9 完備化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数

9·1 ξ(z) のマクローリン級数

Lemma 9·1·1（ガンマ関数のマクローリン級数）

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r(3/2)}{2^r r!}z^r \qquad z \ne 3, 5, 7, \cdots \tag{1.g}$$

$$= 1 + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}z^1 + \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!}z^2 + \frac{g_3(3/2)}{2^3 3!}z^3 + \cdots$$

但し、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

証明

アラカルト篇「12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」公式12·1·1は次のようであった。即ち
$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(a)}{n!}(z-a)^n \qquad a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{n-1}(a)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

これを用いれば、$\Gamma\{(3-z)/2\}$ は次のようにテイラー展開できる。

$$\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right) = \Gamma(a) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(r)}(a)}{r!}\left(\frac{3-z}{2} - a\right)^r \qquad a \ne 3,5,7,\cdots$$

$$\Gamma^{(r)}(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{r-1}(a)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$a = 3/2$ と置けば、

$$\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(r)}(3/2)}{r!}\left(-\frac{z}{2}\right)^r \tag{1.w}$$

$$\Gamma^{(r)}\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

ここで

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

と置けば

$$\Gamma^{(r)}\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)g_r\left(\frac{3}{2}\right) \qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、これを (1.w) に代入して、

$$\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)+\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r(3/2)}{2^r r!}\left(\frac{z}{2}\right)^r$$

i.e.

$$\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r(3/2)}{2^r r!}z^r \qquad \left\{\because \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}$$

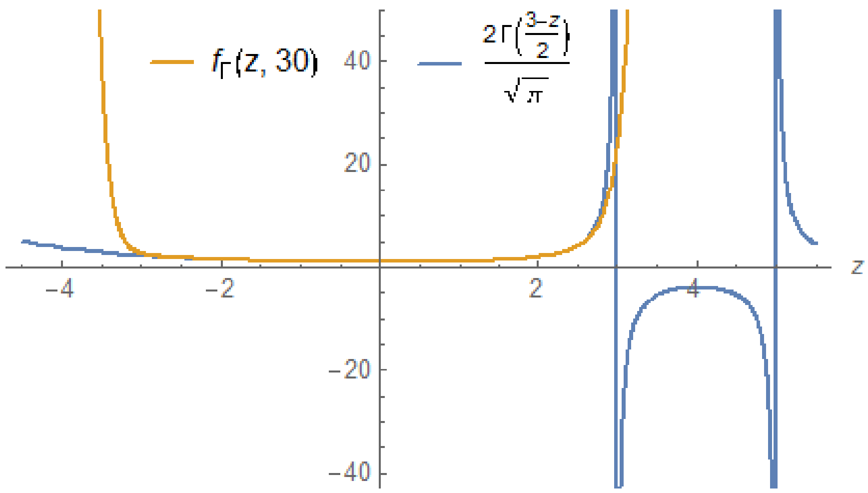
両辺に $2/\sqrt{\pi}$ を乗じて与式を得る。

(1.g) の両辺を図示すると次のとおり。青が左辺で橙が右辺である。$z=3, 5, 7, \cdots$ に特異点が存在し、従って収束半径は3である。

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0, 1, \sum_{k=1}^{r}\mathrm{BellY}\left[r, k, \mathrm{Tbl}\psi\left[r, \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$f_\Gamma[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{g_r[3/2]}{2^r r!}z^r$$



Lemma 9･1･2 (正則化されたゼータ関数のマクローリン級数)

$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数、そして γ_r をスチルチェス定数とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$-z\zeta(1-z)=\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r \tag{1.z}$$

$$=1-\frac{\gamma_0}{0!}z^1-\frac{\gamma_1}{1!}z^2-\frac{\gamma_2}{2!}z^3-\frac{\gamma_3}{3!}z^4-\cdots$$

但し、

$$c_r=\begin{cases}1 & r=0\\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

