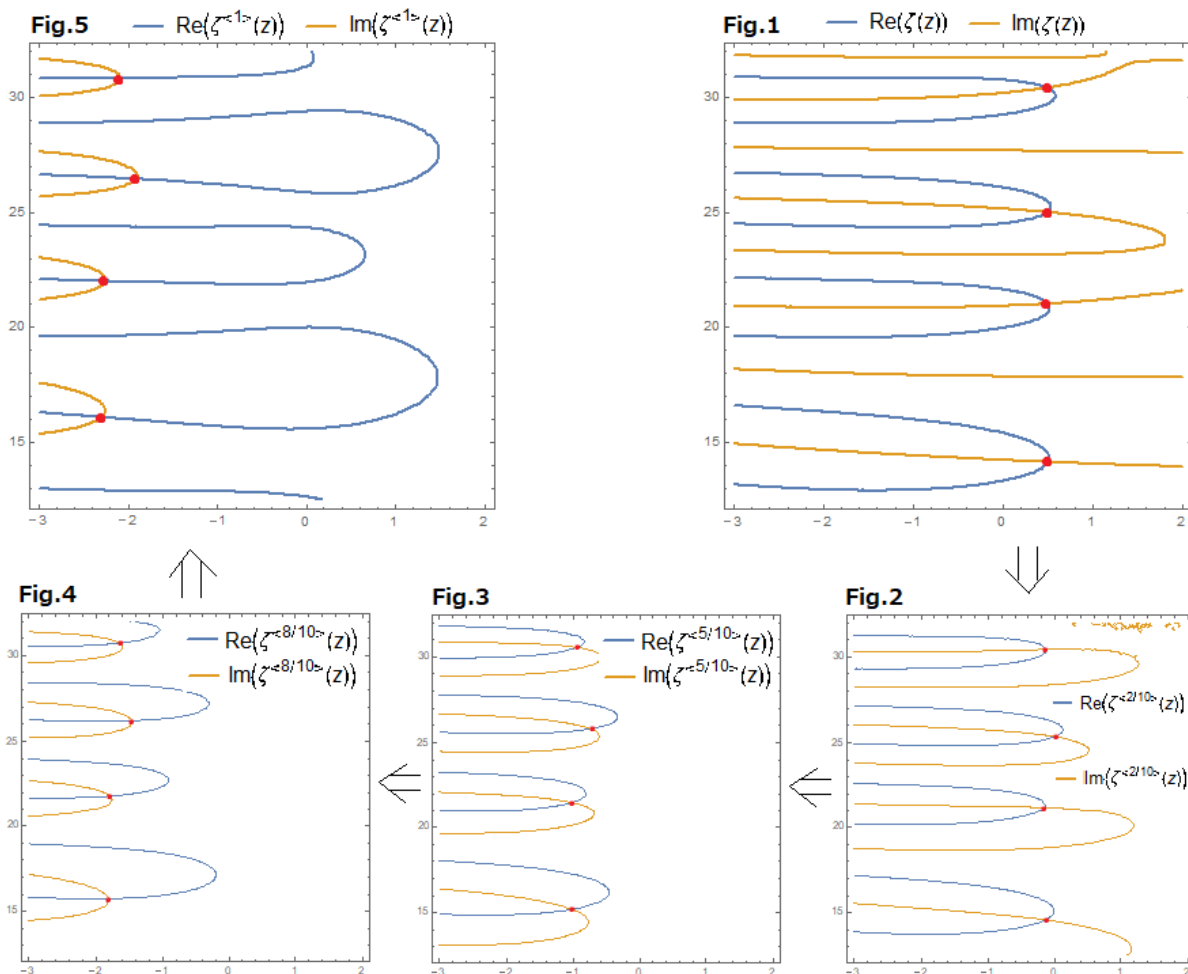
「26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分」公式 26・1・1s によれば、 p を正数、 $\Gamma(p)$ をガンマ関数、 $\psi(p)$ をディ・ガンマ関数、そして γ_r をスチルチェス定数とすると、リーマン・ゼータ関数の直系 p 階原始関数 $\zeta^{(p)}(z)$ は次式で表される。

$$\zeta^{(p)}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(p) - \gamma_0}{\Gamma(p)} (z-1)^{p-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)} \quad (2.0)$$

