8　完備化されたリーマン・ゼータの因数分解

8・1　ξ(z) のアダマール積表示

公式 8・1・1　(ξ(z) のアダマール積表示)
　完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{1.d}$$

$\zeta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm i y_k \quad k=1,2,3,\cdots$ 、γ をオイラー・マスケロニの定数とするとき、$\xi(z)$ は次のようなアダマール積で表される。

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.0}$$

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

証明
　アダマール積が次のように表せるとする。

$$\xi(z) = A\,e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.p}$$

そして、A, B を求める。先ず、

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2}{z}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)$$

であるから、これを (1.d) に代入すれば

$$\xi(z) = -2(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\zeta(z) \tag{1.d'}$$

(1.d') に $z=0$ を代入すれば

$$\xi(0) = -2(1-0)\pi^{-\frac{0}{2}}\Gamma\left(\frac{0}{2}+1\right)\zeta(0) = -2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(1.p) に $z=0$ を代入すれば $\xi(0)=A$。よって両者より $A=1$。かくして

$$\xi(z) = e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.p'}$$

　次に、(1.d') と (1.p') より

$$-2(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\zeta(z) = e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

これより、

$$\zeta(z) = -\frac{\pi^{\frac{z}{2}} e^{Bz}}{2(1-z)\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

両辺の対数を取ると

$$\log\zeta(z) = \frac{z}{2}\log\pi + Bz - \log 2 - \log(z-1) - \log\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) + \log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

ここで

$$\log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z_k}$$

であるから

$$\log\zeta(z) = \frac{z}{2}\log\pi + Bz - \log 2 - \log(z-1) - \log\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z_k}$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\log\pi}{2} + B - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(z/2+1)}{\Gamma(z/2+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{z_k}}{1-\frac{z}{z_k}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k}$$

i.e.

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\log\pi}{2} + B - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(z/2+1)}{\Gamma(z/2+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k}\right)$$

ここで $z\to 0$ とすると、

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \frac{\log\pi}{2} + B + 1 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

となるが、$\zeta(z)$ 及び $\Gamma(z)$ については次の特殊値が知られている。

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \zeta'(0) = -\frac{\log 2\pi}{2} \quad , \quad \Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma'(1) = -\gamma$$

そこで、これらを両辺に代入すれば、

$$\log 2\pi = \frac{\log\pi}{2} + B + 1 + \frac{\gamma}{2}$$

これより

$$B = \log 2 + \frac{\log\pi}{2} - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

これを (1.p’) に代入すれば

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2 + \frac{\log\pi}{2} - 1 - \frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.0}$$

この公式は完備化されたゼータ関数 $\xi(z)$ がその非自明な零点で不完全に因数分解されることを示している。

次に、非自明な零点を $z_k = x_k \pm i y_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_n+iy_n}\right)e^{\frac{z}{x_n+iy_n}}\left(1-\frac{z}{x_n-iy_n}\right)e^{\frac{z}{x_n-iy_n}}$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

これを用いれば (1.0) は

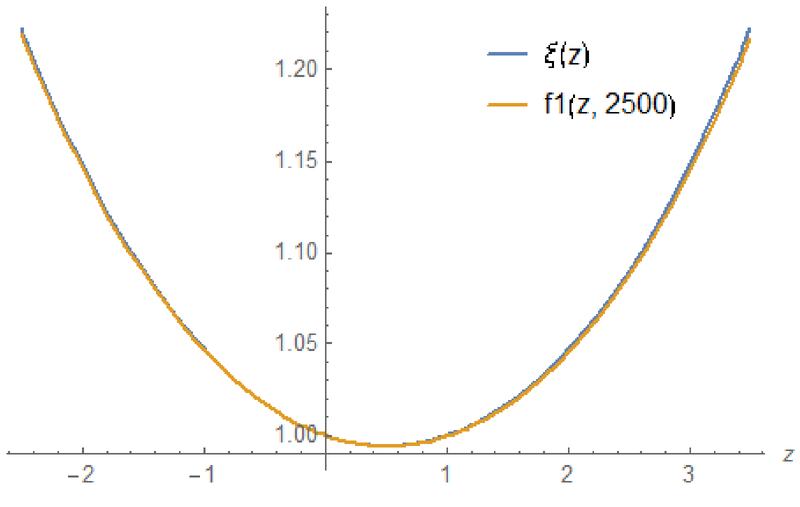
$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

Q.E.D.

