6　ゼータ関数のグローバル定義と諸係数の一般化

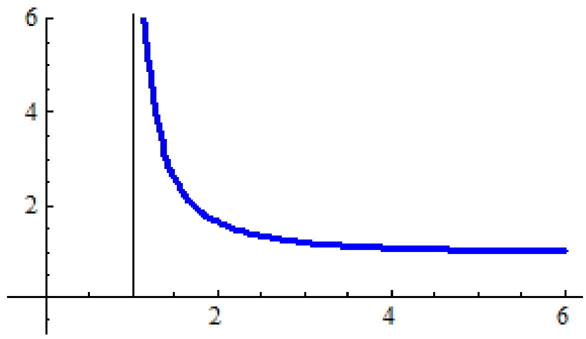
6･1　ゼータ関数のツギハギ定義

リーマン･ゼータ関数の定義の歴史を振り返って見る。

6･1･1　オイラーによる定義

ゼータ関数のそもそもの定義は次のようであった。

$$\zeta(p) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \qquad p>1 \tag{1.1}$$



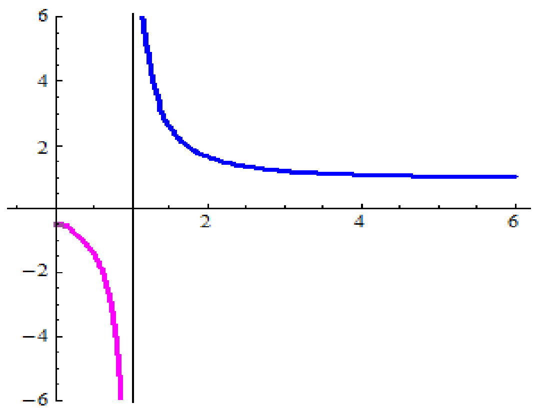
右辺の級数は一般化された調和級数で、p - 級数と呼ばれているらしい。オイラーはこの式を基に、次のような偶数ゼータを得た。

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

しかしこの関数は $p \leqq 1$ においては発散する。従って $\zeta(1/2)$ 等は考えることができなかった。

そこでオイラーは次の式を導出した。

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}}\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} +- \cdots\right) \qquad p \geqq 0,\ p \neq 1 \tag{1.2}$$



この括弧内の級数はディリクレ･イータと呼ばれている。この式を用いればゼータ関数はガウスの半平面上で定義出来る。なお、$p>1$ の部分は (1.1) でも良い。

周知のようにこれは次のように導出された。

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots = \frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+-\cdots + 2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\cdots\right)$$
$$= \frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+-\cdots + \frac{2}{2^p}\left(\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\right)$$

より

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots = \frac{1}{1-2^{1-p}}\left(\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+-\cdots\right)$$

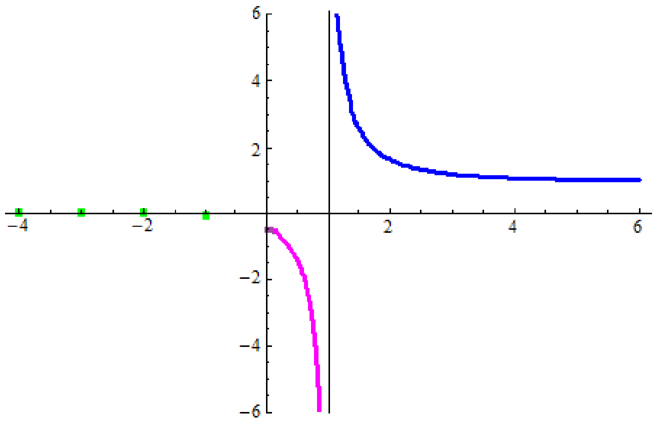
これは実に不思議な等式である。$0 \leqq p < 1$ のとき、左辺は発散級数なのに右辺は収束級数である。オイラーはこれに $p=0$ を代入すると言う危険な計算をして次の奇妙な結果を得た。

$$\zeta(0) = \text{"}1+1+1+1+\cdots\text{"} = -\frac{1}{2}$$

オイラーはさらに次のような関係式を発見した。

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad n=1,2,3,4,\cdots \tag{1.3}$$

但し B_n はベルヌイ数で、$\begin{cases} B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ \cdots \\ B_1=-1/2,\ B_3=B_5=B_7\ \cdots=0 \end{cases}$