この式から明らかなように、 $0 < p < 1$ のとき、 $\zeta^{(p)}(z)$ は $z=1$ において $(1-p)$ 位の極を持つ。

28・2・1 $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点 ($12.5 \leq y \leq 32$)

ここでは $12.5 \leq y \leq 32$ における $\zeta^{(0)}(z) \sim \zeta^{(1)}(z)$ の非自明な零点の変遷を調べる。 x の区間は $-3 \leq x \leq 2$ とする。5枚の等高線図で零点をトレースすると次のようになる。青線は実数部の等高線、橙線は虚数部の等高線、そして赤点が零点である。



第1図には $\zeta^{(0)}(z)$ の非自明な零点が描かれている。第2図に $\zeta^{(0.2)}(z)$ の非自明な零点が描かれている。これらの図を眺めれば、 p の増加に伴って零点が左に移動しているのが分かる。

そしてそれらは最終的に第5図に至る。第5図と第1図を数値で示すと次のようになる。

$$-2.3007\dots + i 16.0854\dots \longleftarrow 1/2 + i 14.1347\dots$$

$$-2.2574\dots + i 22.0090\dots \longleftarrow 1/2 + i 21.0220\dots$$

$$-1.9080\dots + i 26.4561\dots \longleftarrow 1/2 + i 25.0108\dots$$

$$-2.0862\dots + i 30.8578\dots \longleftarrow 1/2 + i 30.4248\dots$$

以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2821.gif](#)

まとめ

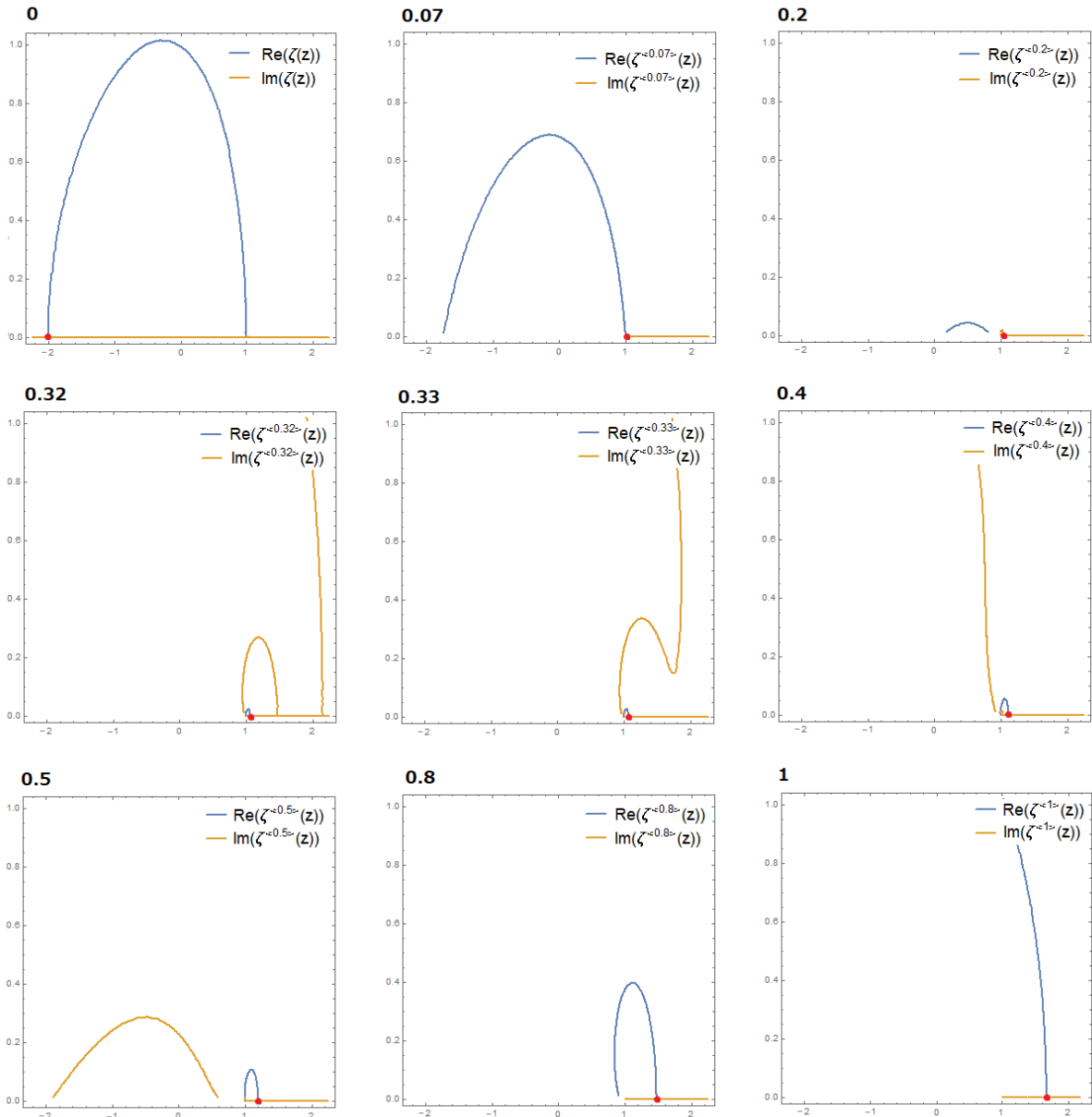
$\zeta(z)$ の非自明な零点は p の増加に伴って複素平面を左上方に移動する。

