4 偶数ゼータの公式

「１ゼータ母関数」で得られた偶数ゼータは下位のゼータで表された自己同型な公式であった。本章ではこれらから下位のゼータを取り除いて陽表的な公式を得る。

4･1 cot x 系ゼータの公式

公式4･1･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、n を自然数とするとき、$0<x<2\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+1}} - \frac{|B_{2n}|x^{2n}}{2(2n)!}\left\{\left(2^{2n}-2\right)-\frac{\pi\left(2^{2n+1}-2\right)}{x}\right\}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|\,(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

証明

公式1･4･3（1･4）で次のリーマン･ゼータが得られた。

$$\zeta(2) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{3!} + \frac{\pi}{2}\frac{x^1}{2!}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^5} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{5!} - \frac{\pi}{2}\frac{x^3}{4!} + \frac{x^2}{3!}\zeta(2)$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^7} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{7!} + \frac{\pi}{2}\frac{x^5}{6!} + \frac{x^2}{3!}\zeta(4) - \frac{x^4}{5!}\zeta(2)$$

$$\zeta(8) = \frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^9} + \frac{1}{2}\frac{x^8}{9!} - \frac{\pi}{2}\frac{x^7}{8!} + \frac{x^2}{3!}\zeta(6) - \frac{x^4}{5!}\zeta(4) + \frac{x^6}{7!}\zeta(2)$$

$$\vdots$$

これらの $\zeta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s C_s x^{2s}\frac{\sin rx}{r^{2n+1-2s}} - \frac{(-1)^n}{2}\sum_{s=0}^{n-1}C_s\left\{\frac{x^{2n}}{(2n+1-2s)!} - \frac{\pi x^{2n-1}}{(2n-2s)!}\right\}$$

ここで C_s は次のような有理数である。

$$C_0 = -1\ ,\ C_1 = \frac{1}{3!}\ ,\ C_2 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{3!3!}\ ,\ C_3 = \frac{1}{7!} - \left(\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{5!3!}\right) + \frac{1}{3!3!3!}\ ,$$

$$C_4 = \frac{1}{9!} - \left(\frac{1}{3!7!}+\frac{1}{5!5!}+\frac{1}{7!3!}\right) + \left(\frac{1}{3!3!5!}+\frac{1}{3!5!3!}+\frac{1}{5!3!3!}\right) - \frac{1}{3!3!3!3!}$$

$$\vdots$$

これらは次式で計算できる。

$$C_s = \frac{2^{2s}-2}{(2s)!}B_{2s} \qquad s=0,1,2,\cdots$$

これを上式に代入すると

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\frac{2^{2s}-2}{(2s)!}B_{2s}x^{2s}\frac{\sin rx}{r^{2n+1-2s}}$$

$$-\frac{(-1)^n}{2}\left\{x^{2n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n+1-2s)!}-\pi x^{2n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!}\right\}$$

ここで

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n+1-2s)!} = -\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}}{(2n)!\,1!}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!} = -\frac{\left(2^{2n+1}-2\right)B_{2n}}{(2n)!\,0!}$$

であるからこれらを上式に代入すれば

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+1}}$$

$$+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2}\left\{\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}}{(2n)!}-\frac{\pi}{x}\frac{\left(2^{2n+1}-2\right)B_{2n}}{(2n)!}\right\}$$

公式4･1･2

ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、$0<x<2\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n}}-\frac{|E_{2n}|\,x^{2n}}{2(2n)!}+\frac{\pi}{2}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)|B_{2n}|\,x^{2n-1}}{(2n)!}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2^{2n}-2}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,(\pi r)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r}{r^{2n}}-\frac{|E_{2n}|\,\pi^{2n}}{2(2n)!}\right\}$$

証明

公式1･4･3（1･4）で次のリーマン･ゼータが得られた。

$$\zeta(2) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}+\frac{\pi}{2}\frac{x^1}{1!}$$

$$\zeta(4) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^4}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4!}-\frac{\pi}{2}\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\zeta(2)$$

$$\zeta(6) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos rx}{r^6} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6!} + \frac{\pi}{2}\frac{x^5}{5!} + \frac{x^2}{2!}\zeta(4) - \frac{x^4}{4!}\zeta(2)$$

$$\zeta(8) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos rx}{r^8} + \frac{1}{2}\frac{x^8}{8!} - \frac{\pi}{2}\frac{x^7}{7!} + \frac{x^2}{2!}\zeta(6) - \frac{x^4}{4!}\zeta(4) + \frac{x^6}{6!}\zeta(2)$$