これも不思議な関係式である。左辺は∞であるはずなのに右辺は正または負の有理数である。

$$\zeta(-1) = \text{"}1+2+3+4+\cdots\text{"} = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(-2) = \text{"}1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\text{"} = 0$$

$$\zeta(-3) = \text{"}1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\text{"} = \frac{1}{120}$$

$$\zeta(-4) = \text{"}1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots\text{"} = 0$$

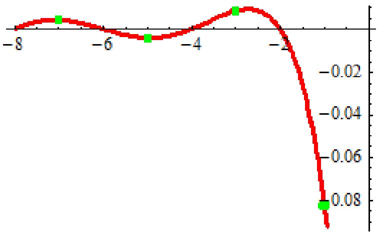
$$\vdots$$

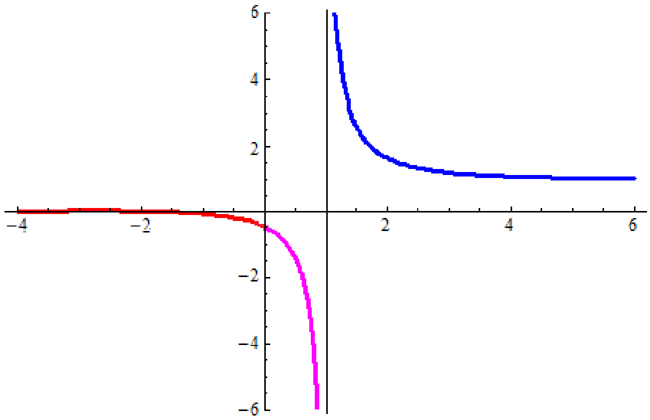
ここで $p=-2,-4,-6,\cdots$ はゼータ関数の自明な零点と呼ばれている。なお、(1.3) はオイラー・マクローリンの和公式からも得られる。(「５ 一般ベルヌイ多項式と一般ベルヌイ数 」参照。)

6･1･2 リーマンの関数等式

リーマンは次なる関数等式を発見した。

$$\zeta(p) = \frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\zeta(1-p) \qquad p \neq 0,1 \tag{1.3'}$$





この等式は $p=0,1$ 意外の全複素域で成立するが、これを $p<0$ に適用すれば (1.3) の点を滑らかに繋ぐことができる。その際、右辺の $\zeta(1-p)$ は (1.2) でなければならない。この式により次のような計算が可能になった。

$$\zeta(-1/2) = \text{"}\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots\text{"} = -0.2078862\cdots$$

6･1･3 ゼータ関数のツギハギ定義

かくして以上の諸式をもちいて、複素平面上でゼータ関数を定義すれば、次のようになる。

$$\zeta(p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^p} & Re(p) > 1 \\ \displaystyle\frac{1}{1-2^{1-p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^p} & 0 \leqq Re(p) \leqq 1 \\ & p \neq 1 \\ \displaystyle\frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{1}{1-2^p} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{1-p}} & Re(p) \leqq 0 \\ & p \neq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

あるいは

$$\zeta(p) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{1-2^{1-p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^p} & Re(p) \geqq 0 \\ & p \neq 1 \\ \displaystyle\frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{1}{1-2^p} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{1-p}} & Re(p) \leqq 0 \\ & p \neq 0 \end{cases} \tag{1.4'}$$

数式処理ソフトは苦も無く上のようなグラフを描く。それはそのソフトが (1.4) や (1.4') のような機能を実装しているからである。実際、本節のグラフは (1.4) によって描かれている。(1.1) や (1.2) だけでは決してこのようなグラフは描けない。

また、定義式 (1.1) に基づいて $\zeta(p)$ の零点を見出すことはできない。この式で定義される平面上には零点が存在しないからである。

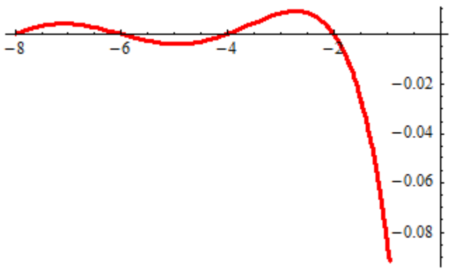
ディリクレ級数と関数等式によるゼータ関数の定義はかくも難解である。ところが2重級数を用いるとゼータ関数を非常にシンプルに定義できる。その上、その2重級数はベルヌイ数やオイラー数やタンジェント数等々を一般化することができる。次節以下それを述べる。

