3　奇数ゼータの公式

「１ゼータ母関数」で得られた奇数ゼータは下位のゼータで表された自己同型な公式であった。本章ではこれらから下位のゼータを取り除いて陽表的な公式を得る。

3·1 *cot x* 系ゼータの公式

公式3·1·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$H_s=\sum_{t=1}^{s}1/t$ を調和数するとき、$0<x<2\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n+1) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}}$$

$$+(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n+1) =$$

$$(-1)^n\pi^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r}\right\}$$

証明

公式1·4·3（1·4）で次のリーマン·ゼータが得られた。

$$\zeta(3) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^4}-\frac{x^2}{3!}(\log x-H_3)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+2}}{2r(2r+3)!}$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^6}+\frac{x^4}{5!}(\log x-H_5)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+4}}{2r(2r+5)!}+\frac{x^2}{3!}\zeta(3)$$

$$\zeta(7) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^8}-\frac{x^6}{7!}(\log x-H_7)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+6}}{2r(2r+7)!}+\frac{x^2}{3!}\zeta(5)-\frac{x^4}{5!}\zeta(3)$$

$$\zeta(9) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^{10}}+\frac{x^8}{9!}(\log x-H_9)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+8}}{2r(2r+9)!}+\frac{x^2}{3!}\zeta(7)-\frac{x^4}{5!}\zeta(5)+\frac{x^6}{7!}\zeta(3)$$

$$\vdots$$

これらの $\zeta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\zeta(2n+1) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s C_s x^{2s}\frac{\sin rx}{r^{2n+2-2s}}$$

$$-(-1)^n x^{2n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{C_s}{(2n+1-2s)!}(\log x-H_{2n+1-2s})$$

$$+(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{C_s}{(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

ここで C_s はつぎのような有理数である。

$$C_0 = -1\ ,\ C_1 = \frac{1}{3!}\ ,\ C_2 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{3!3!}\ ,\ C_3 = \frac{1}{7!} - \left(\frac{1}{3!5!} + \frac{1}{5!3!}\right) + \frac{1}{3!3!3!}\ ,$$

$$C_4 = \frac{1}{9!} - \left(\frac{1}{3!7!} + \frac{1}{5!5!} + \frac{1}{7!3!}\right) + \left(\frac{1}{3!3!5!} + \frac{1}{3!5!3!} + \frac{1}{5!3!3!}\right) - \frac{1}{3!3!3!3!}$$

$$\vdots$$

実は、これらは$\csc x$のテイラー級数の係数であり、2の冪と階乗とベルヌイ数とで次のように計算できる。

$$C_s = \frac{2^{2s}-2}{(2s)!} B_{2s} \qquad s=0,1,2,\cdots$$

これを上式に代入すれば

$$\zeta(2n+1) = -\frac{1}{x} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{(2^{2s}-2) B_{2s} (rx)^{2s}}{(2s)!} \frac{\sin rx}{r^{2n+2}} - (-1)^n x^{2n} \times$$

$$\left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} (\log x - H_{2n+1-2s}) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2s}|x^{2s}}{2r} \right\}$$

右辺の括弧内は次のように変形できる。

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} (\log x - H_{2n+1-2s}) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2s}|x^{2s}}{2r}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s} \log x}{(2s)!(2n+1-2s)!} - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s} H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}$$

$$- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2r}|\,x^{2r}}{2r} + \frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|B_{2r}|\,x^{2r}}{2r(1+2r)!}$$

ここで ***Lemma* 3.4.1** と ***Lemma* 3.4.2c** より次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} = -\frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|B_{2r}|\,x^{2r}}{2r(2r+1)!} = \log x - 1 + \frac{1}{x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin rx}{r^2}$$

これらを用いれば

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} (\log x - H_{2n+1-2s}) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2s}|x^{2s}}{2r}$$

$$= -\frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!} \log x - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s} H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}$$

$$- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r} + \frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!} \left\{ \log x - 1 + \frac{1}{x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin rx}{r^2} \right\}$$

i.e.

