2　自然数ゼータの公式

「１ ゼータ母関数」で得られた自然数のゼータは下位のゼータで表された自己同型な公式であった。本章ではこれらから下位のゼータを取り除いて陽表的な公式を得る。

2·1 *coth x* 系ゼータの公式

coth x 系からは自然数のゼータの公式が得られる。これらは簡明で収束も速い。

公式2·1·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、n を2以上の自然数とするとき、$0<x\leqq 2\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(n)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{x}{2n}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(rx)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{rx}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

特に $x=1,2$ のとき

$$\zeta(n)=\frac{n+1}{2n!(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{r^s}{s!}\frac{1}{r^n e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{n!(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(2r)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{2r}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}2^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

証明

「1 ゼータ母関数」の公式1·1·3 で次のリーマン·ゼータが得られた。

$$0=\log x-\frac{1}{2}\frac{x^1}{1!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^1}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}}{2r(2r)!}x^{2r} \tag{1.1}$$

$$\zeta(2)=-\frac{x^1}{1!}(\log x-H_1)+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^2}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+1}}{2r(2r+1)!}$$

$$\zeta(3)=\frac{x^2}{2!}(\log x-H_2)-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+2}}{2r(2r+2)!}+\frac{x^1}{1!}\zeta(2)$$

$$\zeta(4)=-\frac{x^3}{3!}(\log x-H_3)+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^4}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+3}}{2r(2r+3)!}-\frac{x^2}{2!}\zeta(2)+\frac{x^1}{1!}\zeta(3)$$

$$\zeta(5)=\frac{x^4}{4!}(\log x-H_4)-\frac{1}{2}\frac{x^5}{5!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^5}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+4}}{2r(2r+4)!}+\frac{x^3}{3!}\zeta(2)-\frac{x^2}{2!}\zeta(3)+\frac{x^1}{1!}\zeta(4)$$

$\vdots$

簡単化のため次のような置換を行う。

$$Z_n=\zeta(n)$$

$$f_n=\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}(\log x-H_{n-1})+\frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-rx}}{r^n}+(-1)^{n-1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r(2r+n-1)!}$$

すると

$$Z_2=f_2$$

$$Z_3 = f_3 + \frac{x^1}{1!} Z_2$$

$$Z_4 = f_4 - \frac{x^2}{2!} Z_2 + \frac{x^1}{1!} Z_3$$

$$Z_5 = f_5 + \frac{x^3}{3!} Z_2 - \frac{x^2}{2!} Z_3 + \frac{x^1}{1!} Z_4$$

⋮

Z_k を順次下の式に代入すると

$$Z_2 = \frac{1}{0!} x^0 f_2$$

$$Z_3 = \frac{1}{0!} x^0 f_3 + \frac{1}{1!} x^1 f_2$$

$$Z_4 = \frac{1}{0!} x^0 f_4 + \frac{1}{1!} x^1 f_3 + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!1!} \right) x^2 f_2$$

$$Z_5 = \frac{1}{0!} x^0 f_5 + \frac{1}{1!} x^1 f_4 + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!1!} \right) x^2 f_3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!1!} - \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{1!1!1!} \right) x^3 f_2$$

⋮

$$Z_n = \sum_{s=0}^{n-2} C_s x^s f_{n-s}$$

ここで C_s は次のような有理数である。

$$C_2 = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!1!}$$

$$C_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!1!} - \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{1!1!1!}$$

$$C_4 = -\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!1!} + \frac{1}{1!3!} + \frac{1}{2!2!} - \left(\frac{1}{2!1!1!} + \frac{1}{1!2!1!} + \frac{1}{1!1!2!} \right) + \frac{1}{1!1!1!1!}$$

$$\begin{aligned} C_5 = \ & \frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{4!1!} + \frac{1}{1!4!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{2!3!} \right) \\ & + \left(\frac{1}{3!1!1!} + \frac{1}{1!3!1!} + \frac{1}{1!1!3!} + \frac{1}{2!2!1!} + \frac{1}{2!1!2!} + \frac{1}{1!2!2!} \right) \\ & - \left(\frac{1}{2!1!1!1!} + \frac{1}{1!2!1!1!} + \frac{1}{1!1!2!1!} + \frac{1}{1!1!1!2!} \right) + \frac{1}{1!1!1!1!1!} \end{aligned}$$