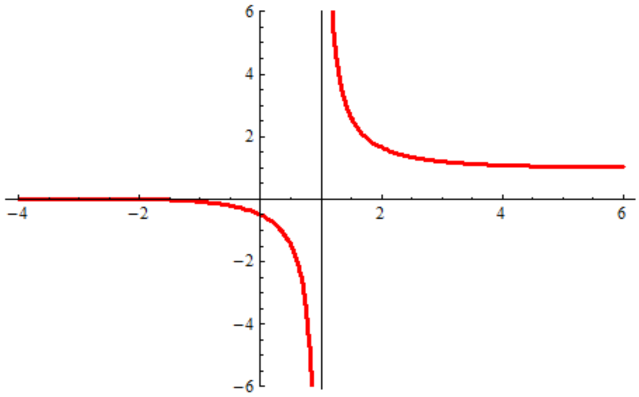
6・2　ゼータ関数のグローバル定義

6・2・1　ゼータ関数のグローバル定義

定義6・2・1
　複素平面上のリーマン・ゼータ関数を次のように定義する。

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^{-p} \qquad p \neq 1 \tag{2.4p}$$





　この式が $p=1$ を除く全複素平面上で成立することは1930年頃 Hasse によって証明されているそうであるが、念のため実例で確かめる。

例1　$\zeta(-6) \sim \zeta(-1)$

```
Table[z[p], {p, -6, -1}]
```

$\left\{0,\ -\frac{1}{252},\ 0,\ \frac{1}{120},\ 0,\ -\frac{1}{12}\right\}$

例2　$\zeta(-1/2), \zeta(0), \zeta(3)$

```
N[{z[-1/2], z[0], z[3]}]
```

{-0.207886 , -0.5 , 1.20206 }

例3　非自明な零点

```
SetPrecision[z[1/2 + 14.1347251417346937904572519 8 i], 10]
```

$0.\times 10^{-35} + 0.\times 10^{-35}\ i$

6・2・2　定義の導出
　次節のために必要なので、Sugimoto氏 にならって定義の導出を行う。

(1) 基本となる数列
　m,n を自然数とするとき、次式が成立する。(「 7 冪乗和の新公式 」 参照。)

$$m^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nB_r\ {}_mC_r$$

ここで

$${}_nB_r = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} s^n \qquad r=0,1,2,\cdots,n \tag{2.0}$$

これは次の値を生み出す。

$n\backslash r$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1:	1	0	0	0	0	$\cdots$
2:	1	2	0	0	0	$\cdots$
3:	1	6	6	0	0	$\cdots$
4:	1	14	36	24	0	$\cdots$
5:	1	30	150	240	120	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$					

ここで注目すべきは $r>n$ については全ての値が0となっていることである。これは一般二項係数に起因する性質で、これにより我々はいつでもΣの上限rを∞に置換してnを実数化できる。この好ましい性質は以降ずっと保持される。

リーマン・ゼータ関数を得るためには交代数列が必要なので、(2.0) を次のように変形する。

$$ {}_nB_r = \sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^n \qquad r=1,2,3,\cdots,n \tag{2.1}$$

$n\backslash r$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1:	1	0	0	0	0	$\cdots$
2:	1	-2	0	0	0	$\cdots$
3:	1	-6	6	0	0	$\cdots$
4:	1	-14	36	-24	0	$\cdots$
5:	1	-30	150	-240	120	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$					

(2) タンジェント数

この (2.1) に2^{n-r}を乗じて合算すればタンジェント数が得られる。即ち、

$$T_n = \sum_{r=1}^{n}2^{n-r}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^n \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{2.2n}$$

$n\backslash r$	1	2	3	4	5	$\cdots$	Total
1:	$1\cdot 2^0$	0	0	0	0	$\cdots$	1
2:	$1\cdot 2^1$	$-2\cdot 2^0$	0	0	0	$\cdots$	0
3:	$1\cdot 2^2$	$-6\cdot 2^1$	$6\cdot 2^0$	0	0	$\cdots$	-2
4:	$1\cdot 2^3$	$-14\cdot 2^2$	$36\cdot 2^1$	$-24\cdot 2^0$	0	$\cdots$	0
5:	$1\cdot 2^4$	$-30\cdot 2^3$	$150\cdot 2^2$	$-240\cdot 2^1$	$120\cdot 2^0$	$\cdots$	16
$\vdots$	$\vdots$						

