5　複素数ゼータの公式

「２ 自然数ゼータの公式 」は容易に複素数化できる。

5･1　*coth x* 系ゼータの公式

公式5･1･1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、p を $p\neq 1,0,-1,-2,\cdots$ なる複素数とし、$\Gamma(p,x)=\int_x^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$ を不完全ガンマ関数とするとき、複素数 $x=u+vi\ \ s.t.\ \ 0<|x|\leqq 2\pi\ ,u\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\zeta(p)=\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{x}{2p}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p,xr)}{\Gamma(p)r^p}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

特に $x=1$ のとき

$$\zeta(p)=\frac{p+1}{2(p-1)\Gamma(p+1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p,r)}{\Gamma(p)r^p}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

証明

「2 自然数ゼータの公式」の公式2･1･1 で次の自然数ゼータが得られた。

$$\zeta(n)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{x}{2n}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(rx)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{rx}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

一方、指数和と不完全ガンマ関数について次の関係式が知られている。

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}=\frac{\Gamma(n,x)}{\Gamma(n)}e^x$$

よってこれを上式に代入すれば

$$\zeta(n)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{x}{2n}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n,xr)}{\Gamma(n)r^n}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

そして自然数 n を複素数 p に拡張し階乗をガンマ関数に置換すれば

$$\zeta(p)=\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{x}{2p}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p,xr)}{\Gamma(p)r^p}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

例　$\zeta(1/2+14.134725141734693790457251983i)$

$x=1+i$ としてこの計算を行った。級数を55項まで計算したところ、有効数字23桁が得られた。

$$m = 55;$$

$$z[p\_,x\_]:=\frac{x^{p-1}}{\mathrm{Gamma}[p]}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{x}{2p}\right)+\sum_{r=1}^{m}\frac{\mathrm{Gamma}[p,x\,r]}{\mathrm{Gamma}[p]\,r^p}-\sum_{r=1}^{m}\frac{\mathrm{Binomial}[-p,2r-1]\,\mathrm{BernoulliB}[2r]\,x^{p-1+2r}}{2r\,\mathrm{Gamma}[p+2r]}$$

N[z[1 / 2 + 14.134725141734693790457251983 i, 1 + i], 20]

$0.\times 10^{-22}+0.\times 10^{-22}\ i$

```
N[Zeta[1/2 + 14.134725141734693790457251983 i], 20]
0. × 10^-26 + 0. × 10^-26 i
```

同様にして、公式2･1･1'（2･1）から次の公式を得る。

公式5･1･1'

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、p を $p\neq 1,0,-1,-2,\cdots$ なる複素数とし、$\Gamma(p,x)=\int_x^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$ を不完全ガンマ関数とするとき、複素数 $x=u+vi$ s.t. $0<|x|\leqq 2\pi$, $u\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\zeta(p)=\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}\left\{\frac{1}{p-1}+\frac{(p-1)x}{2p}-\log x\right\}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p-1,xr)}{\Gamma(p-1)r^p}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-p}{2r}\frac{B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

特に $x=1$ のとき

$$\zeta(p)=\frac{p^2+1}{2(p-1)\Gamma(p+1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p-1,r)}{\Gamma(p-1)r^p}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-p}{2r}\frac{B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

例　$\zeta(1/2-14.134725141734693790457251983i)$

$x=1-i$ としてこの計算を行った。級数を51項まで計算したところ、有効数字22桁が得られた。

m = 51;

$$z[p\_, x\_] := \frac{x^{p-1}}{\mathrm{Gamma}[p]}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{(p-1)\,x}{2\,p}-\mathrm{Log}[x]\right)+\sum_{r=1}^{m}\frac{\mathrm{Gamma}[p-1,\,x\,r]}{\mathrm{Gamma}[p-1]\,r^p}-\sum_{r=1}^{m}\frac{\mathrm{Binomial}[1-p,\,2\,r]\,\mathrm{BernoulliB}[2\,r]\,x^{p-1+2\,r}}{2\,r\,\mathrm{Gamma}[p+2\,r]}$$

```
N[z[1/2 - 14.134725141734693790457251983 i, 1 - i], 20]
0. × 10^-21 + 0. × 10^-21 i

N[Zeta[1/2 - 14.134725141734693790457251983 i], 20]
0. × 10^-26 + 0. × 10^-26 i
```

5·2　*tanh x* 系ゼータの公式

公式5·2·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、p を $p \neq 1,0,-1,-2,\cdots$ なる複素数とし、$\Gamma(p,x)=\int_x^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$ を不完全ガンマ関数とするとき、複素数 $x=u+vi$　s.t.　$0<|x|\leq\pi$, $u\geq 0$ について次式が成立する。

$$\zeta(p)=\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\left\{\frac{x^p}{2\Gamma(p+1)}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p,xr)}{\Gamma(p)}\frac{(-1)^r}{r^p}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