⋮

気が遠くなりそうな組み合わせであるが、実際にこれらを計算して見ると、

$$C_1 = \frac{1}{1!}\ , C_2 = \frac{1}{2!}\ , C_3 = \frac{1}{3!}\ , \cdots\ , C_s = \frac{1}{s!}$$

よって

$$Z_n = \sum_{s=0}^{n-2} \frac{x^s}{s!} f_{n-s}$$

記号を戻せば

$$\zeta(n) = \sum_{s=0}^{n-2}\frac{x^s}{s!}\left\{\frac{(-1)^{n-1-s}x^{n-1-s}}{(n-1-s)!}(\log x - H_{n-1-s}) + \frac{(-1)^{n-s}}{2}\frac{x^{n-s}}{(n-s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^{n-s}} + (-1)^{n-1-s}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+n-1-s}}{2r(2r+n-1-s)!}\right\}$$

ここで $n-1$ 項目は次のようになる。

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{(-1)^0x^0}{0!}(\log x - H_0) + \frac{(-1)^1}{2}\frac{x^1}{1!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^1} + (-1)^0\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r}}{2r(2r)!}\right\}$$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\log x - \frac{1}{2}\frac{x^1}{1!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^1} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r}}{2r(2r)!}\right\}$$

ところが (1.1) により右辺の $\{\ \}$ 内は0であるから、$n-1$ 項目は0となる。つまり、$\sum$ の上限は $n-1$ として良い。かくて

$$\zeta(n) = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}\left\{\frac{(-1)^{n-1-s}x^{n-1-s}}{(n-1-s)!}(\log x - H_{n-1-s}) + \frac{(-1)^{n-s}}{2}\frac{x^{n-s}}{(n-s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^{n-s}} + (-1)^{n-1-s}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+n-1-s}}{2r(2r+n-1-s)!}\right\}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}(\log x - H_{n-s-1})$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n}{s} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1+2r)!}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s}\frac{B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r}$$

ここで「岩波 数学公式Ⅱ」p11 によれば

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{n}{s} = (-1)^m\binom{n-1}{m} \qquad m \leqq n-1$$

であるから、

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n}{s} = (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} = (-1)^{n-1}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s} = (-1)^{n-1}\binom{n-1+2r-1}{n-1}$$

さらに

$$\binom{p-1+r}{p-1} = (-1)^r\binom{-p}{r}$$

を適用すれば

$$\binom{n-1+2r-1}{n-1} = (-1)^{2r-1}\binom{-n}{2r-1}$$

故に、

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s} = (-1)^{n-1+2r-1}\binom{-n}{2r-1} = (-1)^n\binom{-n}{2r-1}$$

これら(青)を上式に代入して

$$\zeta(n)=\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}\left(\log x - H_{n-1-s}\right) - \frac{1}{2}\frac{x^n}{n!}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(rx)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{rx}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r}\frac{x^{n-1+2r+}}{(n-1+2r)!}$$

次に、$n>1$ のとき

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}\log x = 0$$

また、超微積分篇　4･6･2 より

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n}{s}H_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad \{H_r=\psi(1+r)+\gamma\}$$

であるから

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}H_{n-1-s} = \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} = -\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$$

これら(青)を上式に代入して次式を得る。

$$\zeta(n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)} - \frac{x^n}{2\,n!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}\,x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

i.e.

$$\zeta(n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{x}{2n}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}\,x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

例1

$$\zeta(3)=\frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{(xr)^1}{1!}+\frac{(xr)^2}{2!}\right\}\frac{1}{r^3e^{xr}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-3}{2r-1}\frac{B_{2r}\,x^{2+2r}}{2r(2+2r)!} \quad 0<x\le 2\pi$$

$$\zeta(5)=\frac{6}{2\cdot 5!4}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^4}{4!}\right)\frac{1}{r^5e^r} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-5}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r(4+2r)!}$$

$$\zeta(5)=\frac{2^4}{5!4}+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{2r}{1!}+\frac{(2r)^2}{2!}+\frac{(2r)^3}{3!}+\frac{(2r)^4}{4!}\right\}\frac{1}{r^5e^{2r}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-5}{2r-1}\frac{B_{2r}\,2^{4+2r}}{2r(4+2r)!}$$