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ ならば (1.1) は

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_n^2}+\frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_n^2}} \tag{1.1'}$$

実数部が $1/2$ である零点を生成する一般式は知られていないが、*Mathematica* はこれを数値的に生成する関数 $y_n = Im\,[ZetaZero\,[n\,]]$ を持っている。この非自明零点 2500 個を使って (1.1') の両辺をそれぞれ計算し重ねて描けば次のようになる。



(1.1) の特殊値として、次節で用いられる重要な公式が得られる。

公式 8・1・2 (特殊値)

リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n + i y_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}} = e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}} = 1.02336448\cdots \tag{1.2}$$

証明

(1.1) に $z=1$ を与えれば、

$$\xi(1)=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=1 \tag{1.1$_1$}$$

これより

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}}\quad(=1.02336448\cdots) \tag{1.2}$$

もし、$x_n=1/2\quad n=1,2,3,\cdots$ 、ならば (1.2) は

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2\cdot 1/2-1}{(1/2)^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2\cdot 1/2}{(1/2)^2+y_r^2}}=e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}}=e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}}$$

これより

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_n^2}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}=0.0230957\cdots \tag{1.2'}$$

(1.0) の特殊値として、次の公式が得られる。

公式 8·1·3 (特殊値)

リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n\quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}=\frac{\pi}{3} \tag{1.3}$$

証明

(1.0) に $z=-1,1$ をそれぞれ与えれば

$$e^{-\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)e^{-\frac{1}{z_k}}=\xi(-1)=\frac{\pi}{3}$$

$$e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)e^{\frac{1}{z_k}}=\xi(1)=1$$

両辺掛け合わせて

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$z_k=x_k\pm iy_k\quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)$$

これらより、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)$$
$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}$$

よって

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}=\frac{\pi}{3} \tag{1.3}$$

リーマン仮説成立の確率(その1)

数式処理ソフト*Mathematica* により、臨界線上の±の零点 50,000 組を使って (1.3) を計算したところ次のようになった。

$z_{n\_}$:= ZetaZero[n]　　$\overline{z}_{n\_}$:= Conjugate[z_n]

$$g_2[m\_]:=\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{z_n{}^2}\right)\left(1-\frac{1}{\overline{z}_n{}^2}\right)$$

N[{g₂[50000] , π / 3}]
{1.04712 + 0. i, 1.0472}

左辺の右辺に対する百分率は

$$\frac{1.0471170151935127`}{1.0471975511965976`}\times 100 = 99.9923\ \%$$

即ち、臨界線上の零点から成る項の無限積のうち 最初の 50,000 個が理論値 $\pi/3$ の 99.99% を占めている。このことは リーマン仮説成立の確率が少なくとも 99.99% であることを意味している。臨界線上の零点が無限個なることは 1914 年にハーディにより示されているから 零点の個数を増やせばこの確率はより高まると予想される。

この無限積は 2 次の収束をするからかなり速い。筆者のパソコン(i7-9750H , 16GB)での計算時間は 2 時間であった。

参考文献

「素数とゼータ関数」 小山信也 著　共立出版　2016

8・2 実数部が **1/2** でない非自明零点

「 7 完備化されたリーマン・ゼータ 」定理 7・4・1 によれば、もしリーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ が 実数部が 1/2 でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成らねばならない。

$$1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \ , \ 1/2-\alpha_s \pm i\beta_s \qquad (0<\alpha_s<1/2)$$

本節では、実数部が 1/2 である非自明な零点と実数部が 1/2 でない非自明零点が混在する場合、前節の諸式がどのように表されるか考察する。

Lemma 8・2・1

γ をオイラー・マスケロ二の定数、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ これらのうち実数部が 1/2 であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が 1/2 でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \ (0<\alpha_s<1/2) \ s=1,2,3,\cdots$ とするとき、公式 8・1・1 (1.1) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\xi(z) &= e^{\left(log 2+\frac{log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}} \\ &\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}} \\ &\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}\end{aligned} \tag{2.1}$$

証明

公式 8・1・1 (1.1) は次のようであった。

$$\xi(z) = e^{\left(log 2+\frac{log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

実数部が 1/2 である非自明な零点 $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ に関しては、右辺の一部は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$

