29 複素関数の高階微分

要　旨

(1) コーシー・リーマンの方程式は3階以上の奇数階微分に一般化できる。
(2) ラプラスの方程式は4階以上の偶数階微分に一般化できる。
(3) 正則関数 $f(z)$ ($z=x+iy$) の高階微分 $f^{(n)}(z)$ は y に関する高階偏導関数で表現できる。

29・1 1～4階の微分

コーシー・リーマンの方程式およびラプラスの方程式はそれぞれ次のようであった。

定理 29・1・1 (コーシー・リーマンの方程式)

$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるための必要十分条件は、u, v がともに D で全微分可能でかつ次式が成り立つことである。

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$$

定理 29・1・2 (ラプラスの方程式)

$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、次式が成立する。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(x,y)$$

$f(z)$ の1階微分

コーシー・リーマンの方程式はしばしば次のように略記される。

$$u_x = v_y \;,\; v_x = -u_y \qquad \text{コーシー・リーマンの1階方程式} \tag{1.10}$$

これより

$$f^{(1)}(z) = u_x + i\,v_x = v_y - i\,u_y$$

$f(z)$ の2階微分

(1.10) を x で微分すれば　$u_{xx}=v_{yx}$, $v_{xx}=-u_{yx}$　(L21)

(1.10) を y で微分すれば　$u_{xy}=v_{yy}$, $v_{xy}=-u_{yy}$　(L22)

これらより

$$u_{xx}=-u_{yy} \;,\; v_{xx}=-v_{yy} \qquad \text{ラプラスの2階方程式} \tag{1.20}$$

これより

$$f^{(2)}(z) = u_{xx} + i\,v_{xx} = -u_{yy} - i\,v_{yy}$$

$f(z)$ の3階微分

(L21) を x で微分すれば　$u_{xxx} = v_{yxx}$, $v_{xxx} = -u_{yxx}$ (C31)

(L21) を y で微分すれば　$u_{xxy} = v_{yxy}$, $v_{xxy} = -u_{yxy}$ (C32)

(L22) を x で微分すれば　$u_{xyx} = v_{yyx}$, $v_{xyx} = -u_{yyx}$ (C33)

(L22) を y で微分すれば　$u_{xyy} = v_{yyy}$, $v_{xyy} = -u_{yyy}$ (C34)

これらより

$$u_{xxx} = v_{yxx} \ , \ v_{xxy} = -u_{yxy} \ , \ u_{xyy} = v_{yyy} \quad \Longrightarrow \quad u_{xxx} = -v_{yyy}$$

$$v_{xxx} = -u_{yxx} \ , \ u_{xyx} = v_{yyx} \ , \ v_{xyy} = -u_{yyy} \quad \Longrightarrow \quad v_{xxx} = u_{yyy}$$

$$u_{xxy} = v_{yyx} \ , \ v_{xxy} = -u_{yyx}$$

即ち

$u_{xxx} = -v_{yyy}$, $v_{xxx} = u_{yyy}$　　コーシー・リーマンの3階方程式 (1.30)

$u_{xxy} = v_{yyx}$, $v_{xxy} = -u_{yyx}$　　コーシー・リーマンの3階方程式

(1.30) より

$$f^{(3)}(z) = u_{xxx} + i\,v_{xxx} = -v_{yyy} + i\,u_{yyy}$$

$f(z)$ の4階微分

(C31) を x で微分すれば　$u_{xxxx} = v_{yxxx}$, $v_{xxxx} = -u_{yxxx}$

(C31) を y で微分すれば　$u_{xxxy} = v_{yxxy}$, $v_{xxxy} = -u_{yxxy}$

(C32) を x で微分すれば　$u_{xxyx} = v_{yxyx}$, $v_{xxyx} = -u_{yxyx}$

(C32) を y で微分すれば　$u_{xxyy} = v_{yxyy}$, $v_{xxyy} = -u_{yxyy}$

(C34) を x で微分すれば　$u_{xyyx} = v_{yyyx}$, $v_{xyyx} = -u_{yyyx}$

(C34) を y で微分すれば　$u_{xyyy} = v_{yyyy}$, $v_{xyyy} = -u_{yyyy}$

なお、(C33) の微分は(C32) の微分と重複するので除いてある。

これらより

$$u_{xxxx} = v_{yxxx} \ , v_{xxxy} = -u_{yxxy} \ , \ u_{xxyy} = v_{yxyy} \ , \ v_{xyyy} = -u_{yyyy} \quad \Longrightarrow \quad u_{xxxx} = u_{yyyy}$$