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} (\log x - H_{2n+1-2s}) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2s}|x^{2s}}{2r}$$

$$= -\sum_{s=0}^{n} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s} H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!} \frac{|B_{2r}|\,x^{2r}}{2r}$$

$$+\frac{1}{x}\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^2}$$

これを上の括弧内に代入すれば

$$\zeta(2n+1) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}} - (-1)^n x^{2n}\times$$

$$\left\{-\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}} - \frac{(-1)^n}{x}\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^2}$$

$$+(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

ここで

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}\frac{\sin rx}{r^2} = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}(rx)^{2n}}{(2n)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}}$$

であるから

$$\zeta(2n+1) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}}$$

$$+(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

Note

$x=\pi$ のとき、この公式の収束速度は三角関数系中で最速である。

例1

$$\zeta(5) = \pi^4\left\{\frac{269}{21600} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{(2r+5)!} + \frac{1}{6(2r+3)!} - \frac{7}{360(2r+1)!}\right)\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r}\right\}$$

例2 ζ (7)

$x=\pi$ の公式に従いこの計算を行った。級数を12項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 12;
```

$$z[n\_] := (-1)^n \pi^{2n}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)\ \mathrm{BernoulliB}[2s]\ \mathrm{HarmonicNumber}[2n+1-2s]}{(2s)!\ (2n+1-2s)!} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)\ \mathrm{BernoulliB}[2s]}{(2s)!\ (2n+1+2r-2s)!}\frac{\mathrm{Abs}[\mathrm{BernoulliB}[2r]]\ \pi^{2r}}{2r}\right)$$

```
{N[z[3], 10], N[Zeta[7], 10]}
{1.008349277 , 1.008349277 }
```

公式3･1･2

調和数を $H_s=\sum_{t=1}^{s}1/t=\psi(1+s)+\gamma$ とし、ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、$0<x<2\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n+1)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}}$$
$$-(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

証明

公式1･4･3（1･4）で次のリーマン･ゼータが得られた。

$$\zeta(3)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^3}-\frac{x^2}{2!}(\log x-H_2)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+2}}{2r(2r+2)!}$$

$$\zeta(5)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^5}+\frac{x^4}{4!}(\log x-H_4)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+4}}{2r(2r+4)!}+\frac{x^2}{2!}\zeta(3)$$

$$\zeta(7)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^7}-\frac{x^6}{6!}(\log x-H_6)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+6}}{2r(2r+6)!}+\frac{x^2}{2!}\zeta(5)-\frac{x^4}{4!}\zeta(3)$$

$$\zeta(9)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^9}+\frac{x^8}{8!}(\log x-H_8)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r+8}}{2r(2r+8)!}+\frac{x^2}{2!}\zeta(7)-\frac{x^4}{4!}\zeta(5)+\frac{x^6}{6!}\zeta(3)$$

$\vdots$

これらの $\zeta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\zeta(2n+1)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{C_s x^{2s}}{r^{2n+1-2s}}\cos rx+(-1)^n x^{2n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s C_s}{(2n-2s)!}(\log x-H_{2n-2s})$$
$$-(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s C_s}{(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

ここで C_s はつぎのような有理数である。

$$C_0=\frac{1}{0!},\ C_1=\frac{1}{2!},\ C_2=-\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!2!},\ C_3=\frac{1}{6!}-\left(\frac{1}{4!2!}+\frac{1}{2!4!}\right)+\frac{1}{2!2!2!},$$
$$C_4=-\frac{1}{8!}+\left(\frac{1}{6!2!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{1}{2!6!}\right)-\left(\frac{1}{4!2!2!}+\frac{1}{2!4!2!}+\frac{1}{2!2!4!}\right)+\frac{1}{2!2!2!2!}$$

$\vdots$

そして Sugimoto氏 によればこれらは次式で計算できる。

$$C_s=(-1)^s\frac{E_{2s}}{(2s)!}=\frac{|E_{2s}|}{(2s)!}\qquad s=0,1,2,\cdots$$

これを上式に代入すれば

$$\zeta(2n+1) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}} + (-1)^n x^{2n} \times$$

$$\left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}(\log x - H_{2n-2s})}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r} \right\}$$

右辺の括弧内は次のように変形できる。

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}(\log x - H_{2n-2s})}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}\log x}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}$$

$$- \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r} + \frac{E_{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r)!}$$

ここで ***Lemma* 3.4.1** と ***Lemma* 3.4.2c** より次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!} = -\frac{E_{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r)!} = \log x + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r}$$

これらを用いれば

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}(\log x - H_{2n-2s})}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

$$= -\frac{E_{2n}}{(2n)!}\log x - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}$$

$$- \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r} + \frac{E_{2n}}{(2n)!}\left(\log x + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r}\right)$$

$H_{2n-2n}=0$ であるから、

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}(\log x - H_{2n-2s})}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

$$= -\sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r} + \frac{E_{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r}$$

これを上の括弧内に代入すれば

$$\zeta(2n+1) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}} + \frac{(-1)^n E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r}$$

$$- (-1)^n x^{2n}\left\{ \sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r} \right\}$$

ここで

$$\frac{(-1)^n E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r} = \frac{|E_{2n}|(rx)^{2n}}{(2n)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}}$$

であるから

$$\zeta(2n+1) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}}$$
$$-(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

例 ζ(7)

x=1/64としてこの計算を行った。級数を24項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 24;
```