他方、実数部が 1/2 でない非自明な零点 $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \quad (0<\alpha_s<1/2)$ に関しては、右辺の一部は次のように表される。

$$\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

$$\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}e^{\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

これらの積を取って与式を得る。

定理 8・2・2

γ をオイラー・マスケロニの定数、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ これらのうち実数部が $1/2$ であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が $1/2$ でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \ (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}=0.0230957\cdots \tag{2.4}$$

証明

公式 8・1・1 (1.1) に $z=1$ を代入すれば

$$\xi(1)=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=1 \tag{1.1$_1$}$$

Lemma 8・2・1 (2.1) に $z=1$ を代入すれば

$$\xi(1)=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{s=1}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$
$$\times e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}} \tag{2.1$_1$}$$

これらより、

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=\prod_{s=1}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

ここで都合の良いことに、

$$\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$
$$=1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$
$$=1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$
$$=1$$

となるから

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} \tag{2.3}$$

そして (1.1_1) と (2.2) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}=0.0230957\cdots \tag{2.4}$$

話が少しわき道に逸れるが、定理の (2.2) を用いて、次の特殊値が得られる。

公式 8･2･3 (特殊値)

リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=1 \tag{2.5+}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\frac{\pi}{3} \tag{2.5-}$$

証明

前節 公式 8･1･3 の証明 より、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{z+}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2x_n+1}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{z-}$$

$$\frac{\pi}{3}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)\left(1+\frac{1}{z_k}\right) \tag{z0}$$

定理 8･2･2 より

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

これを (z_+) に代入して

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=1 \tag{2.5+}$$

これと (z_-) を順次 (z_0) に代入すれば

$$\frac{\pi}{3}=1\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right) \tag{2.5-}$$

恒等式

$\xi(z)$ の零点 $x_n\pm iy_n$ について (2.5_+) は恒等的に成立する。このことは (z_+) と (2.2) から明らかである。

リーマン仮説成立の確率(その2)

数式処理ソフト*Mathematica*により、臨界線上の±の零点500,000組を使って(2.5₋)を計算したところ次のようになった。

```
z_n_ := ZetaZero[n]      z̄_n_ := Conjugate[z_n]
```

$$g_-[m\_] := \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)\left(1+\frac{1}{\bar{z}_n}\right)$$

```
N[g₋[500000]]        N[π / 3]
1.04719 + 0. i       1.0472
```

$$\frac{1.0471851981605098\grave{}}{1.0471975511965976\grave{}}\times 100 = 99.9988$$

即ち、臨界線上の零点から成る項の無限積の 最初の500,000個が理論値 $\pi/3$ の99.99%を占めている。このことは リーマン仮説成立の確率が少なくとも99.99%であることを意味している。

この無限積は分数的収束をするから かなり遅い。 筆者のパソコン(i7-9750H, 16GB)ではこの計算に20時間を要した。

さて、本題に戻ろう。定理 8・2・2 を用いて、非常に重要な次の定理が得られる。

定理 8・2・4

γ をオイラー・マスケロ二の定数、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が $1/2$ でない非自明零点は存在しない。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = 1+\frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots \tag{1.2'}$$

証明

非自明零点 $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ は現存するが、この他に $1/2+\alpha_s\pm i\beta_s$, $1/2-\alpha_s\pm i\beta_s$ $(0<\alpha_s<1/2)$ なる非自明零点が存在すると仮定する。すると 定理 8・2・2 (2.3), (2.4) より次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} + \sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} = 1+\frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log\pi}{2}$$

ここで、$0<\alpha_s<1/2$ と任意の実数 β_s に対して

$$\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} = \frac{1/2-2\alpha_s^2+2\beta_s^2}{\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}} > 0$$

よって、

$$\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} > 0 \qquad for\ \ 0<\alpha_s<1/2$$

かくて

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1/4+y_r^2} < 1+\frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log \pi}{2}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1/4+y_r^2} \neq 1+\frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log \pi}{2}$$

以上の対偶命題として、本定理が成立する。　　Q.E.D.

