8　完備化されたリーマン・ゼータの因数分解

8・1　ξ(z) のアダマール積表示

公式 8・1・1　(ξ(z) のアダマール積表示)
　完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{1.d}$$

$\zeta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ 、γ をオイラー・マスケロニの定数とするとき、$\xi(z)$ は次のようなアダマール積で表される。

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.0}$$

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

証明
　アダマール積が次のように表せるとする。

$$\xi(z) = A\,e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.p}$$

そして、$A\,,B$ を求める。先ず、

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2}{z}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)$$

であるから、これを (1.d) に代入すれば

$$\xi(z) = -2(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\zeta(z) \tag{1.d'}$$

(1.d') に $z=0$ を代入すれば

$$\xi(0) = -2(1-0)\pi^{-\frac{0}{2}}\Gamma\left(\frac{0}{2}+1\right)\zeta(0) = -2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(1.p) に $z=0$ を代入すれば $\xi(0)=A$ 。よって両者より $A=1$ 。かくして

$$\xi(z) = e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.p'}$$

　次に、(1.d') と (1.p') より

$$-2(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\zeta(z) = e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

これより、

$$\zeta(z) = -\frac{\pi^{\frac{z}{2}} e^{Bz}}{2(1-z)\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

両辺の対数を取ると

$$\log\zeta(z) = \frac{z}{2}\log\pi + Bz - \log 2 - \log(z-1) - \log\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) + \log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

ここで

$$\log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z_k}$$

であるから

$$\log\zeta(z) = \frac{z}{2}\log\pi + Bz - \log 2 - \log(z-1) - \log\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z_k}$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\log\pi}{2} + B - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(z/2+1)}{\Gamma(z/2+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{z_k}}{1-\frac{z}{z_k}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k}$$

i.e.

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\log\pi}{2} + B - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(z/2+1)}{\Gamma(z/2+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k}\right)$$

ここで $z \to 0$ とすると、

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \frac{\log\pi}{2} + B + 1 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

となるが、$\zeta(z)$ 及び $\Gamma(z)$ については次の特殊値が知られている。

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \ , \ \zeta'(0) = -\frac{\log 2\pi}{2} \ , \ \Gamma(1) = 1 \ , \ \Gamma'(1) = -\gamma$$

そこで、これらを両辺に代入すれば、

$$\log 2\pi = \frac{\log\pi}{2} + B + 1 + \frac{\gamma}{2}$$

これより

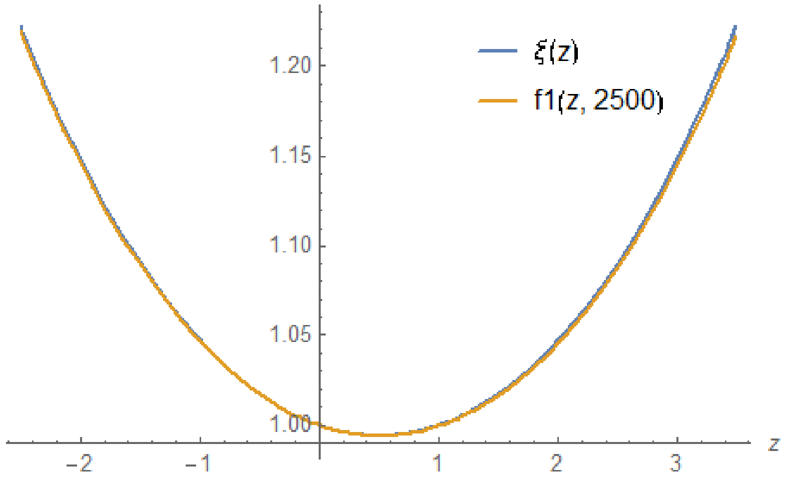
$$B = \log 2 + \frac{\log\pi}{2} - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

これを (1.p') に代入して (1.0) を得る。 Q.E.D.