$$v_{xxxx} = -u_{yxxx} \ , \ u_{xxxy} = v_{yxxy} \ , v_{xyyx} = -u_{yyyx} \ , u_{xyyy} = v_{yyyy} \quad \Longrightarrow \quad v_{xxxx} = v_{yyyy}$$

$$u_{xxyx} = v_{yxyx} \ , \ v_{xxyy} = -u_{yxyy} \ , \ v_{xxyx} = -u_{yxyx} \ , \ u_{xyyx} = v_{yyyx}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{xxxy} = -u_{yyyx} \ , \ v_{xxxy} = -v_{yyyx}$$

即ち

$u_{xxxx} = u_{yyyy}$, $v_{xxxx} = v_{yyyy}$　　ラプラスの4階方程式 (1.40)

$u_{xxxy} = -u_{yyyx}$, $v_{xxxy} = -v_{yyyx}$　　ラプラスの4階方程式

(1.40) より

$$f^{(4)}(z) = u_{xxxx} + i\,v_{xxxx} = u_{yyyy} + i\,v_{yyyy}$$

以上をまとめて書くと次のとおり。

$f(z)$ の 1～4階の微分

$$f^{(1)}(z) = u_x + i\,v_x = v_y - i\,u_y$$

$$f^{(2)}(z) = u_{xx} + i\,v_{xx} = -u_{yy} - i\,v_{yy}$$

$$f^{(3)}(z) = u_{xxx} + i\,v_{xxx} = -v_{yyy} + i\,u_{yyy}$$

$$f^{(4)}(z) = u_{xxxx} + i\,v_{xxxx} = u_{yyyy} + i\,v_{yyyy}$$

$$\vdots$$

かくして、コーシー・リーマンの3階方程式およびラプラスの4階方程式が得られた。しかし、このやり方で5階以上を計算するのは難儀である。そこで、次節以降は別のやり方を考える。

29･2 高階微分の級数表示

先ずは、「14 **複素関数の実部虚部別テイラー展開**」（アラカルト偏）の公式 14･1･2 を再掲する。そして、実部虚部別テイラー級数の高階微分を行う。

公式 14･1･2（再掲）

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!} \tag{2.1}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。但し、$0^0=1$ とする。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{2.1u}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{2.1v}$$

例

$$f(z) = (z-1)^2 e^{z-1}$$

$$u(x,y) = e^{x-1}\left\{\left(1-2x+x^2-y^2\right)\cos y - (2xy-2y)\sin y\right\}$$

$$v(x,y) = e^{x-1}\left\{\left(1-2x+x^2-y^2\right)\sin y + (2xy-2y)\cos y\right\}$$

$f(z)$ を 1 の周りでテイラー展開し上記公式を適用すれば

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} s(s-1)\frac{(z-1)^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)(2r+s-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)(2r+s)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

実際、これらの関数と級数に $2+i$ を与えると次のようになる。

```
N[{u[2, 1], u[2, 1, 30]}]
{-4.57471 , -4.57471}
```

```
N[{v[2, 1], v[2, 1, 30]}]
{2.93739, 2.93739}
```

29･2･1 x に関する高階微分

公式 29･2･1

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!} \tag{2.1}$$

するとこの n 階導関数及びその実部 $ux_n(x,y)$ と虚部 $vx_n(x,y)$ はそれぞれ次のようになる。

$$f^{(n)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s+n)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

$$ux_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vx_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1+n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$。

証明

(2.1) を z で n 回微分すれば

$$f^{(n)}(z) = \sum_{s=n}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^{s-n}}{(s-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s+n)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