$\vdots$

これらの $\zeta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} C_s x^{2s} \frac{\cos rx}{r^{2n-2s}} + \frac{(-1)^n}{2} x^{2n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s C_s}{(2n-2s)!} - (-1)^n \frac{\pi x^{2n-1}}{2} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s C_s}{(2n-1-2s)!}$$

ここで C_s はつぎのような有理数である。

$$C_0 = \frac{1}{0!},\ C_1 = \frac{1}{2!},\ C_2 = -\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!2!},\ C_3 = \frac{1}{6!} - \left(\frac{1}{4!2!} + \frac{1}{2!4!}\right) + \frac{1}{2!2!2!},$$

$$C_4 = -\frac{1}{8!} + \left(\frac{1}{6!2!} + \frac{1}{4!4!} + \frac{1}{2!6!}\right) - \left(\frac{1}{4!2!2!} + \frac{1}{2!4!2!} + \frac{1}{2!2!4!}\right) + \frac{1}{2!2!2!2!}$$

$\vdots$

そしてこれらは次式で計算できる。

$$C_s = (-1)^s \frac{E_{2s}}{(2s)!} = \frac{|E_{2s}|}{(2s)!}$$

これを上式に代入すれば

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|\, x^{2s}}{(2s)!} \frac{\cos rx}{r^{2n-2s}} + \frac{(-1)^n}{2} x^{2n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!}$$

$$- (-1)^n \frac{\pi x^{2n-1}}{2} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-1-2s)!}$$

ここで

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!} = -\frac{E_{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-1-2s)!} = \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n)!}$$

であるからこれらを上式に代入すれば

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|\,(rx)^{2s}}{(2s)!} \frac{\cos rx}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\, x^{2n}}{2(2n)!} + \frac{\pi}{2} \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)|B_{2n}|\, x^{2n-1}}{(2n)!}$$

特に $x = \pi$ のときは

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|\,(\pi r)^{2s}}{(2s)!} \frac{\cos \pi r}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\, \pi^{2n}}{2(2n)!} + \frac{(2\pi)^{2n}|B_{2n}|}{2(2n)!}\left(2^{2n}-1\right)$$

i.e.

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|\,(\pi r)^{2s}}{(2s)!} \frac{\cos \pi r}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\, \pi^{2n}}{2(2n)!} + \left(2^{2n}-1\right)\zeta(2n)$$

これより

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2^{2n}-2}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|(\pi r)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\pi^{2n}}{2(2n)!}\right\}$$

例 ζ(6)

$x=\pi$ の公式に従いこの計算を行った。級数を18,400項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 18400 ;
```

$$z[n\_] := -\frac{1}{2^{2n}-2}\left(\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\text{Abs[EulerE[2 s]]}(\pi r)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r}{r^{2n}} - \frac{\text{Abs[EulerE[2 n]]}\pi^{2n}}{2(2n)!}\right)$$

```
N[z[3], 10]          N[Zeta[6], 10]
1.017343062          1.017343062
```

副産物

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!} = -\frac{\left(2^{2n+1}-2\right)B_{2n}}{(2n)!0!}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n-1-2s)!} = \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n)!}$$

4·2 tan x 系ゼータの公式

公式4·2·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n)=\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s-1}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n}}+\frac{|B_{2n}|(2x)^{2n}}{2(2n)!}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n)=\frac{|B_{2n}|(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

証明

公式1·5·3（1·5）で次のディリクレ·イータが得られた。

$$\eta(2)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{3!}$$

$$\eta(4)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^5}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{5!}+\frac{x^2}{3!}\eta(2)$$

$$\eta(6)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^7}+\frac{1}{2}\frac{x^6}{7!}+\frac{x^2}{3!}\eta(4)-\frac{x^4}{5!}\eta(2)$$

$$\eta(8)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^9}-\frac{1}{2}\frac{x^8}{9!}+\frac{x^2}{3!}\eta(6)-\frac{x^4}{5!}\eta(4)+\frac{x^6}{7!}\eta(2)$$

$$\vdots$$

これらの $\eta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\eta(2n)=-\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s C_s\,(rx)^{2s}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^{2n+1}}+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{C_s}{(2n+1-2s)!}$$

ここで C_s は 公式4·1·1 と同じ係数であり、$C_s=\dfrac{2^{2s}-2}{(2s)!}B_{2s}$ で与えられる。よって、

$$\eta(2n)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}(rx)^{2s-1}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n}}$$
$$+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n+1-2s)!}$$

ここで

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n+1-2s)!}=-\frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}}{(2n)!\,1!}$$

を代入すれば

$$\eta(2n)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s-1}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n}}+\frac{\left(2^{2n}-2\right)|B_{2n}|\,x^{2n}}{2(2n)!}$$

これに$\zeta(2n)=\dfrac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}-1}\eta(2n)=\dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\eta(2n)$を適用して

$$\zeta(2n)=\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s-1}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n}}$$
$$+\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\frac{\left(2^{2n}-2\right)|B_{2n}|x^{2n}}{2(2n)!}$$

i.e.

$$\zeta(2n)=\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s-1}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n}}+\frac{|B_{2n}|(2x)^{2n}}{2(2n)!}$$

例 ζ(6)

$x=1/64$としてこの計算を行った。級数を32項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 32 ;
z[n_, x_] := 2^(2n)/(2^(2n) - 2) Sum[Sum[(-1)^s BernoulliB[2 s] (2^(2 s) - 2) (r x)^(2 s-1)/(2 s)! (-1)^r Sin[r x]/r^(2 n), {s, 0, n-1}], {r, 1, m}]
            + Abs[EulerE[2 n]] (2 x)^(2 n)/(2 (2 n)!)
```