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ ならば (1.1) は

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2 + \frac{\log\pi}{2} - 1 - \frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_n^2}+\frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_n^2}} \qquad (1.1')$$

実数部が $1/2$ である零点を生成する一般式は知られていないが、*Mathematica* はこれを数値的に生成する関数 $y_n = Im[ZetaZero[n]]$ を持っている。この非自明零点 2500 個を使って (1.1') の両辺をそれぞれ計算し重ねて描けば次のようになる。



(1.1) の特殊値として、次節で用いられる重要な公式が得られる。

公式 8·1·2 (特殊値)

リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}} = e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}} = 1.02336448\cdots \tag{1.2}$$

証明

(1.1) に $z=1$ を与えれば、

$$\xi(1) = e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}} = 1 \tag{1.1$_1$}$$

これより

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}} = e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}} \quad \left(=1.02336448\cdots\right) \tag{1.2}$$

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ 、ならば (1.2) は

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2\cdot 1/2-1}{(1/2)^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2\cdot 1/2}{(1/2)^2+y_r^2}} = e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}} = e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}}$$

これより

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_n^2} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots \tag{1.2'}$$

(1.0) の特殊値として、次の公式が得られる。

公式 8·1·3 (特殊値)

リーマン·ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}=\frac{\pi}{3} \tag{1.3}$$

証明

(1.0) に $z=-1,1$ をそれぞれ与えれば

$$e^{-\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)e^{-\frac{1}{z_k}}=\xi(-1)=\frac{\pi}{3}$$

$$e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)e^{\frac{1}{z_k}}=\xi(1)=1$$

両辺掛け合わせて

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$z_k=x_k\pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)$$

これらより、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}$$

よって

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}=\frac{\pi}{3} \tag{1.3}$$

試みに、既知の非自明零点 20000 個を使って (1.3) の両辺を計算したところ、小数点以下3桁まで一致した。

```
zo[n_] := ZetaZero[n]        zc[n_] := Conjugate[zo[n]]
```

$$gl[m\_] := \prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{zo_n^{\,2}}\right)\left(1-\frac{1}{zc_n^{\,2}}\right) \qquad gr := \frac{\pi}{3}$$

```
N[gl[20 000]]                N[gr]
1.04703 + 0. i               1.0472
```

8・2 実数部が 1/2 でない非自明零点

「 7 完備化されたリーマン・ゼータ 」定理 7・4・1 によれば、もしリーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ が 実数部が $1/2$ でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成らねばならない。

$$1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \ , \ 1/2-\alpha_s \pm i\beta_s \qquad (0<\alpha_s<1/2)$$

本節では、実数部が $1/2$ である非自明な零点と実数部が $1/2$ でない非自明零点が混在する場合、前節の諸式がどのように表されるか考察する。

Lemma 8・2・1

γ をオイラー・マスケロ二の定数、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ これらのうち実数部が $1/2$ であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が $1/2$ でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \ (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、公式 8・1・1 (1.1) は次のように表される。

$$\begin{aligned}\xi(z) &= e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}} \\ &\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}} \\ &\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}} \qquad (2.1)\end{aligned}$$

証明

公式 8・1・1 (1.1) は次のようであった。

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \qquad (1.1)$$

実数部が $1/2$ である非自明な零点 $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ に関しては、右辺の一部は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$

他方、実数部が $1/2$ でない非自明な零点 $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \ (0<\alpha_s<1/2)$ に関しては、右辺の一部は次のように表される。

$$\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

$$\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

これらの積を取って与式を得る。

定理 8･2･2

γ をオイラー･マスケロ二の定数、リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$
これらのうち実数部が $1/2$ であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が $1/2$ でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \ (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}=0.0230957\cdots \tag{2.4}$$

証明

公式 8･1･1 (1.1) に $z=1$ を代入すれば

$$\xi(1)=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=1 \tag{1.1$_1$}$$

Lemma 8･2･1 (2.1) に $z=1$ を代入すれば

$$\xi(1)=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{s=1}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$\times e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}} \tag{2.1$_1$}$$

これらより、

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=\prod_{s=1}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

ここで都合の良いことに、

$$\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$=1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$=1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$=1$$

となるから

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} \tag{2.3}$$

そして (1.1_1) と (2.2) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}=0.0230957\cdots \tag{2.4}$$

話が少しわき道に逸れるが、定理の (2.2) を用いて、次の特殊値が得られる。

公式 8•2•3 (特殊値)

リーマン•ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n\quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=1 \tag{2.5+}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\frac{\pi}{3} \tag{2.5-}$$

証明

前節 公式 8•1•3 の証明 より、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{z+}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2x_n+1}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{z-}$$

$$\frac{\pi}{3}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)\left(1+\frac{1}{z_k}\right) \tag{z0}$$

定理 8•2•2 より

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

これを (z_+) に代入して

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=1 \tag{2.5+}$$

これと (z_-) を順次 (z_0) に代入すれば

$$\frac{\pi}{3}=1\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right) \tag{2.5-}$$