$$z[n\_, x\_] := \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\mathrm{Abs[EulerE[2\,s]]}\ (r\ x)^{2\,s}}{(2\,s)\,!}\ \frac{\mathrm{Cos}[r\ x]}{r^{2\,n+1}} - (-1)^{n}\ x^{2\,n}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{\mathrm{EulerE[2\,s]\ HarmonicNumber}[2\,n-2\,s]}{(2\,s)\,!\ (2\,n-2\,s)\,!}+\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\mathrm{EulerE}[2\,s]}{(2\,s)\,!\ (2\,n+2\,r-2\,s)\,!}\ \frac{\mathrm{Abs[BernoulliB}[2\,r]]\ x^{2\,r}}{2\,r}\right)$$

```
{N[z[3, 1 / 64], 10], N[Zeta[7], 10]}
{1.008349277 , 1.008349277 }
```

3·2 tan x 系ゼータの公式

公式3·2·1

ベルヌイ数 B_{2r} 及びタンジェント数 T_{2r-1} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30, \cdots$

$T_1=1,\ T_3=2,\ T_5=16,\ T_7=272,\ T_9=7936, \cdots$

とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n+1) = \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\left\{\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n+2}}\right.$$
$$\left.-(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\right\}T_{2r-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}$$

証明

公式1·5·3（1·5）で次のディリクレ·イータが得られた。

$$\eta(1) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+1)!}x^{2r}$$

$$\eta(3) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^4}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+3)!}x^{2r+2}+\frac{x^2}{3!}\eta(1)$$

$$\eta(5) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^6}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+5)!}x^{2r+4}+\frac{x^2}{3!}\eta(3)-\frac{x^4}{5!}\eta(1)$$

$$\eta(7) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^8}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+7)!}x^{2r+6}+\frac{x^2}{3!}\eta(5)-\frac{x^4}{5!}\eta(3)+\frac{x^6}{7!}\eta(1)$$

$$\vdots$$

これらの $\eta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\eta(2n+1) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_s x^{2s}\frac{(-1)^{r-1}\sin rx}{r^{2n+2-2s}}$$
$$-(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{C_s}{(2n+1+2r-2s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

ここで C_s は 公式3·1·1 と同じ係数であり、$C_s = \dfrac{2^{2s}-2}{(2s)!}B_{2s}$ で与えら得れる。よって、

$$\eta(2n+1) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n+2}}$$

$$- (-1)^n x^{2n} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!\,(2n+1+2r-2s)!} \frac{2^{2r}(2^{2r}-1)\,|B_{2r}|}{2r} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}$$

これに $\zeta(2n+1) = \dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\eta(2n+1)$, $T_{2r-1} = \dfrac{2^{2r}(2^{2r}-1)\,|B_{2r}|}{2r}$ を適用して与式を得る。

例1

$$\zeta(5) = -\frac{16\pi^4}{15} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{(2r+5)!} + \frac{1}{6(2r+3)!} - \frac{7}{360(2r+1)!} \right\} \frac{(2^{2r}-1)\,|B_{2r}|\,\pi^{2r}}{2r}$$

例2 ζ (7)

$x=\pi$ の公式に従いこの計算を行った。級数を3000項まで計算したところ、有効数字4桁が得られた。

```
m = 3000;
z[n_] := (-1)^(n-1) (2 π)^(2 n)/(2^(2 n) - 1) Sum[Sum[(2^(2 s) - 2) BernoulliB[2 s]/((2 s)! (2 n + 1 + 2 r - 2 s)!) (2^(2 r) - 1) Abs[BernoulliB[2 r]] π^(2 r)/(2 r), {s, 0, n}], {r, 1, m}]
{N[z[3]], N[Zeta[7]]}
{1.00802 , 1.00835 }
```