証明

γ_r をスチルチェス定数とするとき、$z=1$ を除く全複素平面上で次式が成立することが知られている。。

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\gamma_r(z-1)^r$$

両辺に $z-1$ を乗ずれば

$$(z-1)\zeta(z)=1+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\gamma_r(z-1)^{r+1}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}(z-1)^r$$

z を $1-z$ に置換すれば

$$(1-z-1)\zeta(1-z)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}(1-z-1)^r$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{2r-1}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!!}z^r$$

i.e.

$$-z\zeta(1-z)=1-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}z^r$$

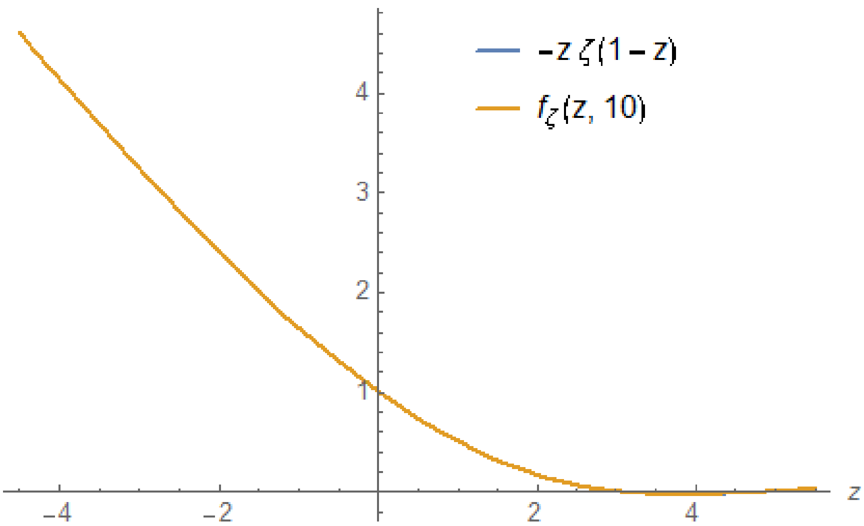
この式においては、γ_{-1} をどのように定義しても、1 を Σ に含めることはできない。そこで分母をも含めた新しい係数 c_r を *Lemma* の但し書のように定義して与式を得る。

Q.E.D.

(1.z) の両辺を図示すると次のとおり。青が左辺で橙が右辺である。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)は見えない。特異点は存在せず、従って収束半径は∞である。

$$\gamma_{s\_}:=\text{StieltjesGamma}[s]\qquad c_{r\_}:=\text{If}\left[r==0,\,1,\,-\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

$$f_\zeta[z\_,\,m\_]:=\sum_{r=0}^{m}c_r\,z^r$$



定理 9·1·3 (ξ(z) のマクローリン級数)

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{1.1}$$

すると、全複素平面上で次式が成立する。

$$\xi(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{(-1)^{s-t}g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r \tag{1.2}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

証明

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

$$= \xi(1-z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)$$

$$= -\pi^{\frac{z}{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\{z\zeta(1-z)\}$$

i.e.

$$\xi(z) = \pi^{\frac{z}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right)\right\}\{-z\zeta(1-z)\} \tag{1.1'}$$

先ず、$\pi^{z/2}$ は次のようにマクローリン展開される。

$$\pi^{\frac{z}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\log^r\pi}{2^r r!}z^r \tag{1.p}$$

次の2つの関数は *Lemma* 9·1·1 及び *Lemma* 9·1·2 により

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r(3/2)}{2^r r!}z^r \tag{1.g}$$

$$-z\zeta(1-z) = \sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r \tag{1.z}$$

但し、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

これらを (1.1') に代入すれば

$$\xi(z) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\log^r \pi}{2^r r!} z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{g_r(3/2)}{2^r r!} z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r\right)$$

無限次方程式編「 01 無限級数の累乗 」公式 1･1･2 によると、3つの冪級数の積は次式で示される。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s} b_{s-t} c_t z^r$$

よって、

$$a_r = \frac{\log^r \pi}{2^r r!} \quad , \quad b_r = (-1)^r \frac{g_r(3/2)}{2^r r!}$$

と置けば、

$$\xi(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!} c_t z^r \tag{1.2}$$

但し、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \cdots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Q.E.D.