これに 公式 14･1･2 を適用して与式を得る。

例

$$f(z) = (z-1)^2 e^{z-1} = \sum_{s=0}^{\infty} s(s-1)\frac{(z-1)^s}{s!}$$

両辺を z で n 回微分すれば

$$f^{(n)}(z) = \sum_{s=n}^{\infty} s(s-1)\frac{(z-1)^{s-n}}{(s-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty}(s+n)(s-1+n)\frac{(z-1)^s}{s!}$$

これに 公式 29･2･1 を適用すれば

$$ux_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+n)(2r+s-1+n)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vx_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1+n)(2r+s+n)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$z = 2+3i$ を $f^{(n)}(z)$, $ux_n(x,y)$, $vx_n(x,y)$ に与えれば次のようになる。

```
f5[z_] = ∂z∂z∂z∂z∂z f[z];      f6[z_] = ∂z∂z∂z∂z∂z∂z f[z];

N[{f5[2 + 3 i]          , ux5[2, 3, 30], vx5[2, 3, 30]}]
{-73.0135 - 88.4395 i   , -73.0135      , -88.4395}

N[{f6[2 + 3 i]          , ux6[2, 3, 30], vx6[2, 3, 30]}]
{-107.608 - 99.9828 i   , -107.608      , -99.9828}
```

Note

$$f^{(n)}(z) = ux_n(x,y) + i\, vx_n(x,y)$$

29・2・2 y に関する高階微分

公式 29・2・2

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!} \tag{2.1}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ の y に関する n 階導関数は次式で表される。

$$uy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-n}}{(2r-n)!} \tag{2.2u}$$

$$vy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1-n}}{(2r+1-n)!} \tag{2.2v}$$

但し、$0^0=1$。

証明

(2.1u) 及び (2.1v) の右辺をそれぞれ y で n 回偏微分して与式を得る。

例

$$f(z)=(z-1)^2 e^{z-1}=\sum_{s=0}^{\infty} s(s-1)\frac{(z-1)^s}{s!}$$

これの実部と虚部は

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)(2r+s-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)(2r+s)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

これらを y に関して n 回偏微分すれば

$$uy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)(2r+s-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-n}}{(2r-n)!}$$

$$vy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)(2r+s)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1-n}}{(2r+1-n)!}$$

$2-i$ を $u(x,y),v(x,y)$ の直接導関数と $uy_n(x,y)$, $vy_n(x,y)$ に与えれば次のようになる。

```
uy5[x_, y_] = ∂y∂y∂y∂y∂y u[x, y];
N[{uy5[2, -1], uy5[2, -1, 30]}]
        {86.245, 86.245}
```

```
vy6[x_, y_] = ∂y∂y∂y∂y∂y∂y v[x, y];
N[{vy6[2, -1], vy6[2, -1, 30]}]
        {116.631, 116.631}
```

Note

$$f^{(n)}(z)\neq uy_n(x,y)+i\,vy_n(x,y)$$

29･3 コーシー･リーマン＆ラプラスの方程式

本節では、前節で得たテイラー級数を用いて、コーシー･リーマンの方程式およびラプラスの方程式を3階以上に一般化する。この方法の長所は公式が視覚的に確認できるところにある。

公式 29･3･1 (コーシー･リーマンの高階偏微分方程式)

関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、次式が成立する。

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}u(x,y)=(-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y)\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.1u}$$

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}v(x,y)=(-1)^{n}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y)\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.1v}$$

証明

公式 29･2･1 より

$$\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}u(x,y)=ux_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}v(x,y)=vx_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1+n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

両式において n を $2n-1$ に置換すると

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+2n-1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{ux1}$$

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+2n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{vx1}$$

他方、公式 29･2･2 より

$$\frac{\partial^{n}}{\partial y^{n}}u(x,y)=uy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-n}}{(2r-n)!} \tag{2.2u}$$

$$\frac{\partial^{n}}{\partial y^{n}}v(x,y)=vy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1-n}}{(2r+1-n)!} \tag{2.2v}$$