例2で見たように $x=\pi$ の公式の収束は非常に遅い。そこで *Lemma* 3.4.2*t* より

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{T_{2r-1}}{(2r+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2^{2r}-1)\,|B_{2r}|\,\pi^{2r}}{2r(2r+1)!} = \log 2$$

これを用いて $x=\pi$ の公式を次のように変形すれば、収束は速くなる。

公式3・2・1'

$$\zeta(2n+1) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2^{2n}-1} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!\,(2n+1+2r-2s)!} \frac{(2^{2r}-1)\,|B_{2r}|\,\pi^{2r}}{2r} + \frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!}\log 2 \right\}$$

例2' ζ (7)

例2と同じ計算をこの公式で行った。級数を55項まで計算したところ、有効数字6桁が得られた。

```
m = 55;
z[n_] := (-1)^(n-1) (2 π)^(2 n)/(2^(2 n) - 1) (Sum[Sum[(2^(2 s) - 2) BernoulliB[2 s]/((2 s)! (2 n + 1 + 2 r - 2 s)!) (2^(2 r) - 1) Abs[BernoulliB[2 r]] π^(2 r)/(2 r), {s, 0, n-1}], {r, 1, m}]
    + (2^(2 n) - 2) BernoulliB[2 n]/(2 n)! Log[2])
{N[z[3]], N[Zeta[7]]}
{1.00835, 1.00835}
```

公式3・2・2

ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n+1)=-\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n+1}}\right.$$
$$\left.-(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

証明

公式1・5・3（1・5）で次のディリクレ・イータが得られた。

$$\eta(1)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^1}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r)!}x^{2r}$$

$$\eta(3)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^3}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+2)!}x^{2r+2}+\frac{x^2}{2!}\eta(1)$$

$$\eta(5)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^5}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+4)!}x^{2r+4}+\frac{x^2}{2!}\eta(3)-\frac{x^4}{4!}\eta(1)$$

$$\eta(7)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^7}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|}{2r(2r+6)!}x^{2r+6}+\frac{x^2}{2!}\eta(5)-\frac{x^4}{4!}\eta(3)+\frac{x^6}{6!}\eta(1)$$

$$\vdots$$

これらの $\eta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\eta(2n+1)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}C_s x^{2s}\frac{(-1)^{r-1}\cos rx}{r^{2n+1-2s}}+(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_s\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r+2n-2s)!}$$

ここで C_s は 公式3・1・2 と同じ係数であり、$C_s=(-1)^s\dfrac{E_{2s}}{(2s)!}=\dfrac{|E_{2s}|}{(2s)!}$ で与えられる。

よって

$$\eta(2n+1)=-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n+1}}$$
$$+(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

これに $\zeta(2n+1)=\dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\eta(2n+1)$ を適用して与式を得る。

3·3 csc x 系ゼータの公式

公式3·3·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$H_s=\sum_{t=1}^{s}1/t$ を調和数とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n+1)=-\frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+2}}$$

$$+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{x^{2r}}{2r}\right\}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n+1)=$$
$$\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{\pi^{2r}}{2r}\right\}$$

証明

公式1·6·3 (1·6) からシコシコと導出するのが本来であるが、ここでは前2節から導く。
公式3·1·1 と 公式3·2·1 より

$$\zeta(2n+1)=-\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}}$$
$$+(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\eta(2n+1)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^sB_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n+2}}$$
$$-(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

辺々足せば

$$\zeta(2n+1)+\eta(2n+1)=-\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx-(-1)^r\sin rx}{r^{2n+2}}$$
$$+(-1)^n x^{2n}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}$$
$$-(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

ここで

$$\zeta(2n+1)+\eta(2n+1)=\left(1+\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n+1)=\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n}}\zeta(2n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx-(-1)^r\sin rx}{r^{2n+2}}$$
$$=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+2}}$$