例2 ζ (7)

$x=2$ の公式に従いこの計算を行った。級数を8項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

m = 8;

$$\texttt{z[n\_] :=}\ \frac{2^{n-1}}{n!\,(n-1)} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(2\,r)^s}{s!}\frac{1}{r^n\,e^{2\,r}} - \sum_{r=1}^{m}\frac{\texttt{Binomial}[-n,\,2\,r-1]\ \texttt{BernoulliB}[2\,r]\ 2^{n-1+2\,r}}{2\,r\,(n-1+2\,r)!}$$

```
N[z[7], 10]        N[Zeta[7], 10]
1.008349277        1.008349277
```

Note

この公式は$x=2$付近で最も収束が速い。

公式2・1・1'

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、n を2以上の自然数とするとき、$0<x\leqq 2\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(n)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{(n-1)x}{2n}-\log x\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

特に$x=1$のとき

$$\zeta(n)=\frac{n^2+1}{2n!(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{r^s}{s!}\frac{1}{r^n e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

証明

前公式の証明の途中 から始める。

$$\zeta(n)=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{x^s}{s!}\left\{\frac{(-1)^{n-1-s}x^{n-1-s}}{(n-1-s)!}\left(\log x-H_{n-1-s}\right)+\frac{(-1)^{n-s}}{2}\frac{x^{n-s}}{(n-s)!}\right.$$
$$\left.+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-xr}}{r^{n-s}}+(-1)^{n-1-s}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+n-1-s}}{2r(2r+n-1-s)!}\right\}$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}\left(\log x-H_{n-1-s}\right)$$
$$+\frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n}{s}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1+2r)!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s}\frac{B_{2r}x^{n-1-2r}}{2r}$$

ここで「岩波 数学公式 II」p11 によれば

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{n}{s}=(-1)^m\binom{n-1}{m}\qquad m\leqq n-1$$

であるから、

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n}{s}=(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}=(-1)^n\binom{n-1}{1}=(-1)^n(n-1)$$

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s}=(-1)^{n-2}\binom{n-1+2r-1}{n-2}=(-1)^n\binom{n-1+2r-1}{n-2}$$

さらに

$$\binom{p-1+r}{p-1} = (-1)^r \binom{-p}{r}$$

を適用すれば

$$\binom{n-1+2r-1}{n-2} = \binom{n-1-1+2r}{n-1-1} = (-1)^{2r}\binom{-(n-1)}{2r} = \binom{1-n}{2r}$$

故に、

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s} = (-1)^n\binom{n-1+2r-1}{n-2} = (-1)^n\binom{1-n}{2r}$$

これら(青)を上式に代入して

$$\zeta(n) = (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}\left(\log x - H_{n-1-s}\right) + \frac{(n-1)}{2}\frac{x^n}{n!}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1+2r)!}(-1)^n\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}x^{n-1-2r}}{2r}$$

次に $n>1$ のとき

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s} = (-1)^n$$

従って

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}\log x = (-1)^n\log x$$

また、超微積分篇 4･6･2 より

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n}{s}H_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad \{H_r = \psi(1+r)+\gamma\}$$

であるから

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}H_{n-1-s} = \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} = \frac{(-1)^n}{n-1}$$

よって

$$(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}\left(\log x - H_{n-1-s}\right)$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{(-1)^n\log x - \frac{(-1)^n}{n-1}\right\}$$
$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1} - \log x\right)$$

かくして

$$\zeta(n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1} - \log x\right) + \frac{(n-1)x^n}{2n!}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

i.e.

$$\zeta(n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{(n-1)x}{2n}-\log x\right\} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}} - \sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

例1

$$\zeta(3)=\frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{2x}{6}-\log x\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{xr}{1!}\right)\frac{1}{r^3e^{xr}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-2}{2r}\frac{B_{2r}x^{2+2r}}{2r(2+2r)!} \quad 0<x\leq 2\pi$$

$$\zeta(5)=\frac{5^2+1}{2\cdot 5!4}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}\right)\frac{1}{r^5e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-4}{2r}\frac{B_{2r}}{2r(4+2r)!}$$