(1.2) の最初の数項は次のようである。

$$\begin{aligned} \xi(z) = 1 &+ \left(\frac{\log^1\pi}{2^1 1!} - \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\gamma_0}{0!}\right) z^1 \\ &+ \left(\frac{\log^2\pi}{2^2 2!} + \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\gamma_1}{1!}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}\right) z^2 \\ &+ \left(\frac{\log^3\pi}{2^3 3!} - \frac{g_3(3/2)}{2^3 3!} - \frac{\gamma_2}{2!}\right. \\ &\qquad - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!} \\ &\qquad + \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} \end{aligned}$$

$$+\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}\Bigg)z^3$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$= 1. - 0.0230957\, z + 0.0233439\, z^2 - 0.000497984\, z^3 + 0.000253182\, z^4$$
$$-5.05025\times10^{-6}\, z^5 + 1.72099\times10^{-6}\, z^6 - 3.23784\times10^{-8}\, z^7 + 8.31597\times10^{-9}\, z^8$$
$$\vdots$$

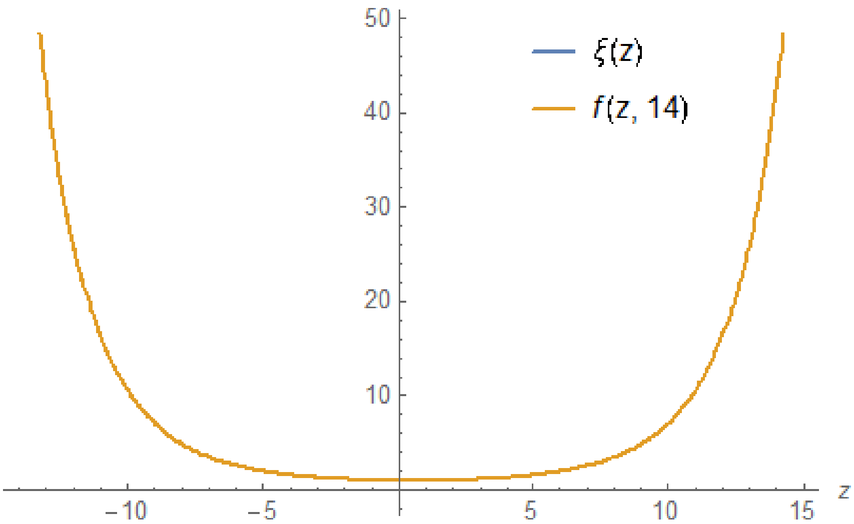
(1.2) の両辺を図示すると次のとおり。左辺が青が右辺が橙である。右辺は z^{14} まで計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)はほとんど見えない。ガンマ関数 (1.g) の特異点はゼータ関数 (1.z) の自明な零点に相殺されて消滅しており、従って収束半径は∞である。

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ \sum_{k=1}^{r}\mathrm{BellY}\left[r, k, \mathrm{Tbl}\psi\left[r, \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$\gamma_{s\_} := \mathrm{StieltjesGamma}[s] \qquad c_{r\_} := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

$$f[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\,(r-s)!}\,\frac{(-1)^{s-t}\,g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}\,(s-t)!}\,c_t\,z^r$$