なお、本来のタンジェント数は非負の整数であるが、本章では符号のついたものもタンジェント数

と呼ぶ。T_{2n-1} と本来のタンジェント数 T^*_{2n-1} との間には次なる関係がある。

$$T^*_{2n-1} = (-1)^{n-1} T_{2n-1} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

(3) ベルヌイ数

そして (2.2n) に $\dfrac{n+1}{2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)}$ を乗じればベルヌイ数 B_{n+1} が得られる。

$$B_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)} T_n = \frac{n+1}{2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)} \sum_{r=1}^{n} 2^{n-r} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^n$$

i.e.

$$B_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^n \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (2.3_{n1})$$

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
T_n	1	0	2	0	16	0	272	$\cdots$
B_{n+1}	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	$\cdots$

(4) リーマン・ゼータ関数

最後に (2.3_{n1}) を周知の

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

に代入すれば、負整数のゼータ公式が得られる。

$$\zeta(-n) = \frac{1}{1-2^{n+1}} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^n \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (2.4_{-n})$$

$r > n$ については全ての値が0であるから、Σの上限 r を ∞ に置換し、自然数 n を複素数 p にまで拡張できる。

$$\zeta(-p) = \frac{1}{1-2^{1+p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^p \qquad p \neq -1 \qquad (2.4_{-p})$$

p は複素数であるから符号を反転することができる。

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^{-p} \qquad p \neq 1 \qquad (2.4_{p})$$

6・3 諸係数の一般化

6・3・1 第2種一般スターリング数

前節の (2.1) を $r!$ で除せば第2種スターリング数が得られる。即ち

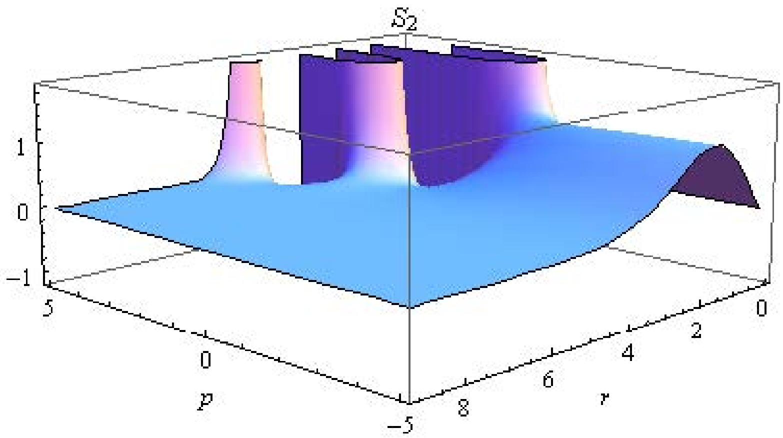
$$S_2(n,r) = \frac{1}{r!}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^n \qquad r=1,2,3,\cdots,n$$

$n\backslash r$	1	2	3	4	5 ⋯
1:	1	0	0	0	0 ⋯
2:	1	-1	0	0	0 ⋯
3:	1	-3	2	0	0 ⋯
4:	1	-7	6	-1	0 ⋯
5:	1	-15	25	-10	1 ⋯
⋮	⋮				

$r>n$ については全ての値が0であるから、Σ の上限 r を ∞ に置換できる。すると n は最早自然数である必要はないからよりグローバルな数に拡張できる。

定義6・3・1 （第2種一般スターリング数）

$$S_2(p,r) = \frac{1}{r!}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^p \qquad r=1,2,3,\cdots \qquad (3.1)$$



例 $S_2(3,1)\sim S_2(3,5)$ 及び $S_2(3.01,1)\sim S_2(3.01,5)$

```
Table[S2[3, r], {r, 1, 5}]
{1, -3, 1, 0, 0}
Table[S2[3.01, r], {r, 1, 5}]
{1., -3.02782 , 1.02189 , -0.00142627 , -0.00010664 }
```

本来のスターリング数は非負の整数であるが、本章では符号のついたものもスターリング数と呼ぶ。$S_2(p,r)$ と本来のスターリング数 $S_2^*(p,r)$ との間には次なる関係がある。

$$S_2^*(p,r) = (-1)^{r+1} S_2(p,r) \qquad r=0,1,2,\cdots \tag{3.1'}$$

自然数 n については

$$S_2^*(n,2) = 2^{n-1} - 1 \ , \ S_2^*(n,3) = \frac{1}{6}\left(3^n - 3\cdot 2^n + 3\right)$$