リーマン仮説成立の確率(その3)

　数式処理ソフト*Mathematica* により、臨界線上の零点 1,000,000 個について (1.2') を計算したところ次のようになった。

$$\gamma := \text{EulerGamma} \qquad y_{r\_} := \text{Im}[\text{ZetaZero}[r]]$$

$$\text{gl}[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{1/4+y_r^2} \qquad \text{gr} := 1+\frac{\gamma}{2} - \text{Log}[2] - \frac{\text{Log}[\pi]}{2}$$

N[gl[1 000 000]]　　N[gr]

0.0230924　　0.0230957

$$\frac{0.023092403410340828\grave{}}{0.02309570896612101\grave{}} \times 100 = 99.9857$$

即ち、臨界線上の零点から成る項の級数の最初の 1,000,000 個が理論値の 99.98% を占めている。このことはリーマン仮説成立の確率が少なくとも 99.98% であることを意味している。

　この級数は 2 次の収束をするから非常に遅い。筆者のパソコン (i7-9750H , 16GB) ではこの計算に 31 時間を要した。

8･3 ξ(z) の因数分解

公式 8･1･1（ξ(z) のアダマール積表示）は完備化されたゼータ関数 $\xi(z)$ がその非自明な零点で不完全に因数分解されたものである。ところが、定理 8･2･2 を用いれば補正項が消滅し、$\xi(z)$ がその非自明な零点で完全に因数分解される。

定理 8･3･1 （ξ(z) の因数分解）

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、$\xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

証明

公式 8･1･1 (1.1) より

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)\cdot e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

他方、定理 8･2･2 (2.4) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

これより

$$e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} = e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

これを上の右辺に代入すれば

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)\cdot e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

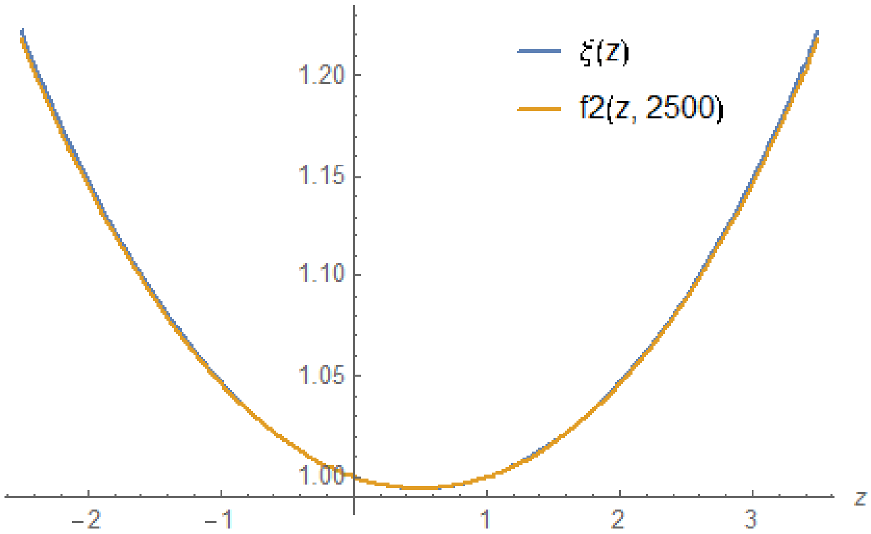
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

なお、本公式は既知である。

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ ならば (3.1) は

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_n^2}+\frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right) \tag{3.1'}$$

既知の非自明零点 2500 個を使って (3.1') の両辺をそれぞれ計算し重ねて描けば次のようになる。これは 公式 8･1･1 の (1.1') の図 と全く同じである。



ξ(z)
f2(z, 2500)
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
−2
−1
1
2
3
z

8・4 $\Xi(z)$ の因数分解

定理 8・3・1 において z を $z+1/2$ で置換すれば、偶関数である完備化されたゼータ関数 $\Xi(z)$ が得られる。

定理 8・4・1 （$\Xi(z)$ の因数分解）

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm i y_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、$\Xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\} \tag{4.1}$$

$$但し、\Xi(0) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots \tag{4.1$_0$}$$

証明

定理 8・3・1 より

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

最初の式において z を $1/2+z$ に置換すると、

$$\xi\left(\frac{1}{2}+z\right) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) =: \Xi(z)$$

$z=0$ をこれに代入すれば

$$\Xi(0) = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$$

(3.1) において z を $1/2+z$ に置換すると、

$$\begin{aligned}\xi\left(\frac{1}{2}+z\right) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}\left(\frac{1}{2}+z\right)+\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\left(\frac{1}{2}+z\right)^2\right\} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{x_n}{x_n^2+y_n^2}+\frac{1/4}{x_n^2+y_n^2}-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right\} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{x_n^2-x_n+1/4+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}-\frac{(2x_n-1)z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right\}\end{aligned}$$

i.e.

$$\xi\left(\frac{1}{2}+z\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

$\xi(1/2+z)=\Xi(z)$ であるから

$$\Xi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

$z=0$ をこれに代入すれば

$$\Xi(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}$$

これを $\Xi(z)$ の右辺に代入して (4.1) を得る。　　Q.E.D.