但し、原点から離れた点では非常に高い計算精度が要求される。 次は $\xi(z)$ の最初の零点 $1/2+i\,14.1347\cdots$ における値であるが、64桁の精度で z^{36} まで計算してやっと小数第7位まで一致した。

```
SetPrecision[{ξ[ZetaZero[1]], f[ZetaZero[1], 36]}, 64]
```

$$\{0,\ 3.68380076348383\times10^{-8} - 1.65454062318318 9\times10^{-8}\,i\}$$

9·2 $\Xi(z)$ のマクローリン級数

Lemma 9·2·1（ガンマ関数のマクローリン級数）

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(5/4)}{2^r r!}z^r \qquad z \ne -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}, \cdots \tag{2.g}$$

但し、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

証明

アラカルト篇「**12 ガンマ関数とその逆数の級数展開**」公式12·1·1は次のようであった。即ち $\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(a)}{n!}(z-a)^n \qquad a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{n-1}(a)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

これを用いれば、$\Gamma(5/4+z/2)$ は次のようにテイラー展開できる。

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right) = \Gamma(a) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(r)}(a)}{r!}\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}-a\right)^r \qquad a \ne -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}, \cdots$$

$$\Gamma^{(r)}(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{r-1}(a)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$a = 5/4$ と置けば、

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(r)}(5/4)}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^r \tag{2.w}$$

$$\Gamma^{(r)}\left(\frac{5}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) \quad r=1,2,3,\cdots$$

ここで

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

と置けば

$$\Gamma^{(r)}\left(\frac{5}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)g_r \qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、これを (2.w) に代入して、

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\frac{g_r(5/4)}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^r = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(5/4)}{2^r r!}z^r$$

この関数は $z = -5/2, -9/2, -13/2, \cdots$ に特異点が存在し、従って収束半径は $5/2$ である。

Lemma 9･2･2（正則化されたゼータ関数のマクローリン級数）

$\zeta(z)$ をリーマン･ゼータ関数、そして γ_r をスチルチェス定数とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$2\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)=-\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r \tag{2.z}$$

但し、

$$c_r=\begin{cases}1 & r=0\\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)}\displaystyle\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

証明

正則化されたリーマンゼータ

$$(z-1)\zeta(z)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}(z-1)^r$$

において z を $z+1/2$ に置換して次式を得る。

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^r \tag{2.t}$$

$$=1+\frac{\gamma_0}{0!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^1-\frac{\gamma_2}{1!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\gamma_3}{2!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{\gamma_4}{3!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^4+-\cdots$$

これは $z=1/2$ の周りのテイラー展開である。

関数 $(z-1)\zeta(z)$ は正則化されており、全複素平面上に特異点を持たない。従ってこのテイラー級数の収束半径は∞である。ここで、二項定理より

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)^r=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-s}z^s$$

これを (2.t) に代入すれば、

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-s}z^s$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}(-1)^{s-r}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r}z^r$$

i.e.

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r}\right\}z^r$$

これはマクローリン級数

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r \tag{2.m}$$

に等しくなければならない。そうでないならベキ級数の一意性に反するからである。よって

$$a_r=\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r}$$

(2.t) より、a_0 の初項 $-\gamma_{-1}/(-1)!$ は 1 と読み替えられねばならない。即ち、

$$a_r = \begin{cases} 1 - \displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^s & r = 0 \\ \displaystyle\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

更に、(2.m) より

$$a_0 = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^s = -\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

次に、

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{a_0} z^r = -\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{-\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} z^r$$

両辺を2倍すると

$$2\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty} \frac{-2a_r}{\zeta(1/2)} z^r$$

よって

$$c_r = -\frac{2a_r}{\zeta(1/2)} = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)} \displaystyle\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^r \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

と置けば

$$2\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r$$

この関数には特異点は存在せず、従って収束半径は∞である。

定理 9·2·3 ($\varXi(z)$ のマクローリン級数)

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\varXi(z)$ が次のようであるとする。

$$\varXi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{2.1}$$

すると、全複素平面上で次式が成立する。

$$\varXi(z) = \varXi(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r \tag{2.2}$$

$$\varXi(0) = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)} \displaystyle\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^r \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!} \binom{s}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