が知られているが、(3.1') は複素数 p についても次式を満足する。。

$$S_2^*(p,2) = 2^{p-1} - 1 \ , \ S_2^*(p,3) = \frac{1}{6}\left(3^p - 3\cdot 2^p + 3\right)$$

例　$S_2^*(1+i,2)$ 及び $S_2^*(1+i,3)$

```
N[{S2x[1 + i, 2]        ,  2^(1+i-1) - 1}]
{-0.230761 + 0.638961 i  , -0.230761 + 0.638961 i }
N[{S2x[1 + i, 3]          , (3^(1+i) - 3 × 2^(1+i) + 3) / 6}]
{-0.0418227 - 0.193673 i  , -0.0418227 - 0.193673 i }
```

6·3·2　一般タンジェント数

前節 (2.2n) より

$$T_n = \sum_{r=1}^{n} 2^{n-r} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

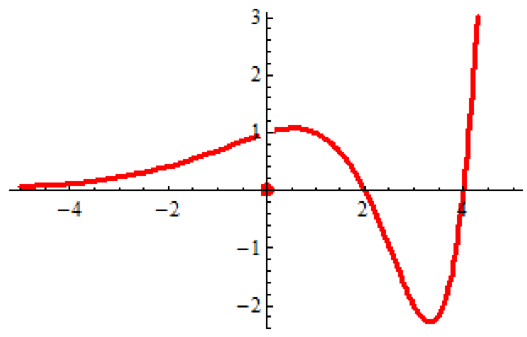
$r > n$ については全ての値が0であるから、Σの上限 r を ∞ に置換し、同時に、自然数 n を複素数 p まで拡張できる。

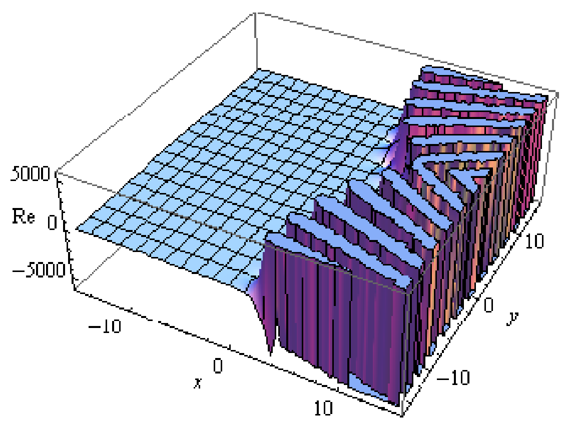
$$T_p = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{p-r} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^p \qquad p \neq 0 \tag{3.2}$$

これに $p=0$ の点を加えて次のように定義する。

定義6·3·2(一般タンジェント数)

$$T_p = \begin{cases} 0 & p=0 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} 2^{p-r} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^p & p \neq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$





例1　$T_1 \sim T_5$ 及び $T_{1.01} \sim T_{5.01}$

```
Table[t[p], {p, 1, 5}]
{1, 0, -2, 0, 16}

Table[t[p], {p, 1.01, 5.01}]
{0.996272 , -0.0171201 , -2.01559 , 0.0800307 , 16.1997 }
```

例2　一般タンジェント数の非自明な零点

```
SetPrecision[t[-1 / 2 + 14.134725141734693790457251983 i], 10]
0. ×10^-35 + 0. ×10^-35 i
```

6·3·3　一般ベルヌイ数

前節 (2.3_{n1}) より

$$B_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$r>n$ については全ての値が0であるから、Σの上限 r を ∞ に置換し、自然数 n を複素数 p にまで拡張できる。

$$B_{p+1} = \frac{p+1}{2^{p+1}\left(2^{p+1}-1\right)}\sum_{r=1}^{\infty}2^{p-r}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^p \qquad p \ne -1$$