$$z[n\_,x\_]:=\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s\,\mathrm{BernoulliB}[2s]\,(2^{2s}-2)\,(r\,x)^{2s-1}}{(2\,s)\,!}\frac{(-1)^r\,\mathrm{Sin}[r\,x]}{r^{2n}}+\frac{\mathrm{Abs}[\mathrm{EulerE}[2n]]\,(2\,x)^{2n}}{2\,(2\,n)\,!}$$

```
N[z[3, 1/64], 10]        N[Zeta[6], 10]
1.017343062              1.017343062
```

公式4･2･2

ベルヌイ数B_{2r}及びオイラー数E_{2r}をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n)=-\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n}}-\frac{|E_{2n}|x^{2n}}{2(2n)!}\right\}$$

特に$x=\pi/2$のとき

$$\zeta(2n)=-\frac{1}{2^{2n}-2}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|(\pi r)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r}{r^{2n}}-\frac{|E_{2n}|\pi^{2n}}{2(2n)!}\right\}$$

証明

公式1･5･3 (1･5) で次のディリクレ･イータが得られた。

$$\eta(2)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^2}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}$$

$$\eta(4)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^4}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{4!}+\frac{x^2}{2!}\eta(2)$$

$$\eta(6) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^6} + \frac{1}{2}\frac{x^6}{6!} + \frac{x^2}{2!}\eta(4) - \frac{x^4}{4!}\eta(2)$$

$$\eta(8) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^8} - \frac{1}{2}\frac{x^8}{8!} + \frac{x^2}{2!}\eta(6) - \frac{x^4}{4!}\eta(4) + \frac{x^6}{6!}\eta(2)$$

$$\vdots$$

これらの $\eta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\eta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}C_s x^{2s}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^{2n-2s}} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{2}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s C_s}{(2n-2s)!}$$

ここで C_s は 公式4･1･2 と同じ係数であり、$C_s = (-1)^s\dfrac{E_{2s}}{(2s)!}$ で与えられる。よって、

$$\eta(2n) = -\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n}} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{2}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!}$$

ここで

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!} = -\frac{E_{2n}}{(2n)!}$$

を代入すれば

$$\eta(2n) = -\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n}} + \frac{|E_{2n}|x^{2n}}{2(2n)!}$$

これに $\zeta(2n) = \dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\eta(2n)$ を適用して与式を得る。

4·3 csc x 系ゼータの公式

公式4·3·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n)=-\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^sB_{2s}\left(2^{2s}-2\right)\{(2r-1)x\}^{2s-1}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}+\frac{\pi}{2}\frac{2^{2n}|B_{2n}|x^{2n-1}}{(2n)!}$$

特に $x=\pi$ のとき

$$\zeta(2n)=\frac{|B_{2n}|(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

証明

公式1·6·3（1·6）で次のディリクレ·イータが得られた。

$$\lambda(2)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^3}+\frac{x^1}{2!}\frac{\pi}{4}$$

$$\lambda(4)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^5}-\frac{x^3}{4!}\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{3!}\lambda(2)$$

$$\lambda(6)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^7}+\frac{x^5}{6!}\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{3!}\lambda(4)-\frac{x^4}{5!}\lambda(2)$$

$$\lambda(8)=\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^9}-\frac{x^7}{8!}\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{3!}\lambda(6)-\frac{x^4}{5!}\lambda(4)+\frac{x^6}{7!}\lambda(2)$$

$$\vdots$$

これらの $\lambda(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\lambda(2n)=-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^sC_sx^{2s-1}}{(2r-1)^{2n+1-2s}}\sin\{(2r-1)x\}+(-1)^n\frac{\pi x^{2n-1}}{4}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{C_s}{(2n-2s)!}$$