証明

完備化されたリーマン・ゼータ関数

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{2.1}$$

は、次のように変形できる。

$$\Xi(z) = \pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right)\left\{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\} \tag{2.1'}$$

先頭の関数は次のようにマクローリン展開される。

$$\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)} = \frac{1}{\pi^{1/4}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\log^r \pi}{2^r r!} z^r \tag{2.p}$$

次の2つの関数は *Lemma* 9･2･1 及び *Lemma* 9･2･2 により

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(5/4)}{2^r r!}z^r \qquad z \ne -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}, \cdots \tag{2.g}$$

$$2\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r \tag{2.z}$$

但し、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)} \displaystyle\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^r \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!} \binom{s}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

これらを (2.1') に代入すれば

$$\Xi(z) = -\frac{1}{\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\log^r\pi}{2^r r!}z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(5/4)}{2^r r!}z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r\right)$$

無限次方程式編「 01 無限級数の累乗 」公式 1･1･2 によると、3つの冪級数の積は次式で示される。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}a_{r-s}b_{s-t}c_t z^r$$

よって、

$$a_r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\log^r\pi}{2^r r!}z^r \quad , \quad b_r = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(5/4)}{2^r r!}z^r$$

$$\Xi(0) = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

と置けば、

$$\Xi(z) = \Xi(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r \tag{2.2}$$

但し、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \cdots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\frac{2}{\zeta(1/2)}\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Q.E.D.

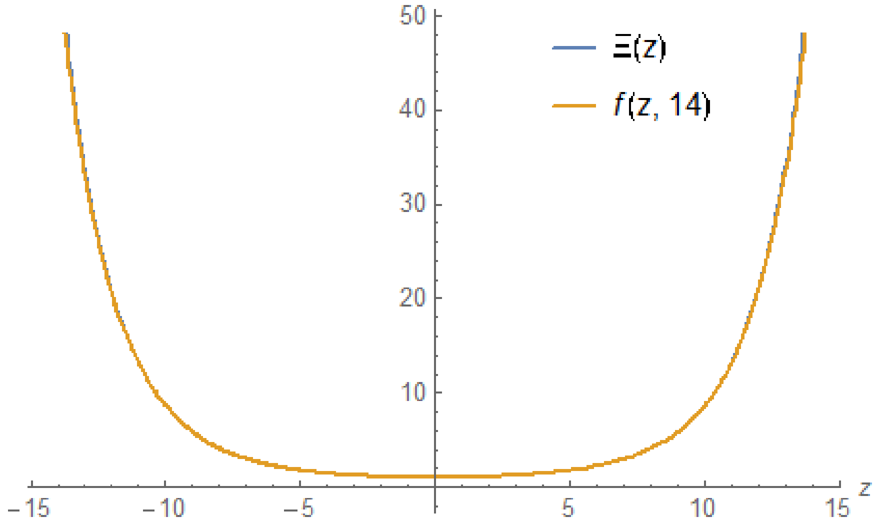
(2.2) の最初の数項は次のようである。

$$\begin{aligned}\Xi(z) = \Xi(0)\Bigg\{1 &+ \left(-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}+\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}+c_1\right)z^1 \\ &+ \left(\frac{\log^2\pi}{2^2 2!}+\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}+c_2-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}+\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}c_1-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}c_1\right)z^2 \\ &+ \Bigg(-\frac{\log^3\pi}{2^3 3!}+\frac{g_3(5/4)}{2^3 3!}+c_3+\frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}+\frac{\log^2\pi}{2^2 2!}c_1+\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}c_1 \\ &\qquad -\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}c_2+\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}c_2-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}c_1\Bigg)z^3 \\ &+ \cdots \Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= 0.994242\{1. &+ 4.44089\times10^{-16}z + 0.023105z^2 + 1.38778\times10^{-16}z^3 \\ &+ 0.000248334z^4 + 2.08167\times10^{-17}z^5 + 1.67435\times10^{-6}z^6 \\ &+ 7.37257\times10^{-18}z^7 + 8.0307\times10^{-9}z^8 + 1.0842\times10^{-18}z^9 \\ &+ 2.94014\times10^{-11}z^{10}\}\end{aligned}$$