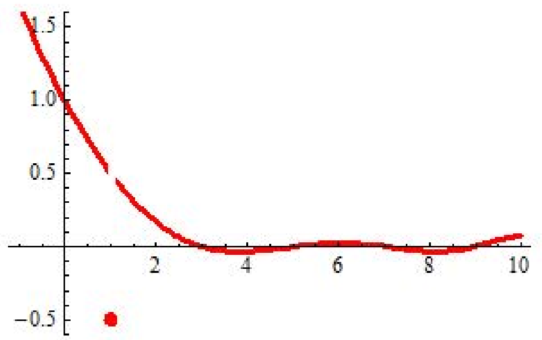
p を $p-1$ に置換して

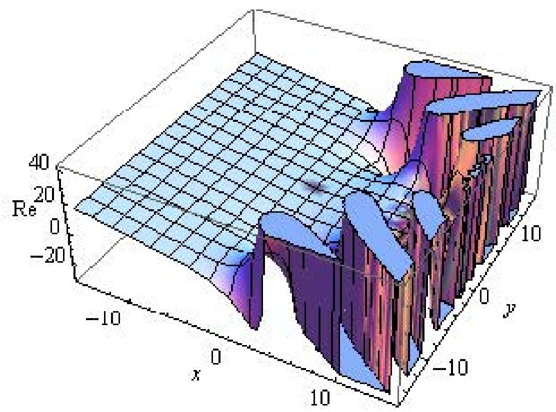
$$B_p = \frac{p}{2^p-1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{p-1} \qquad p \ne 1 \qquad (3.3_p)$$

これに $p=0,1$ の2点を加えて次のように定義する。

定義6·3·3（一般ベルヌイ数）

$$B_p = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & p=1 \\[2ex] \dfrac{p}{2^p-1}\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{p-1} & p \ne 1 \end{cases} \qquad (3.3)$$





例1 $\boldsymbol{B_2} \sim \boldsymbol{B_6}$ 及び $\boldsymbol{B_{2.01}} \sim \boldsymbol{B_{6.01}}$

```
Table[b[p],{p,2,6}]    Table[b[p], {p, 2.01, 6.01}]
```

$\left\{\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}\right\}$ {0.1642, -0.000906643, -0.0331981, 0.000398534, 0.0238119}

例2 $\boldsymbol{B_{-4.0}} \sim \boldsymbol{B_{-4.9}}$

```
Table[SetPrecision[b[p], 11], {p, -4.0, -4.9, -0.1}]
```

{4.1477110206, 4.2401604462, 4.3329714820, 4.4261284844, 4.5196163712, 4.6134206098, 4.7075272044, 4.8019226839, 4.8965940883, 4.9915289558}

例3 一般ベルヌイ数の非自明な零点

```
SetPrecision[b[1 / 2 + 14.1347251417346937904572519 8 i], 10]
```

$0. \times 10^{-34} + 0. \times 10^{-34}\, i$

cf.

例2の数値は「 5 一般ベルヌイ多項式と一般ベルヌイ数 」の5･2の表とぴったり一致している。

関数等式

次なる関数等式が成立する。

$$B_{1-p} = \frac{1-p}{p}\,\frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}}\sin\frac{p\pi}{2}\cdot B_p \qquad p \neq 0, 1, 2, 3, \cdots$$

6･3･4 諸係数によるゼータ関数の表記

これらの諸係数を用いれば、リーマン･ゼータ関数は以下のように表記できる。

公式6･3･4

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r!}{2^{r+1}}S_2(-p,r) \tag{3.4}$$

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}}\,\frac{T_{-p}}{2^{1-p}} \qquad p \neq 1 \tag{3.5}$$

$$\zeta(p) = -\frac{B_{1-p}}{1-p} \qquad p \neq 1 \tag{3.6}$$

6･4　ディリクレ･イータ関数

前節までを振り返ってみると、全ての係数の素は次の級数であった。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{-p}$$