例2 ζ(7)

$x=2$ としてこの計算を行った。級数を7項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 7;
```

$$\mathrm{z}[n\_,\ x\_] := \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{(n-1)\,x}{2\,n}-\mathrm{Log}[x]\right)+\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(x\,r)^s}{s!}\frac{1}{r^n\,e^{x\,r}} - \sum_{r=1}^{m}\frac{\mathrm{Binomial}[1-n,\ 2\,r]\ \mathrm{BernoulliB}[2\,r]\ x^{n-1+2}}{2\,r\,(n-1+2\,r)!}$$

```
N[z[7, 2], 10]
1.008349277
```

```
N[Zeta[7], 10]
1.008349277
```

2·2 *tanh x* 系ゼータの公式

tanh x 系からも自然数のゼータの公式が得られる。この公式も簡明かつ収束も速い。

公式2·2·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、n を2以上の自然数とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{x^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{(-1)^r}{r^n e^{xr}}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

特に $x=1$ のとき

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{1}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{r^s}{s!}\frac{(-1)^r}{r^n e^r}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

証明

公式1·2·3（1·2）で次のディリクレ·イータが得られた。

$$\eta(1)=\frac{1}{2}\frac{x^1}{1!}-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{e^{-rx}}{r^1}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r}}{2r(2r)!}$$

$$\eta(2)=-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{e^{-rx}}{r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+1}}{2r(2r+1)!}+\frac{x^1}{1!}\eta(1)$$

$$\eta(3)=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3!}-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{e^{-rx}}{r^3}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+2}}{2r(2r+2)!}-\frac{x^2}{2!}\eta(1)+\frac{x^1}{1!}\eta(2)$$

$$\eta(4)=-\frac{1}{2}\frac{x^4}{4!}-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{e^{-rx}}{r^4}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+3}}{2r(2r+3)!}+\frac{x^3}{3!}\eta(1)-\frac{x^2}{2!}\eta(2)+\frac{x^1}{1!}\eta(3)$$

$$\vdots$$

$$\eta(n)=-\frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{e^{-rx}}{r^n}+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r(2r+n-1)!}-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s x^s}{s!}\eta(n-s)$$

公式2·1·1の証明と類似の方法 で $\eta(k)$ を順次下の式に代入すると次式を得る。

$$\eta(n)=\frac{C_n x^n}{2}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!\,r^{n-s}}\frac{(-1)^r}{e^{rx}}+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s}{s!\,(n-1+2r-s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r}$$

ここで C_s は 公式2·1·1 と同じ係数であり、$C_s=\dfrac{1}{s!}$ で与えられる。よって、

$$\eta(n)=\frac{x^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!\,r^{n-s}}\frac{(-1)^r}{e^{rx}}+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s}{s!\,(n-1+2r-s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r}$$

$$=\frac{x^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!\,r^{n-s}}\frac{(-1)^r}{e^{rx}}+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r(n-1+2r)!}$$

ここで 前節の証明 中で示したように

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s} = (-1)^n\binom{-n}{2r-1}$$

であるから、

$$\eta(n) = \frac{x^n}{2n!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{(-1)^r}{r^n e^{xr}} + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

これに $\zeta(n) = \dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\eta(n)$ を用いて与式を得る。

例1

$$\zeta(3) = \frac{2^2}{2^2-1}\left\{\frac{x^3}{2\cdot3!} - \sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{xr}{1!}+\frac{x^2r^2}{2!}\right)\frac{(-1)^r}{r^3e^{xr}} + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-3}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2+2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(5) = \frac{2^4}{2^4-1}\left\{\frac{1}{2\cdot5!} - \sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^4}{4!}\right)\frac{(-1)^r}{r^5e^r} + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{-5}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}}{2r(4+2r)!}\right\}$$

例2 ζ(7)

$x=3/2$ としてこの計算を行った。級数を10項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 7;
```

$$z[n\_, x\_] := \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{(n-1)x}{2n}-\mathrm{Log}[x]\right)+\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(x\,r)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{x\,r}} - \sum_{r=1}^{m}\frac{\mathrm{Binomial}[1-n, 2r]\,\mathrm{BernoulliB}[2r]\,x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

```
N[z[7, 2], 10]
1.008349277
```

```
N[Zeta[7], 10]
1.008349277
```