であるから

$$\zeta(2n+1) = -\frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s(2^{2s}-2)B_{2s}\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+2}}$$

$$+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{x^{2r}}{2r}\right\}$$

Note

証明から明らかなように、これらは 公式3･1･1 と 公式3･2･1 の加重平均であり、固有の公式ではない。これらは煩雑なだけであまり価値がない。

公式3･3･2

調和数を $H_s = \sum_{t=1}^{s} 1/t = \psi(1+s)+\gamma$ とし、ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30, \cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、$0<x\leq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n+1) = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+1}}$$

$$-\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{x^{2r}}{2r}\right\}$$

特に $x=\pi/2$ のとき

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{1}{2r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}\right\}$$

証明

公式3･1･2 と 公式3･2･2 より

$$\zeta(2n+1) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}}$$

$$-(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\eta(2n+1) = -\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n+1}}$$

$$+(-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{(2^{2r}-1)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}$$

辺々足せば

$$\zeta(2n+1)+\eta(2n+1) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx-(-1)^r\cos rx}{r^{2n+1}}$$

$$-(-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{(2^{2r}-2)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

ここで

$$\zeta(2n+1)+\eta(2n+1)=\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n}}\zeta(2n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx-(-1)^r\cos rx}{r^{2n+1}}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+1}}$$

であるから

$$\zeta(2n+1)=\frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+1}}$$
$$-\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{x^{2r}}{2r}\right\}$$

Note

これらも 公式3･2･2 と 公式3･2･2 の加重平均であるが、$x=\pi/2$ の式は固有の式であり価値がある。

例1

$$\zeta(5)=\frac{\pi^4}{31}\left\{\frac{83}{288}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4+2r)!}-\frac{1}{2(2+2r)!}+\frac{5}{24(2r)!}\right)\frac{(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{2r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}\right\}$$

例2 ζ (7)