両式において n を $2n-1$ に置換すると

$$\begin{aligned}uy_{2n-1}(x,y)&=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n+1}}{(2r-2n+1)!}\\&=\sum_{r=n}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n+1}}{(2r-2n+1)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}vy_{2n-1}(x,y)&=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n+2}}{(2r-2n+2)!}\\&=\sum_{r=n-1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n+2}}{(2r-2n+2)!}\end{aligned}$$

$\left(\because\ 1/(2r-2n+1)!=0\ \ for\ r<n\ ,\ \ 1/(2r-2n+2)!=0\ \ for\ r<n-1\right)$

前者 において r を $r+n$ に置換し、後者 において r を $r+n-1$ に置換すれば

$$uy_{2n-1}(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^{r+n}y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$vy_{2n-1}(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n-1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^{r+n-1}y^{2r}}{(2r)!}$$

i.e.

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad \text{(uy1)}$$

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y) = (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n-1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \qquad \text{(vy1)}$$

(vy1) と (ux1) から

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}u(x,y)$$

(uy1) と (vx1) から

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y) = (-1)^{n}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}v(x,y)$$

これらの符号を左右入れ替えて、与式を得る。

例1

$$f(z) = (z-1)^2 e^{z-1}$$

$$u(x,y) = e^{x-1}\left\{\left(1-2x+x^2-y^2\right)\cos y - (2xy-2y)\sin y\right\}$$

$$v(x,y) = e^{x-1}\left\{\left(1-2x+x^2-y^2\right)\sin y + (2xy-2y)\cos y\right\}$$

これらを 1 の周りでテイラー展開すれば

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} s(s-1)\frac{(z-1)^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)(2r+s-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)(2r+s)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$u(x,y)$, $v(x,y)$ の奇数階偏導関数は

$$uxo_n(x,y) = \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n-1)(2r+s+2n-2)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vxo_n(x,y) = \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n)(2r+s+2n-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$uyo_n(x,y) = \frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y) = (-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n)(2r+s+2n-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$vyo_n(x,y)=\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y)=(-1)^{n-1}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n-1)(2r+s+2n-2)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

検証のため、これらの関数と級数に $2-i$ を与えるとそれぞれ次のようになる。

```
ux3[x_, y_] = ∂x∂x∂x u[x, y];
N[{ux3[2, -1], uxo2[2, -1, 30]}]
  {-0.674515, -0.674515}
```

```
vx3[x_, y_] = ∂x∂x∂x v[x, y];
N[{vx3[2, -1], vxo2[2, -1, 30]}]
  {-39.1978, -39.1978}
```

```
uy3[x_, y_] = ∂y∂y∂y u[x, y];
N[{uy3[2, -1], uyo2[2, -1, 30]}]
  {-39.1978, -39.1978}
```

```
vy3[x_, y_] = ∂y∂y∂y v[x, y];
N[{vy3[2, -1], vyo2[2, -1, 30]}]
  {0.674515, 0.674515}
```

次に、

$uxo_n(x,y)\,,\,vyo_n(x,y)\;\Longrightarrow\;$ (3.1u)

$vxo_n(x,y)\,,\,uyo_n(x,y)\;\Longrightarrow\;$ (3.1v)

公式 29･3･2 (ラプラスの高階偏微分方程式)

関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、次式が成立する。

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,y)=(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y)\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.2u}$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}v(x,y)=(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y)\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.2v}$$

証明

公式 29･2･1 より

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,y)=ux_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}v(x,y)=vx_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1+n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

両式において n を $2n$ に置換すると

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+2n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{ux2}$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+2n+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{vx2}$$

他方、公式 29･2･2 より

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}u(x,y)=uy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-n}}{(2r-n)!} \tag{2.2u}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}v(x,y)=vy_n(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1-n}}{(2r+1-n)!} \tag{2.2v}$$

両式 において n を $2n$ に置換すると

$$uy_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n}}{(2r-2n)!}$$

$$= \sum_{r=n}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n}}{(2r-2n)!}$$

$$vy_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n+1}}{(2r-2n+1)!}$$

$$= \sum_{r=n}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r-2n+1}}{(2r-2n+1)!}$$

$$\left(\because\ 1/(2r-2n)! = 0 \quad for\ r<n \quad , \quad 1/(2r-2n+1)! = 0 \quad for\ r<n\right)$$

両式において r を $r+n$ に置換すれば

$$uy_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^{r+n} y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vy_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^{r+n} y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

i.e.