Note

この公式は $x=3/2$ 付近が最も収束が速い。

2･3 *csch x* 系ゼータの公式

csch x 系からも自然数のゼータの公式が得られる。これらも簡明で、収束は最も速い。

公式2･3･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、n を2以上の自然数とするとき、$0<x\le\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

特に $x=1$ のとき

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(2r-1)^s}{s!}\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

証明

公式1･3･3（1･3）で次のディリクレ･ラムダが得られた。

$$0=\frac{1}{2}\frac{x^0}{0!}\left(\log\frac{x}{2}-H_0\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^1}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{2r}}{2r(2r)!}\qquad(1.1)$$

$$\lambda(2)=-\frac{1}{2}\frac{x^1}{1!}\left(\log\frac{x}{2}-H_1\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{2r+1}}{2r(2r+1)!}$$

$$\lambda(3)=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}\left(\log\frac{x}{2}-H_2\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^3}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{2r+2}}{2r(2r+2)!}+\frac{x^1}{1!}\lambda(2)$$

$$\lambda(4)=-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3!}\left(\log\frac{x}{2}-H_3\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^4}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{2r+3}}{2r(2r+3)!}-\frac{x^2}{2!}\lambda(2)+\frac{x^1}{1!}\lambda(3)$$

$$\vdots$$

公式2･1･1の証明と類似の方法 で $\lambda(k)$ を順次下の式に代入すると次式を得る。

$$\lambda(n)=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{x^s}{s!}\left\{\frac{(-1)^{n-1-s}x^{n-1-s}}{2(n-1-s)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{n-1-s}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^{n-s}}\right.$$
$$\left.-\frac{(-1)^{n-1-s}}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{2r+n-1-s}}{2r(2r+n-1-s)!}\right\}$$

ここで $n-1$ 項目は次のようになる。

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{(-1)^0x^0}{2\cdot 0!}\left(\log\frac{x}{2}-H_0\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^1}-\frac{(-1)^0}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{2r}}{2r(2r)!}\right\}$$

ところが (1.1) によりこの { } 内は0であるから、$n-1$ 項目は0となる。つまり、$\sum$ の上限は

$n-1$ として良い。かくて

$$\lambda(n) = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}\left\{\frac{(-1)^{n-1-s}x^{n-1-s}}{2(n-1-s)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{n-1-s}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^{n-s}}\right.$$
$$\left.-\frac{(-1)^{n-1-s}}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{2r+n-1-s}}{2r(2r+n-1-s)!}\right\}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}\left(\log\frac{x}{2}-H_{n-1-s}\right)$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1+2r)!}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r}$$

ここで 公式2･1･1の証明 中に示した

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}\log\frac{x}{2} = 0$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}H_{n-1-s} = -\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s} = (-1)^n\binom{-n}{2r-1}$$

を上式に代入すれば

$$\lambda(n) = \frac{x^{n-1}}{2(n-1)!(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

これに $\zeta(n) = \dfrac{2^n}{2^n-1}\lambda(n)$ を用いて与式を得る。

Note

この公式は $x=1$ 付近で最も収束が速い。これ以外は考えないほうが良い。

例1

$$\zeta(3) = \frac{8}{7}\left\{\frac{1}{8}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{2r-1}{1!}+\frac{(2r-1)^2}{2!}\right)\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-3}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

例2 ζ (7)

$x=1$ の公式に従いこの計算を行った。級数を6項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 6;
```