Lemma 8･4･2

定理 8･4･1 (4.1) の内、実数部 x_n が $1/2$ である因数の積 $\Xi_h(z)$ は次のように表される。

$$\Xi_h(z)=\Xi_h(0)\prod_{r=1}\left(1+\frac{z^2}{y_r^2}\right) \tag{4.2}$$

但し、 $\Xi_h(0)=\prod_{r=1}^{\infty}\dfrac{y_r^2}{1/4+y_r^2}$　　(4.2$_0$)

証明

定理 8･4･1において x_n の一部を $1/2$ に置換して、直ちに与式を得る。

Note

$\Xi(z)=\Xi_h(z)$ であろう と言うのがリーマン仮説である。

Lemma 8･4･3

定理 8･4･1 (4.1) の内に実数部 x_n が $1/2$ でない因数が存在すると仮定せよ。すると2つの実数を α_s,β_s s.t. $0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s|>\sqrt{1/8}$ とするとき、それらの因数の積 $\Xi_\alpha(z)$ は次のように表される。

$$\Xi_\alpha(z)=\Xi_\alpha(0)\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2(\beta_s^2-\alpha_s^2)z^2}{(\alpha_s^2+\beta_s^2)^2}+\frac{z^4}{(\alpha_s^2+\beta_s^2)^2}\right\} \tag{4.3}$$

但し、$\Xi_\alpha(0)=\prod_{s=1}\dfrac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\dfrac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}<1$　　(4.3$_0$)

証明

もしそのような因数の積が存在するならば、「 07 完備化されたリーマン・ゼータ 」定理 7･4･1 によりその1組は次の4個から成らねばならない。

$$1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \quad , \quad 1/2-\alpha_s \pm i\beta_s \qquad (0<\alpha_s<1/2)$$

そこで、定理 8･4･1において x_n , y_n の一部を $1/2\pm\alpha_s , \beta_s$ にそれぞれ置換すれば、

$$\Xi_\alpha(z)=\Xi_\alpha(0)\prod_{s=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(+\alpha_s)z}{(+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2(-\alpha_s)z}{(-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$=\Xi_s(0)\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{2\alpha_s z}{\alpha_s^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{\alpha_s^2+\beta_s^2}\right)\left(1+\frac{2\alpha_s z}{\alpha_s^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{\alpha_s^2+\beta_s^2}\right)$$

$$=\Xi_s(0)\prod_{s=1}^{\infty}\left\{1+\frac{2\left(\beta_s^2-\alpha_s^2\right)z^2}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}\right\} \tag{4.3}$$

$$\Xi_s(0)=\prod_{s=1}^{\infty}\frac{(+\alpha_s)^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{(-\alpha_s)^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$=\prod_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} \tag{4.3$_0$}$$

最後に、

$$\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}$$

$$=(1/2+\alpha_s)^2(1/2-\alpha_s)^2+(1/2+\alpha_s)^2\beta_s^2+(1/2-\alpha_s)^2\beta_s^2+\beta_s^4$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{\beta_s^2-\alpha_s^2}{2}+2\alpha_s^2\beta_s^2+\alpha_s^4+\beta_s^4$$

i.e.

$$\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}=\frac{1}{16}+\frac{\beta_s^2-\alpha_s^2}{2}+\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2$$

ここで、もし $0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s|>\sqrt{1/8}$ ならば次の不等式が成立する。

$$\beta_s^2>\alpha_s^2-\frac{1}{8}$$

これより

$$\frac{1}{16}+\frac{\beta_s^2-\alpha_s^2}{2}>0$$

従って

$$\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right\}>\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2$$

両辺は正数であるから、各々の逆数を採れば

$$\frac{1}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{1}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}<\frac{1}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}$$