既知の非自明零点を使って (2.5_+), (2.5_-) を計算したところそれぞれ次のようになった。

```
zo[n_] := ZetaZero[n]                                   zc[n_] := Conjugate[zo[n]]
```

$$g_+[m\_] := \prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{zo_n}\right)\left(1-\frac{1}{zc_n}\right) \qquad g_-[m\_] := \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{zo_n}\right)\left(1+\frac{1}{zc_n}\right)$$

```
N[g+[1000]]                 N[g-[20000]]          N[π / 3]
1. + 0. i                   1.04703 + 0. i        1.0472
```

さて、本題に戻ろう。定理 8･2･2 を用いて、非常に重要な次の定理が得られる。

定理 8･2･4

γ をオイラー･マスケロニの定数、リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を x_n+iy_n　$n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が 1/2 でない非自明零点は存在しない。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots \tag{1.2'}$$

証明

非自明零点 $1/2\pm iy_r$　$r=1,2,3,\cdots$ は現存するが、この他に $1/2+\alpha_s\pm i\beta_s$, $1/2-\alpha_s\pm i\beta_s$ $(0<\alpha_s<1/2)$ なる非自明零点が存在すると仮定する。すると 定理 8･2･2 (2.3), (2.4) より次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

ここで、$0<\alpha_s<1/2$ と任意の実数 β_s に対して

$$\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} = \frac{1/2-2\alpha_s^2+2\beta_s^2}{\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}} > 0$$

よって、

$$\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} > 0 \qquad for\ \ 0<\alpha_s<1/2$$

かくて

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} < 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} \neq 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

以上の対偶命題として、本定理が成立する。

Note

この定理は等式 (1.2') がリーマン仮説と同値であることを示している。しかし(1.2')の証明のためには、非自明零点 $1/2\pm iy_r$　$r=1,2,3,\cdots$ の虚数部 y_r が公式として得られなければならない。

数式処理ソフト *Mathematica* により、既知の非自明零点 200000 個を使って (1.2’) の両辺を計算したところ、両辺は小数点以下4桁まで一致した。

```
y[r_] := Im[ZetaZero[r]]            γ := EulerGamma

gl[m_] := Sum[1/(1/4 + y[r]^2), {r, 1, m}]      gr := 1 + γ/2 - Log[2] - Log[π]/2

N[gl[200000]]                       N[gr]
0.0230832                           0.0230957
```

8·3 ξ(z) の因数分解

公式 8·1·1（ξ(z) のアダマール積表示）は完備化されたゼータ関数 $\xi(z)$ がその非自明な零点で不完全に因数分解されたものである。ところが、定理 8·2·2 を用いれば補正項が消滅し、$\xi(z)$ がその非自明な零点で完全に因数分解される。

定理 8·3·1 （ξ(z) の因数分解）

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$、その非自明零点を $z_n = x_n \pm i y_n \quad n=1,2,3,\cdots$、そして完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、$\xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

証明

公式 8·1·1 (1.1) より

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)\cdot e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

他方、定理 8·2·2 (2.4) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

これより

$$e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} = e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

これを上の右辺に代入すれば

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)\cdot e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

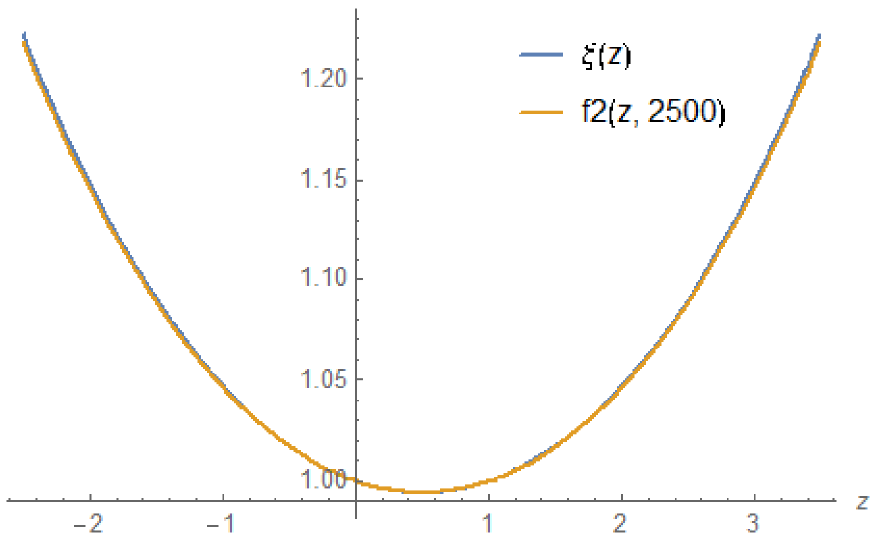
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