$x=\pi/2$ の公式に従いこの計算を行った。級数を13項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 13;
z[n_] := (-1)^(n-1) π^(2 n) / (2^(2 n+1) - 1) (Sum[EulerE[2 s] HarmonicNumber[2 n - 2 s] / ((2 s)! (2 n - 2 s)!), {s, 0, n}] -
    Sum[EulerE[2 s] (2^(2 r) - 2) Abs[BernoulliB[2 r]] / ((2 s)! (2 n + 2 r - 2 s)!) 1/(2 r) (π/2)^(2 r), {r, 1, m}, {s, 0, n}])
{N[z[3], 10], N[Zeta[7], 10]}
{1.008349277 , 1.008349277 }
```

3･4 補助公式

Lemma 3.4.1

ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、自然数 n について次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}=0$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!}=0$$

証明

$$x\,csch\,x=1-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!}x^{2s}\qquad |x|<\pi$$

i.e.

$$\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=-\frac{\left(2^0-2\right)B_0}{0!}-\frac{\left(2^2-2\right)B_2}{2!}x^2-\frac{\left(2^4-2\right)B_4}{4!}x^4-\cdots$$

ここで $C_{2s}=-\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}$ と置けば

$$\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\frac{C_0}{0!}+\frac{C_2}{2!}x^2+\frac{C_4}{4!}x^4+\frac{C_6}{6!}x^6+\cdots$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\frac{1}{7!}x^6+\frac{1}{9!}x^8+\cdots$$

コーシー積を採れば

$$1=C_0+\left(\frac{C_0}{0!3!}+\frac{C_2}{2!1!}\right)x^2+\left(\frac{C_0}{0!5!}+\frac{C_2}{2!3!}+\frac{C_4}{4!1!}\right)x^4+$$

これが任意の x について成立するためには

$$C_0=1\,,\ \frac{C_0}{0!3!}+\frac{C_2}{2!1!}=0\,,\ \frac{C_0}{0!5!}+\frac{C_2}{2!3!}+\frac{C_4}{4!1!}=0\,,\cdots$$

即ち

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{C_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}=\sum_{s=0}^{n}\frac{-\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!}=0$$

次に

$$sech\,x=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_{2s}}{(2s)!}x^{2s}\qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

より

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{E_0}{0!}+\frac{E_1}{1!}x^1+\frac{E_2}{2!}x^2+\frac{E_3}{3!}x^3+\frac{E_4}{4!}x^4+\cdots$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

コーシー積を採れば

$$1=E_0+\left(\frac{E_0}{0!1!}+\frac{E_1}{1!0!}\right)x^1+\left(\frac{E_0}{0!2!}+\frac{E_1}{1!1!}+\frac{E_2}{2!0!}\right)x^2+\cdots$$

これが任意の x について成立するためには

$$E_0=1\ ,\ \frac{E_0}{0!1!}+\frac{E_1}{1!0!}=0\ ,\ \frac{E_0}{0!2!}+\frac{E_1}{1!1!}+\frac{E_2}{2!0!}=0\ ,\cdots$$

即ち

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{E_s}{s!(n-s)!}=0$$

$E_1=E_3=E_5\cdots=0$ であるから

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!}=0$$

を得る。

Lemma 3.4.2*c*

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とするとき、$0<x<2\pi$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r)!}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r}+\log x$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^2}+\log x-1$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r(2r)!}=\log\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r(2r+1)!}=\log\pi-1$$

証明

$\cot x$ のテイラー級数とフーリエ級数の1階積分は次のようであった。(05 項別高階積分)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx=\log x-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r(2r)!}x^{2r}\qquad 0<x<\pi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cot x\,dx=\frac{1}{2^0}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^1}\sin\left(2rx-\frac{1\pi}{2}\right)-\log 2\qquad 0<x<\pi$$

これらより

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r(2r)!}x^{2r} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^1}cos(2rx) + log\,2x$$

x を $x/2$ に置換すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r)!} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{cos\,rx}{r} + log\,x$$

次に、$cot\,x$ のテイラー級数とフーリエ級数の2階積分は次のようであった。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}cot\,x\,dx^2 = x(log\,x - 1) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r\,(2r+1)!}x^{2r+1}$$

$$- \left\{\frac{\pi}{2}\left(log\frac{\pi}{2} - 1\right) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r(2r+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+1}\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}cot\,x\,dx^2 = \frac{1}{2^1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}sin\left(2rx - \frac{2\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)log\,2$$

これらより

$$x(log\,x - 1) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r\,(2r+1)!}x^{2r+1} - \left\{\frac{\pi}{2}\left(log\frac{\pi}{2} - 1\right) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r(2r+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}sin(2rx) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)log\,2$$

$x=0$ と置けば

$$- \left\{\frac{\pi}{2}\left(log\frac{\pi}{2} - 1\right) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r\,(2r+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+1}\right\} = \frac{\pi}{2}log\,2$$

よって

$$x(log\,x - 1) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|}{2r(2r+1)!}x^{2r+1} = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}sin(2rx) - x\,log\,2$$

これより

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r+1)!} = log(2x) - 1 + \frac{1}{2x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}sin(2rx)$$

x を $x/2$ に置換すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r+1)!} = log\,x - 1 + \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{sin(rx)}{r^2}$$

Lemma* 3.4.2*t

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, … をベルヌイ数とするとき、$x \leqq |\pi|$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)|B_{2r}|x^{2r}}{2r(2r)!} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r}cos\,rx + log\,2$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r}}{2r(2r+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r^2}\sin rx+\log 2$$

特に$x=\pi$のとき

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|\pi^{2r}}{2r(2r+1)!}=\log 2$$

証明

$\tan x$のテイラー級数とフーリエ級数の1階積分は次のようであった。(05 項別高階積分)

$$\int_0^x \tan x\,dx=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r}}{2r(2r)!}\qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x \tan x\,dx=\frac{1}{2^0}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^1}\sin\left(2rx-\frac{1\pi}{2}\right)+\log 2\qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

これらより

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r}}{2r(2r)!}=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\cos(2rx)+\log 2$$

xを$x/2$に置換すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r}}{2r(2r)!}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r}\cos rx+\log 2$$

次に、$\tan x$のテイラー級数とフーリエ級数の2階積分は次のようであった。

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \tan x\,dx^2=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|}{2r(2r+1)!}x^{2r+1}$$

$$\int_0^x\!\!\int_0^x \tan x\,dx^2=\frac{1}{2^1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^2}\sin\left(2rx-\frac{2\pi}{2}\right)+x\log 2$$

これらより

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^{2r}\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r}}{2r(2r+1)!}=-\frac{1}{2x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^2}\sin(2rx)+\log 2$$

xを$x/2$に置換すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r}}{2r(2r+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r^2}\sin rx+\log 2$$

2011.02.25
2012.12.05 リニューアル

K. Kono

宇宙人の数学