特に $x=1$ のとき

$$\zeta(p)=\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\left\{\frac{1}{2\Gamma(p+1)}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p,r)}{\Gamma(p)}\frac{(-1)^r}{r^p}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

証明

公式2·2·1（2·2）で次の自然数ゼータが得られた。

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{x^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{(-1)^r}{r^n e^{xr}}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

これに

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}=\frac{\Gamma(n,xr)}{\Gamma(n)}e^{xr}$$

を代入すれば

$$\zeta(n)=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{x^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n,xr)}{\Gamma(n)}\frac{(-1)^r}{r^n}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

そして自然数 n を実数 p に拡張し階乗をガンマ関数に置換して与式を得る。

例　ζ (0.7)

$x=1/2+i$ としてこの計算を行った。級数を37項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 37 ;
z[p_, x_]:= 2^(p-1)/(2^(p-1) - 1) ( x^p/(2 Gamma[p + 1]) - Sum[Gamma[p, x r]/Gamma[p] (-1)^r/r^p, {r, 1, m}] +
    Sum[Binomial[-p, 2 r - 1] ((2^(2 r) - 1) BernoulliB[2 r] x^(p-1+2 r))/(2 r Gamma[p + 2 r]), {r, 1, m}] )
```

```
N[z[0.7 , 1 / 2 + i]];
SetPrecision  [%, 10]

-2.778388446  + 0. × 10^-11 i
```

```
N[Zeta [0.7 ]];
SetPrecision  [%, 10

-2.778388446
```

5·3 $\operatorname{csch} x$ 系ゼータの公式

公式5·3·1

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、p を $p\neq 1,0,-1,-2,\cdots$ なる複素数とし、$\Gamma(p,x)=\int_x^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$ を不完全ガンマ関数とするとき、複素数 $x=u+vi$ s.t. $0<|x|\leqq\pi$, $u\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\zeta(p)=\frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{x^{p-1}}{2(p-1)\Gamma(p)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma\{p,x(2r-1)\}}{\Gamma(p)(2r-1)^p}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

特に $x=1$ のとき

$$\zeta(p)=\frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{1}{2(p-1)\Gamma(p)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p,2r-1)}{\Gamma(p)(2r-1)^p}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-p}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

証明

公式2·3·1 (2·3)で次の自然数ゼータが得られた。

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s\,!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

一方、

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s\,!}=\frac{\Gamma(n,x)}{\Gamma(n)}e^x$$

であるから

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s\,!}=\frac{\Gamma\{n,x(2r-1)\}}{\Gamma(n)}e^{x(2r-1)}$$

これを上式に代入すると

$$\zeta(n)=\frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma\{n,x(2r-1)\}}{\Gamma(n)(2r-1)^n}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

そして自然数 n を実数 p に拡張し階乗をガンマ関数に置換して与式を得る。

同様にして、公式2·3·1' (2·3) から次の公式を得る。

公式5･3･1’

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, … をベルヌイ数とし、p を $p\neq 1,0,-1,-2,\cdots$ なる複素数とし、$\Gamma(p,x)=\int_x^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$ を不完全ガンマ関数とするとき、複素数 $x=u+vi$ $s.t.$ $0<|x|\leqq\pi$, $u\geqq 0$ について次式が成立する。

$$\zeta(p)=\frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{x^{p-1}}{2\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}-\log\frac{x}{2}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma\{p-1,x(2r-1)\}}{\Gamma(p-1)(2r-1)^p}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-p}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

特に $x=1,2$ のとき

$$\zeta(p)=\frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{1}{2\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}+\log 2\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p-1,2r-1)}{\Gamma(p-1)(2r-1)^p}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-p}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

$$\zeta(p)=\frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{2^{p-2}}{(p-1)\Gamma(p)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p-1,4r-2)}{\Gamma(p-1)(2r-1)^p}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-p}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}2^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

例 $\zeta(i)$

$x=2$ の公式に従いこの計算を行った。級数を18項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

```
m = 18 ;
z[p_] := 2^p/(2^p - 1) ( 2^(p-2)/((p - 1) Gamma[p]) + Sum[Gamma[p - 1, 4 r - 2]/(Gamma[p - 1] (2 r - 1)^p), {r, 1, m}]
    + 1/2 Sum[Binomial[1 - p, 2 r] ((2^(2 r) - 2) BernoulliB[2 r] 2^(p-1+2 r))/(2 r Gamma[p + 2 r]), {r, 1, m}] )

N[z[i], 10]
0.0033002237 - 0.4181554491i

N[Zeta[i], 10]
0.0033002237 - 0.4181554491i
```

2012.04.10

K. Kono

宇宙人の数学