28・3 超積分に伴う自明な零点の遷移

本節では公式 (2.0) を用いて超積分に伴う $\zeta(z)$ の自明な零点の遷移を調べる。

28・3・1 自明な零点 $z = -2$ の $\zeta^{<0>}(z) \sim \zeta^{<1>}(z)$ における遷移

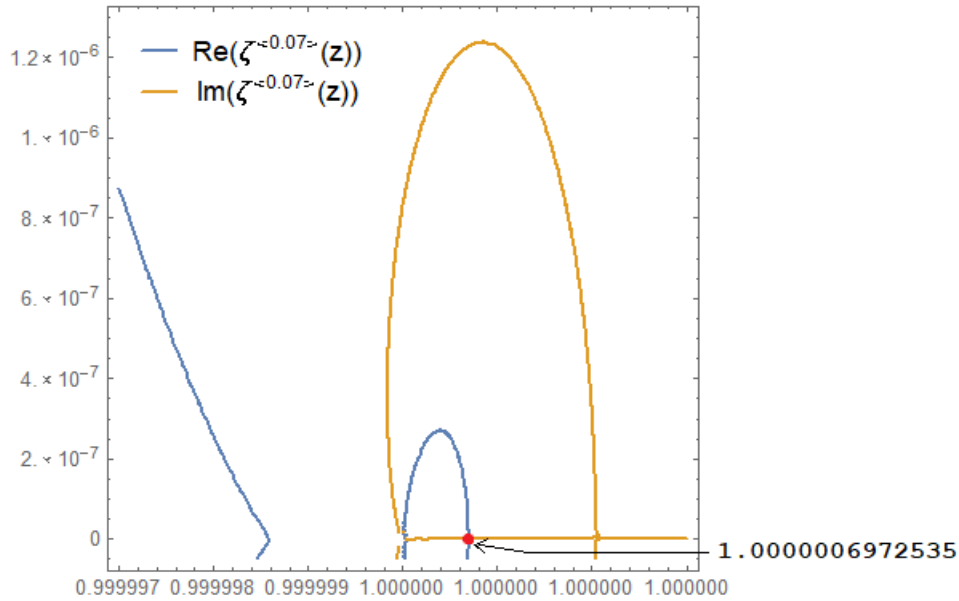
ここでは $\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -2$ の $\zeta^{<0>}(z) \sim \zeta^{<1>}(z)$ における変遷を調べる。 x の区間は $-2.25 \leq x \leq 2.25$ とする。9枚の等高線図で零点をトレースすると次のようになる。青線は実数部の等高線、橙線は虚数部の等高線、そして赤点が零点である。