ここで C_s は 公式4·1·1 と同じ係数であり、$C_s=\dfrac{2^{2s}-2}{(2s)!}B_{2s}$ で与えられる。よって、

$$\lambda(2n)=-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\pi x^{2n-1}}{4}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!}$$

ここで

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!(2n-2s)!}=-\frac{\left(2^{2n+1}-2\right)B_{2n}}{(2n)!0!}$$

を代入すれば

$$\lambda(2n)=-\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}$$
$$+\frac{\pi}{4}\frac{\left(2^{2n+1}-2\right)\left|B_{2n}\right|x^{2n-1}}{(2n)!}$$

これに $\zeta(2n)=\dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\lambda(2n)=\dfrac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-2}\lambda(2n)$ を適用して

$$\zeta(2n)=-\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)\{(2r-1)x\}^{2s-1}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}$$
$$+\frac{\pi}{2}\frac{2^{2n}\left|B_{2n}\right|x^{2n-1}}{(2n)!}$$

公式4･3･2

ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots$

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$

とするとき、$0<x\leqq\pi$ について次式が成立する。

$$\zeta(2n)=\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left|E_{2s}\right|\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}+\frac{\pi}{4}\frac{2^{4n}\left|B_{2n}\right|x^{2n-1}}{(2n)!}$$

特に $x=\pi/2$ のとき

$$\zeta(2n)=\frac{\left|B_{2n}\right|(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

証明

公式1･6･3（1･6）で次のディリクレ･ラムダが得られた。

$$\lambda(2)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^2}+\frac{x^1}{1!}\frac{\pi}{4}$$

$$\lambda(4)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^4}-\frac{x^3}{3!}\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{2!}\lambda(2)$$

$$\lambda(6)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^6}+\frac{x^5}{5!}\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{2!}\lambda(4)-\frac{x^4}{4!}\lambda(2)$$

$$\lambda(8)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^8}-\frac{x^7}{7!}\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{2!}\lambda(6)-\frac{x^4}{4!}\lambda(4)+\frac{x^6}{6!}\lambda(2)$$

$\vdots$

これらの $\lambda(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\lambda(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{C_s x^{2s}}{(2r-1)^{2n-2s}}\cos\{(2r-1)x\} - (-1)^n\frac{\pi x^{2n-1}}{4}\sum_{s=0}^{n-1}C_s\frac{(-1)^s}{(2n-1-2s)!}$$

ここで C_s は 公式4･1･2 と同じ係数であり、$C_s = (-1)^s\dfrac{E_{2s}}{(2s)!} = \dfrac{|E_{2s}|}{(2s)!}$ で与えられる。

よって、

$$\lambda(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,x^{2s}}{(2s)!\,(2r-1)^{2n-2s}}\cos\{(2r-1)x\}$$

$$- (-1)^n\frac{\pi x^{2n-1}}{4}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-1-2s)!}$$

これに

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-1-2s)!} = \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n)!}$$

を代入すれば

$$\lambda(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,x^{2s}}{(2s)!\,(2r-1)^{2n-2s}}\cos\{(2r-1)x\}$$

$$- (-1)^n\frac{\pi}{4}\,\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}$$

これに $\zeta(2n) = \dfrac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\lambda(2n)$ を適用して所望の式を得る。

例 $\zeta(6)$

$x=1/64$ としてこの計算を行った。級数を25項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 25 ;
```

$$z[n\_, x\_] := \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\text{Abs[EulerE[2 s]] ((2 r - 1) x)}^{2s}}{(2\,s)\,!}\,\frac{\text{Cos[(2 r - 1) x]}}{(2\,r-1)^{2n}} + \frac{\pi}{4}\,\frac{2^{4n}\,\text{Abs[BernoulliB[2 n]]}\,x^{2n-1}}{(2\,n)\,!}$$

```
N[z[3, 1/64], 10]        N[Zeta[6], 10]
1.017343062              1.017343062
```

2012.04.10

K. Kono

宇宙人の数学