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y) = (-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{uy2}$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y) = (-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2n+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{vy2}$$

(uy2) と (ux2) から

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y) = (-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,y)$$

(vy2) と (vx2) から

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y) = (-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}v(x,y)$$

それぞれ両辺に $(-1)^n$ を乗じて与式を得る。

例2

$f(z)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ は全て例1 と同じとする。

$u(x,y)$, $v(x,y)$ の偶数階偏導関数は

$$uxe_n(x,y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n)(2r+s+2n-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vxe_n(x,y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n+1)(2r+s+2n)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$uye_n(x,y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n)(2r+s+2n-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vye_n(x,y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n+1)(2r+s+2n)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検証のため、これらの関数と級数に $1-3i$ を与えるとそれぞれ次のようになる。

```
ux4[x_, y_] = ∂x∂x∂x∂x u[x, y];
N[{ux4[1, -3], uxe2[1, -3, 30]}]
    {-6.35686, -6.35686}
```

```
vx4[x_, y_] = ∂x∂x∂x∂x v[x, y];
N[{vx4[1, -3], vxe2[1, -3, 30]}]
    {23.3365, 23.3365}
```

```
uy4[x_, y_] = ∂y∂y∂y∂y u[x, y];
N[{uy4[1, -3], uye2[1, -3, 30]}]
    {-6.35686, -6.35686}
```

```
vy4[x_, y_] = ∂y∂y∂y∂y v[x, y];
N[{vy4[1, -3], vye2[1, -3, 30]}]
    {23.3365, 23.3365}
```

次に、

$uxe_n(x,y)$, $uye_n(x,y)$ $\Longrightarrow$ (3.2u)

$vxe_n(x,y)$, $vye_n(x,y)$ $\Longrightarrow$ (3.2v)

上記2つの公式より、直ちに次が従う。

公式 29･3･3（y による高階微分）

関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、自然数 n について次式が成立する。

$$f^{(2n-1)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y) + i\,(-1)^n\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y) \tag{3.3C}$$

$$f^{(2n)}(z) = (-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y) + i\,(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y) \tag{3.3L}$$

例3

$f(z)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ は全て例1 と同じとする。

$u(x,y)$, $v(x,y)$ の n 階偏導関数は

$$uyo_n(x,y) = \frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n)(2r+s+2n-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$vyo_n(x,y) = \frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y) = (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n-1)(2r+s+2n-2)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$uye_n(x,y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n)(2r+s+2n-1)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$vye_n(x,y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+2n+1)(2r+s+2n)\frac{(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

すると、(3.3C) , (3.3L) はそれぞれ次のようになる。

$$f^{(2n-1)}(z) = (-1)^{n-1}\, vyo_n(x,y) + i\,(-1)^n\, uyo_n(x,y)$$
$$f^{(2n)}(z) = (-1)^n\, uye_n(x,y) + i\,(-1)^n\, vye_n(x,y)$$

$n=3$ のとき、これらに適当な値 $2+3i$ を与えると

```
f5[z_] = ∂z∂z∂z∂z∂z f[z];
N[{f5[2 + 3 ⅈ] , (-1)^2 vyo3[2, 3, 30] + ⅈ (-1)^3 uyo3[2, 3, 30]}]
{-73.0135 - 88.4395 ⅈ , -73.0135 - 88.4395 ⅈ}
f6[z_] = ∂z∂z∂z∂z∂z∂z f[z];
N[{f6[2 + 3 ⅈ] , (-1)^3 uye3[2, 3, 30] + ⅈ (-1)^3 vye3[2, 3, 30]}]
{-107.608 - 99.9828 ⅈ , -107.608 - 99.9828 ⅈ}
```

c.f.

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x,y) + i\,\frac{\partial^n}{\partial x^n} v(x,y) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

2021.01.06

Kano Kono

宇宙人の数学