なお、本公式は既知である。

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ ならば (3.1) は

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_n^2}+\frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right) \tag{3.1'}$$

既知の非自明零点 2500 個を使って (3.1') の両辺をそれぞれ計算し重ねて描けば次のようになる。これは 公式 8·1·1 の (1.1') の図 と全く同じである。



ξ(z)
f2(z, 2500)
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
−2
−1
1
2
3
z

8·4 $\Xi(z)$ の因数分解

定理 8·3·1 において z を $z+1/2$ で置換すれば、偶関数である完備化されたゼータ関数 $\Xi(z)$ が得られる。

定理 8·4·1 （$\Xi(z)$ の因数分解 ）

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、$\Xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\} \tag{4.1}$$

但し、$\Xi(0) = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$

(4.1$_0$)

証明

定理 8·3·1 より

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

最初の式において z を $1/2+z$ に置換すると、

$$\xi\left(\frac{1}{2}+z\right) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) =: \Xi(z)$$

$z=0$ をこれに代入すれば

$$\Xi(0) = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$$

(3.1) において z を $1/2+z$ に置換すると、

$$\begin{aligned}
\xi\left(\frac{1}{2}+z\right) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}\left(\frac{1}{2}+z\right)+\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\left(\frac{1}{2}+z\right)^2\right\} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{x_n}{x_n^2+y_n^2}+\frac{1/4}{x_n^2+y_n^2}-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right\} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{x_n^2-x_n+1/4+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}-\frac{(2x_n-1)z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right\}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\xi\left(\frac{1}{2}+z\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

$\xi(1/2+z)=\Xi(z)$ であるから

$$\Xi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

$z=0$ をこれに代入すれば

$$\Xi(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}$$

これを $\Xi(z)$ の右辺に代入して (4.1) を得る。

Lemma 8･4･2

定理 8･4･1 (4.1) の内、実数部 x_n が $1/2$ である因数の積 $\Xi_h(z)$ は次のように表される。

$$\Xi_h(z)=\Xi_h(0)\prod_{r=1}\left(1+\frac{z^2}{y_r^2}\right) \tag{4.2}$$

$$\text{但し、}\ \Xi_h(0)=\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} \tag{4.2$_0$}$$

証明

定理 8･4･1において x_n の一部を $1/2$ に置換して、直ちに与式を得る。

Note

$\Xi(z)=\Xi_h(z)$ であろう と言うのがリーマン仮説である。

Lemma 8･4･3

定理 8･4･1 (4.1) の内に実数部 x_n が $1/2$ でない因数が存在すると仮定せよ。すると2つの実数を α_s, β_s $\ s.t.\ 0<\alpha_s<1/2\ \&\ |\beta_s|>\sqrt{1/8}$ とするとき、それらの因数の積 $\Xi_\alpha(z)$ は次のように表される。

$$\Xi_\alpha(z)=\Xi_\alpha(0)\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2(\beta_s^2-\alpha_s^2)z^2}{(\alpha_s^2+\beta_s^2)^2}+\frac{z^4}{(\alpha_s^2+\beta_s^2)^2}\right\} \tag{4.3}$$

$$\text{但し、}\ \Xi_\alpha(0)=\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}<1 \tag{4.3$_0$}$$

証明

もしそのような因数の積が存在するならば、「 07 完備化されたリーマン･ゼータ 」定理 7･4･1

によりその1組は次の4個から成らねばならない。

$$1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \quad , \quad 1/2-\alpha_s \pm i\beta_s \qquad (0<\alpha_s<1/2)$$

そこで、定理 8･4･1において $x_n\,,y_n$ の一部を $1/2\pm\alpha_s\,,\beta_s$ にそれぞれ置換すれば、

$$\Xi_\alpha(z)=\Xi_\alpha(0)\prod_{s=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(+\alpha_s)z}{(+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2(-\alpha_s)z}{(-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$=\Xi_s(0)\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{2\alpha_s z}{\alpha_s^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{\alpha_s^2+\beta_s^2}\right)\left(1+\frac{2\alpha_s z}{\alpha_s^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{\alpha_s^2+\beta_s^2}\right)$$

$$=\Xi_s(0)\prod_{s=1}^{\infty}\left\{1+\frac{2\left(\beta_s^2-\alpha_s^2\right)z^2}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}\right\} \tag{4.3}$$

$$\Xi_s(0)=\prod_{s=1}^{\infty}\frac{(+\alpha_s)^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{(-\alpha_s)^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$=\prod_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} \tag{4.3$_0$}$$