0 には $\zeta(z)$ の自明な零点 -2 が描かれている。もう1つの交点 **1** は特異点である。

この零点は $p > 0$ の瞬間に特異点 **1** の右近傍に転生する。**0.07** はその状況を示している。

この転生は非常に小さい階数 $p \approx 0$ でも生じるのであるが、(2.0) の式と筆者のパソコン&ソフトによっては $p < 0.07$ での転生を検出できなかった。ちなみに **0.07** の **1** 付近の拡大図を描くと次のようになる。

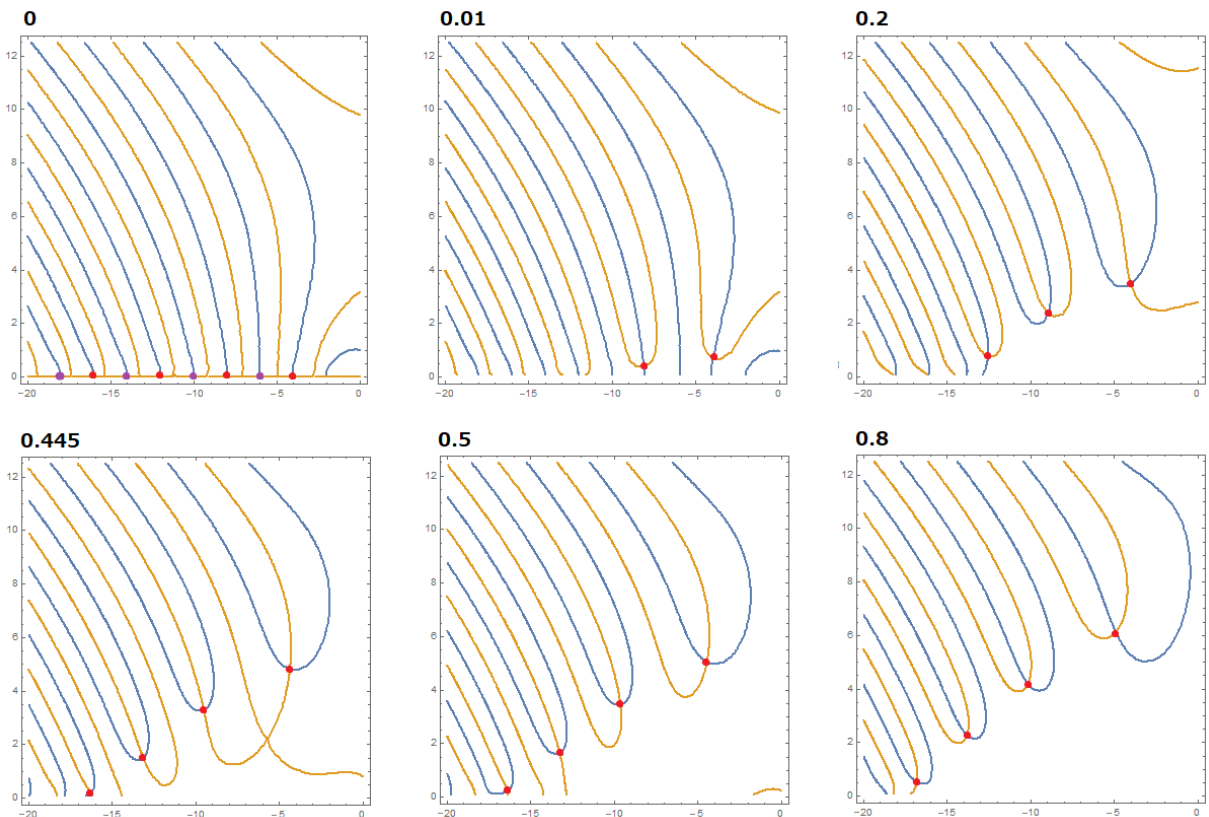


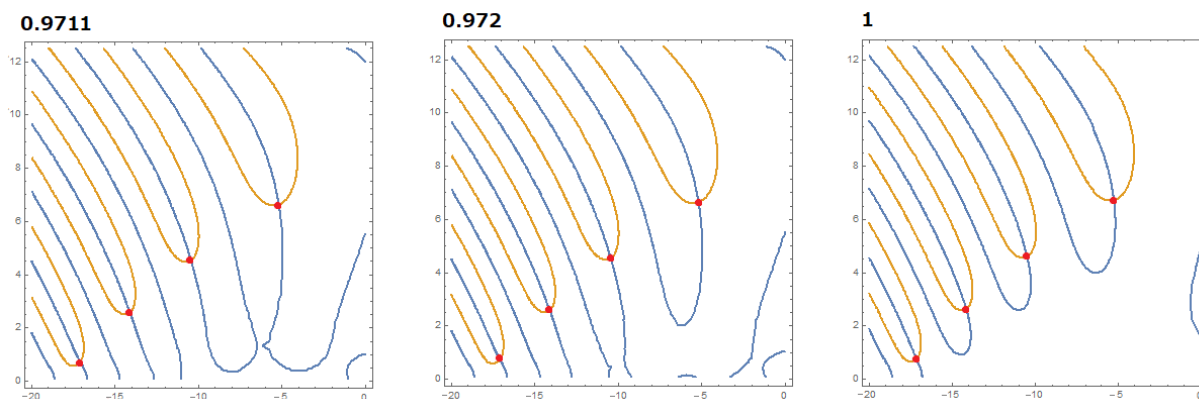
この後、 p の増加に伴ってこの零点は右に移動し、**1** では $1.6690082124782\dots$ となる。

以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2831.gif](#)

28・3・2 自明な零点 $z = -4, -6, \dots$ の $\zeta^{<0>}(z) \sim \zeta^{<1>}(z)$ における変遷

ここでは $\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -4, -6, \dots$ の $\zeta^{<0>}(z) \sim \zeta^{<1>}(z)$ における変遷を調べる。
 x の区間は $-20 \leq x \leq 0$ とする。9枚の等高線図で零点をトレースすると次のようになる。
 青線は実数部の等高線で、橙線は虚数部の等高線である。零点は赤点と紫点で描かれている。





0 には $\zeta(z)$ の自明な零点8個が描かれている。 $-4, -8, -12, -16$ は赤点で描かれ、 $-6, -10, -14, -18$ は紫点で描かれている。