ここで $\zeta(p)$ のグロオーバル定義 と $\eta(p)$ に関する式

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{-p} \qquad p\neq 1$$

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}}\eta(p)$$

を比較すれば、直ちに次のことに気付く。

6･4･1　ディリクレ･イータ関数のグローバル定義

定義6･4･1

複素平面上のディリクレ･イータ関数を次のように定義する。

$$\eta(p) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{-p} \tag{4.1}$$

この定義は半平面においては $\eta(p)$ の通常の定義に帰着する。このことを示すには少し準備が必要である。

Lemma

$$\sum_{r=s}^{\infty}\frac{{}_rC_s}{2^r} = 2 \qquad for\ \ s=1,2,3,\cdots$$

証明

$$\frac{{}_1C_1}{2^1}+\frac{{}_2C_1}{2^2}+\frac{{}_3C_1}{2^3}+\frac{{}_4C_1}{2^4}+\cdots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{{}_0C_0}{2^1}+\frac{{}_1C_0}{2^2}+\frac{{}_2C_0}{2^3}+\frac{{}_3C_0}{2^4}+\cdots & &= \frac{1}{2^1}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\\
&\qquad +\frac{{}_0C_0}{2^2}+\frac{{}_1C_0}{2^3}+\frac{{}_2C_0}{2^4}+\cdots & &\quad +\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{{}_0C_0}{2^3}+\frac{{}_1C_0}{2^4}+\frac{{}_2C_0}{2^5}+\cdots & &\quad +\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\\
&\qquad\qquad\vdots & &\qquad\vdots
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\cdot 2$$

$$= \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\cdots = 2$$

次に

$$\frac{{}_2C_2}{2^2}+\frac{{}_3C_2}{2^3}+\frac{{}_4C_2}{2^4}+\frac{{}_5C_2}{2^5}+\cdots$$

$$=\frac{{}_1C_1}{2^2}+\frac{{}_2C_1}{2^3}+\frac{{}_3C_1}{2^4}+\frac{{}_4C_1}{2^5}+\cdots$$

$$+\frac{{}_1C_1}{2^3}+\frac{{}_2C_1}{2^4}+\frac{{}_3C_1}{2^5}+\cdots$$

$$+\frac{{}_1C_1}{2^4}+\frac{{}_2C_1}{2^5}+\frac{{}_3C_1}{2^6}+\cdots$$

$$\vdots$$

ここで

$$\frac{{}_1C_1}{2^2}+\frac{{}_2C_1}{2^3}+\frac{{}_3C_1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2^1}\left(\frac{{}_1C_1}{2^1}+\frac{{}_2C_1}{2^2}+\frac{{}_3C_1}{2^3}+\cdots\right)=\frac{2}{2^1}=\frac{1}{2^0}$$

$$\frac{{}_1C_1}{2^3}+\frac{{}_2C_1}{2^4}+\frac{{}_3C_1}{2^5}+\cdots=\frac{1}{2^2}\left(\frac{{}_1C_1}{2^1}+\frac{{}_2C_1}{2^2}+\frac{{}_3C_1}{2^3}+\cdots\right)=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2^1}$$

$$\frac{{}_1C_1}{2^4}+\frac{{}_2C_1}{2^5}+\frac{{}_3C_1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{2^3}\left(\frac{{}_1C_1}{2^1}+\frac{{}_2C_1}{2^2}+\frac{{}_3C_1}{2^3}+\cdots\right)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{2^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

であるから

$$\frac{{}_2C_2}{2^2}+\frac{{}_3C_2}{2^3}+\frac{{}_4C_2}{2^4}+\frac{{}_5C_2}{2^5}+\cdots=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}=2$$

次に

$$\frac{{}_3C_3}{2^3}+\frac{{}_4C_3}{2^4}+\frac{{}_5C_3}{2^5}+\frac{{}_6C_3}{2^6}+\cdots$$

$$=\frac{{}_2C_2}{2^3}+\frac{{}_3C_2}{2^4}+\frac{{}_4C_2}{2^5}+\frac{{}_5C_2}{2^6}+\cdots$$

$$+\frac{{}_2C_2}{2^4}+\frac{{}_3C_2}{2^5}+\frac{{}_4C_2}{2^6}+\cdots$$

$$+\frac{{}_2C_2}{2^5}+\frac{{}_3C_2}{2^6}+\frac{{}_4C_2}{2^7}+\cdots$$

$$+\frac{{}_2C_2}{2^6}+\frac{{}_3C_2}{2^7}+\frac{{}_4C_2}{2^8}+\cdots$$

$$\vdots$$

ここで

$$\frac{{}_2C_2}{2^3}+\frac{{}_3C_2}{2^4}+\frac{{}_4C_2}{2^5}+\cdots=\frac{1}{2^1}\left(\frac{{}_2C_2}{2^2}+\frac{{}_3C_2}{2^3}+\frac{{}_4C_2}{2^4}+\cdots\right)=\frac{2}{2^1}=\frac{1}{2^0}$$

$$\frac{{}_2C_2}{2^4}+\frac{{}_3C_2}{2^5}+\frac{{}_4C_2}{2^6}+\cdots = \frac{1}{2^2}\left(\frac{{}_2C_2}{2^2}+\frac{{}_3C_2}{2^3}+\frac{{}_4C_2}{2^4}+\cdots\right) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{{}_2C_2}{2^5}+\frac{{}_3C_2}{2^6}+\frac{{}_4C_2}{2^7}+\cdots = \frac{1}{2^3}\left(\frac{{}_2C_2}{2^2}+\frac{{}_3C_2}{2^3}+\frac{{}_4C_2}{2^4}+\cdots\right) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{2^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