```
z[n_] := 2^n/(2^n - 1) (1/(2 (n - 1)! (n - 1)) + Sum[Sum[(2 r - 1)^s/s! e^-(2 r-1)/(2 r - 1)^n, {s, 0, n-1}], {r, 1, m}]
    + 1/2 Sum[Binomial[-n, 2 r - 1] ((2^(2 r) - 2) BernoulliB[2 r])/(2 r (n - 1 + 2 r)!), {r, 1, m}])
N[z[7], 10]        N[Zeta[7], 10]
1.008349277        1.008349277
```

公式2･3･1'

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, … をベルヌイ数とし、n を2以上の自然数とするとき、$0< x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\log\frac{x}{2}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

特に $x=1,2$ のとき

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\log 2\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(2r-1)^s}{s!}\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{2^{n-2}}{(n-1)!(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(4r-2)^s}{s!}\frac{e^{-(4r-2)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}2^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

証明

前公式の証明の途中 から始める。

$$\lambda(n)=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{x^s}{s!}\left\{\frac{(-1)^{n-1-s}x^{n-1-s}}{2(n-1-s)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{n-1-s}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^{n-s}}\right.$$
$$\left.-\frac{(-1)^{n-1-s}}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{2r+n-1-s}}{2r(2r+n-1-s)!}\right\}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}\left(\log\frac{x}{2}-H_{n-1-s}\right)$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1+2r)!}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r}$$

ここで 公式2･1･1'の証明 中に示した

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1+2r}{s} = (-1)^n\binom{1-n}{2r}$$

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}\log\frac{x}{2} = (-1)^n\log\frac{x}{2}$$

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\binom{n-1}{s}H_{n-1-s} = \frac{(-1)^n}{n-1}$$

を代入すれば

$$\lambda(n) = \frac{x^{n-1}}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\log\frac{x}{2}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

これに $\zeta(n) = \dfrac{2^n}{2^n-1}\lambda(n)$ を適用して与式得る。

Note

$x=1$ のとき、この公式の収束速度は本章中最速である。

例1

$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\log 2\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{2r-1}{1!}\right)\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-2}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{4r-2}{1!}\right)\frac{e^{-(4r-2)}}{(2r-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-2}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}2^{2+2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

例2 ζ(7)

$x=1$ の公式に従いこの計算を行った。級数を6項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 6;
```

$$z[n\_] := \frac{2^n}{2^n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\mathrm{Log}[2]\right)+\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(2r-1)^s}{s!}\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^n}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Binomial}[1-n,2r]\frac{(2^{2r}-2)\,\mathrm{BernoulliB}[2r]}{2r(n-1+2r)!}\right)$$

```
N[z[7], 10]        N[Zeta[7], 10]
1.008349277        1.008349277
```

2・4　三角関数系のゼータ公式

cot x, tan x, csc x 系からも次のような自然数のゼータ公式が得られる。

(1) $0<|x|\leqq 2\pi$, $v\geqq 0$ なる複素数 $x=u+vi$ について

$$\zeta(n)=\frac{(-ix)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{ix}{2n}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-irx)^s}{s!}\frac{e^{irx}}{r^n}$$

$$+(-ix)^{n-1}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$$\zeta(n)=\frac{(-ix)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{1}{n-1}-\frac{(n-1)ix}{2n}-\log x+\frac{i\pi}{2}\right\}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(-irx)^s}{s!}\frac{e^{irx}}{r^n}$$

$$+(-ix)^{n-1}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

(2) $0<|x|\leqq\pi$, $v\geqq 0$ なる複素数 $x=u+vi$ について

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{(-ix)^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-irx)^s}{s!}\frac{(-1)^r e^{irx}}{r^n}\right.$$

$$\left.-(-ix)^{n-1}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)|B_{2r}|x^{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{(-ix)^{n-1}}{2(n-1)!(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{-(2r-1)ix\}^s}{s!}\frac{e^{(2r-1)ix}}{(2r-1)^n}\right.$$

$$\left.-\frac{(-ix)^{n-1}}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{(2^{2r}-2)|B_{2r}|x^{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{(-ix)^{n-1}}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\log\frac{x}{2}+\frac{i\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\{-(2r-1)ix\}^s}{s!}\frac{e^{(2r-1)ix}}{(2r-1)^n}-\frac{(-ix)^{n-1}}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{(2^{2r}-2)|B_{2r}|x^{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

これらは「1 ゼータ母関数」の公式1・4・4、1・5・4、1・6・4 から前3節と同様の計算によって導出された。

しかしながら、これらは複素数上では前3節の諸公式と同じものである。即ち、これらにおいて x を ix に置換すれば前3節の諸公式に帰着し、逆に前3節の諸公式において x を $-ix$ に置換すれば上記の公式が得られる。よってこれらは参考のためにのみ記述した。

2012.04.05

K. Kono

宇宙人の数学