これより

$$\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}<1$$

このような組が複数存在するならば、

$$\prod_{s=1} \frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2} \frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} < 1$$

Note

条件式 $|\beta_s|>\sqrt{1/8}$ は妥当である。何故ならば、$0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s|\le\sqrt{1/8}$ の領域に $\zeta(z)$ の零点は存在しないからである。

定理 8･4･4

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$、その非自明零点を $z_n=x_n\pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が $1/2$ でない非自明零点は存在しない。

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots \tag{4.4$_0$}$$

証明

非自明零点 $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ は現存するが、この他に $1/2+\alpha_s\pm i\beta_s$, $1/2-\alpha_s\pm i\beta_s$ $\left(0<\alpha_s<1/2 \ \& \ |\beta_s|>\sqrt{1/8}\right)$ なる非自明零点が存在すると仮定する。

すると 定理 8･4･1 、*Lemma* 8･4･2 、*Lemma* 8･4･3 より次式が成立する。

$$\Xi(z)=\Xi_h(z)\Xi_\alpha(z)$$

$$=\Xi(0)\prod_{r=1}\left(1+\frac{z^2}{y_r^2}\right)\cdot\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\left(\beta_s^2-\alpha_s^2\right)z^2}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\alpha_s^2+\beta_s^2\right)^2}\right\} \tag{4.1'}$$

$$\Xi(0)=\Xi_h(0)\Xi_\alpha(0)$$

$$=\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2}\cdot\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.99424155\cdots \tag{4.1$'_0$}$$

そして *Lemma* 8･4･3 によれば、$0<\alpha_s<1/2$ & $|\beta_s|>\sqrt{1/8}$ のとき

$$\prod_{s=1} \frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2} \frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} < 1 \tag{4.3$_0$}$$

であったから、(4.1$'_0$) より

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} > -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$$

i.e.

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} \ne -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

以上の対偶命題として、本定理が成立する。　　Q.E.D.

リーマン仮説成立の確率(その4)

数式処理ソフト *Mathematica* により、臨界線上の零点 500,000 個を使って (4.4_0) を計算したところ次のようになった。

```
y_r_ := Im[ZetaZero[r]]
```

$$\Xi_0[m\_] := \prod_{r=1}^{m} \frac{y_r^2}{1/4 + y_r^2} \qquad \Xi[0] := -\frac{1}{4\pi^{1/4}} \mathrm{Gamma}\left[\frac{1}{4}\right] \mathrm{Zeta}\left[\frac{1}{2}\right]$$

```
N[Ξ0[500000], 10]        N[Ξ[0], 10]
0.9942430224             0.9942415564
```

(4.3_0) で見たように $\Xi_0(m) \geq \Xi(0)$ であるから、$\{\Xi_0(m)\}^{-1} \leq \{\Xi(0)\}^{-1}$ である。そこで前者の後者に対する百分比を計算すると

$$\frac{0.9942430224^{-1}}{0.9942415564^{-1}} \times 100 = \frac{0.9942415564}{0.9942430224} \times 100 = 99.9999\,\%$$

即ち、臨界線上の零点から成る項の無限積のうち 最初の 500,000 個が理論値の 99.9999% を占めている。このことはリーマン仮説成立の確率が少なくとも 99.9999% であることを意味している。

この無限積は分母子が同次であるため収束は遅い。筆者のパソコン(i7-9750H , 16GB)ではこの計算に 15 時間を要した。

cf.

(4.4_0) の平方根を取ると次のようになる。これもまたリーマン仮説と同値である。

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{y_r}{\sqrt{1/4 + y_r^2}} = \frac{1}{2\pi^{1/8}} \sqrt{-\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.99711662\cdots \tag{4.5}$$

左辺の各因数は 非自明な零点 $z_r = 1/2 + i\,y_r$ を極座標で表示したときの虚数部である。即ち、

$$\prod_{r=1}^{\infty} \sin\theta_r = \frac{1}{2\pi^{1/8}} \sqrt{-\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.99711662\cdots \tag{4.5$_\theta$}$$

2017.12.01
2018.03.18 第3節追加
2018.04.02 第4節追加 (Renewed)
2024.04.04 第1節更新
2024.12.01 第3節以外を更新

河野 和
広島市

宇宙人の数学