最後に、

$$\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}$$

$$=(1/2+\alpha_s)^2(1/2-\alpha_s)^2+(1/2+\alpha_s)^2\beta_s^2+(1/2-\alpha_s)^2\beta_s^2+\beta_s^4$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{\beta_s^2-\alpha_s^2}{2}+2\alpha_s^2\beta_s^2+\alpha_s^4+\beta_s^4$$

i.e.

$$\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}=\frac{1}{16}+\frac{\beta_s^2-\alpha_s^2}{2}+\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2$$

ここで、もし $0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s|>\sqrt{1/8}$ ならば次の不等式が成立する。

$$\beta_s^2>\alpha_s^2-\frac{1}{8}$$

これより

$$\frac{1}{16}+\frac{\beta_s^2-\alpha_s^2}{2}>0$$

従って

$$\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}>\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2$$

両辺は正数であるから、各々の逆数を採れば

$$\frac{1}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{1}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}<\frac{1}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}$$

これより

$$\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}<1$$

このような組が複数存在するならば、

$$\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} < 1$$

Note

条件式 $|\beta_s| > \sqrt{1/8}$ は妥当である。何故ならば、$0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s| \le \sqrt{1/8}$ の領域に $\zeta(z)$ の零点は存在しないからである。

定理 8･4･4

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が $1/2$ でない非自明零点は存在しない。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots \tag{4.4$_0$}$$

証明

非自明零点 $1/2 \pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ は現存するが、この他に $1/2+\alpha_s \pm i\beta_s$, $1/2-\alpha_s \pm i\beta_s$ $\left(0<\alpha_s<1/2 \text{ \& } |\beta_s| > \sqrt{1/8}\right)$ なる非自明零点が存在すると仮定する。

すると 定理 8･4･1 、*Lemma* 8･4･2 、*Lemma* 8･4･3 より次式が成立する。

$$\begin{aligned}\Xi(z) &= \Xi_h(z)\Xi_\alpha(z)\\ &= \Xi(0)\prod_{r=1}\left(1+\frac{z^2}{y_r^2}\right)\cdot\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\left(\beta_s^2-\alpha_s^2\right)z^2}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}\right\}\end{aligned} \tag{4.1'}$$

$$\begin{aligned}\Xi(0) &= \Xi_h(0)\Xi_\alpha(0)\\ &= \prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2}\cdot\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 0.99424155\cdots\end{aligned} \tag{4.1$'_0$}$$

そして *Lemma* 8･4･3 によれば、$0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s| > \sqrt{1/8}$ のとき

$$\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} < 1 \tag{4.3$_0$}$$

であったから、(4.1$'_0$) より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} > -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$$

i.e.

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} \ne -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

以上の対偶命題として、本定理が成立する。

数式処理ソフト*Mathematica* により、 既知の非自明零点 100000 個を使って (4.4_0) の両辺を計算したところ、両辺は小数点以下5桁まで一致した。

```
y_r_ := Im[ZetaZero[r]]
Ξ0[m_] := Product[y_r^2/(1/4 + y_r^2), {r, 1, m}]
N[Ξ0[100000]]
0.994247
```

```
Ξ[0] := -1/(4 π^(1/4)) Gamma[1/4] Zeta[1/2]
N[Ξ[0]]
0.994242
```

cf.

(4.4_0) の平方根を取ると次のようになる。これもまたリーマン仮説と同値である。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r}{\sqrt{1/4+y_r^2}} = \frac{1}{2\pi^{1/8}}\sqrt{-\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.99711662\cdots \tag{4.5}$$

左辺の各因数は 非自明な零点 $z_r = 1/2 + i\,y_r$ を極座標で表示したときの虚数部である。即ち、

$$\prod_{r=1}^{\infty}\sin\theta_r = \frac{1}{2\pi^{1/8}}\sqrt{-\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.99711662\cdots \tag{4.5$_\theta$}$$

2017.12.01
2018.03.18 第3節追加
2018.04.02 第4節追加 (Renewed)
2024.04.04 第1節更新

河野 和
広島市

宇宙人の数学