全ての零点は $p > 0$ の瞬間に消滅するが、これらの内、 $-4, -8, -12, -16$ は順次蘇生し、複素平面を上昇して行く。 $-6, -10, -14, -18$ は蘇生しない。**0.01, 0.2, 0.445** はこの様子を示す。**0.5** 以降、これらの零点はさらに複素平面を上昇して行く。

0.445 ~ 0.972 では等高線のパートナー・チェンジなども見られるが、4個の零点は最終的に **1** に至る。これらの変遷の結果を数値的に示せば次のようになる。

$$\begin{aligned} -4 &\implies -5.2076\dots + i 6.7222\dots \\ -8 &\implies -10.4916\dots + i 4.6111\dots \\ -12 &\implies -14.1483\dots + i 2.6351\dots \\ -16 &\implies -17.1410\dots + i 0.7711\dots \end{aligned}$$

以上のアニメーションは、[ここをクリック](#) [Anim2832.gif](#)

まとめ

$\zeta(z)$ の自明な零点 $z = -2, -4, -6, \dots$ の $\zeta^{(p)}(z)$ $p = 0 \sim 1$ に伴う遷移を調べたところ、次の結論を得た。

- (1) $\zeta(z)$ の零点 -2 は $p > 0$ の瞬間に特異点 1 の右近傍に転生し、 p の増加に伴い x 軸上を右に移動する。
- (2) $\zeta(z)$ の自明な零点 $-4, -6, -8, \dots$ は $p > 0$ の瞬間に一旦消滅するが、これらの内零点 $-4, -8, -12, -16$ は p の増加に伴い原点に近い方から順次蘇生し、複素平面上を左上に移動する。なお、 -18 以下の零点は $0 < p \leq 1$ では蘇生できない。

2018.12.28

2021.01.29 Added animations

Kano Kono

宇宙人の数学