であるから

$$\frac{{}_3C_3}{2^3}+\frac{{}_4C_3}{2^4}+\frac{{}_5C_3}{2^5}+\frac{{}_6C_3}{2^6}+\cdots = \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3} = 2$$

以下、帰納法により与式を得る。

定理6・4・2

$\eta(p)$ をディリクレ・イータ関数とするとき、$Re(p) \geqq 0$ ならば次式が成立する。

$$\eta(p) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{-p} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^p}$$

証明

$$\eta(p) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}s^{-p}$$

$$= \frac{1}{2^2}\left\{\binom{1}{1}1^{-p}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2^3}\left\{\binom{2}{1}1^{-p}-\binom{2}{2}2^{-p}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2^4}\left\{\binom{3}{1}1^{-p}-\binom{3}{2}2^{-p}+\binom{3}{3}3^{-p}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2^5}\left\{\binom{4}{1}1^{-p}-\binom{4}{2}2^{-p}+\binom{4}{3}3^{-p}-\binom{4}{4}4^{-p}\right\}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1^{-p}}{2}\left\{\frac{1}{2^1}\binom{1}{1}+\frac{1}{2^2}\binom{2}{1}+\frac{1}{2^3}\binom{3}{1}+\frac{1}{2^4}\binom{4}{1}+\cdots\right\}$$

$$- \frac{2^{-p}}{2}\left\{\frac{1}{2^2}\binom{2}{2}+\frac{1}{2^3}\binom{3}{2}+\frac{1}{2^4}\binom{4}{2}+\frac{1}{2^5}\binom{5}{2}+\cdots\right\}$$

$$+ \frac{3^{-p}}{2}\left\{\frac{1}{2^3}\binom{3}{3}+\frac{1}{2^4}\binom{4}{3}+\frac{1}{2^5}\binom{5}{3}+\frac{1}{2^6}\binom{6}{3}+\cdots\right\}$$

$$- \frac{4^{-p}}{2}\left\{\frac{1}{2^4}\binom{4}{4}+\frac{1}{2^5}\binom{5}{4}+\frac{1}{2^6}\binom{6}{4}+\frac{1}{2^7}\binom{7}{4}+\cdots\right\}$$

$\vdots$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{s^{-p}}{2} \sum_{r=s}^{\infty} \frac{1}{2^r} \binom{r}{s}$$ （交代数列の順序は不変）

上記 *Lemma* により

$$\sum_{r=s}^{\infty} \frac{{}_rC_s}{2^r} = 2 \quad for\ s=1,2,3,\cdots$$

であるから、これを用いて

$$\eta(p) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} s^{-p}$$

$p=0$ のとき、

$$\eta(0) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} s^{-0} = 1 - 1 + 1 - 1 +-\cdots = \frac{1}{2}$$

$Re(p)>0$ のとき、$p=x+iy$ と置けば

$$\eta(x+iy) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} s^{-x-iy} \qquad x>0$$

指数関数で表せば

$$\eta(x+iy) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-x\log s - iy\log s}$$

三角関数で書けば

$$\eta(x+iy) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-x\log s}\{\cos(y\log s) - i\sin(y\log s)\}$$

自然数 s と実数 y について

$$0 < |\cos(y\log s) - i\sin(y\log s)| < 2$$

よってこの級数は $x<0$ のとき発散し、$x>0$ のとき収束する。　　Q. E. D.

6·4·3 諸係数によるイータ関数の表記

前節の諸係数を用いれば、ディリクレ・イータ関数は以下のように表記できる。

公式6·4·3

$$\eta(p) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r!}{2^{r+1}} S_2(-p,r) \tag{4.2}$$

$$\eta(p) = \frac{T_{-p}}{2^{1-p}} \tag{4.3}$$

$$\eta(p) = -\left(1-2^{1-p}\right)\cdot\frac{B_{1-p}}{1-p} \qquad p\neq 1 \tag{4.4}$$

2013.01.05

K. Kono