奇数次の係数はほぼ0になっている。

(2.2) の両辺を図示すると次のとおり。左辺が青が右辺が橙である。右辺は z^{14} まで計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)はほとんど見えない。ガンマ関数 (2.g) の特異点はゼータ関数 (2.z) の自明な零点に相殺されて消滅しており、従って収束半径は∞である。



但し、原点から離れた点では非常に高い計算精度が要求される。 次は $\Xi(z)$ の最初の零点（i 14.1347⋯）における値であるが、26桁の精度で z^{26} まで計算してやっと小数第4位まで一致した。

$$\Xi[z\_] := -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\,\mathrm{Gamma}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right]\,\mathrm{Zeta}\left[\frac{1}{2}+z\right]$$

$$\mathrm{Tbl}\psi[r\_,z\_] := \mathrm{Table}[\mathrm{PolyGamma}[k,z],\{k,0,r-1\}]$$

$$g_{r\_}\left[\frac{5}{4}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0,1,\sum_{k=1}^{r}\mathrm{BellY}\left[r,k,\mathrm{Tbl}\psi\left[r,\frac{5}{4}\right]\right]\right]$$

$$\gamma_{s\_} := \mathrm{StieltjesGamma}[s]$$

$$c_{r\_} := \mathrm{If}\left[r == 0,1,\frac{2}{\mathrm{Zeta}[1/2]}\sum_{s=r}^{1000}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\,\mathrm{Binomial}[s,r]\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r}\right]$$

$$f[z\_,m\_] := \Xi[0]\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}[5/4]}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r$$

$$\mathrm{SetPrecision}\left[\left\{\Xi\left[\mathrm{ZetaZero}[1]-\frac{1}{2}\right],\ f\left[\mathrm{ZetaZero}[1]-\frac{1}{2},26\right]\right\},26\right]$$

$$\{0,\ 0.\times10^{-4}+0.\times10^{-4}\,i\}$$

9·3 補 遺

9·3·0 ζ(z) の高階微係数

超微積分編「 26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分 」の 公式 26·1·2h は次のようであった。

$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数、$\zeta^{(n)}(z)$ をその直系 n 階導関数、そして γ_s をスチルチェス定数とするとき、$z=1$ を除く全複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{-n} n!}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \gamma_s \frac{(z-1)^{s-n}}{\Gamma(1+s-n)}$$

この式において $z=a \quad (\neq 1)$ と置けば、a における n 階微係数が得られる。即ち、

$$\zeta^{(n)}(a) = \frac{(-1)^{-n} n!}{(a-1)^{n+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \gamma_s \frac{(a-1)^{s-n}}{\Gamma(1+s-n)} \tag{3.a}$$

(1) **0** における高階微係数

(3.a) において 特に $a=0$ と置けば、0 における n 階微係数が得られる。

$$\zeta^{(n)}(0) = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s}{(s-n)!} - n! \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.0}$$

これらの最初のいくつかは次のとおり。全ての微係数は負で、1階以上の微係数は $-n!$ に近いことが分かる。

$$\zeta^{(0)}(0) = -0.5$$
$$\zeta^{(1)}(0) = -0.91893853320467\cdots \approx -1!$$
$$\zeta^{(2)}(0) = -2.00635645590858\cdots \approx -2!$$
$$\zeta^{(3)}(0) = -6.00471116686225\cdots \approx -3!$$
$$\zeta^{(4)}(0) = -23.9971031880137\cdots \approx -4!$$
$$\zeta^{(5)}(0) = -120.000232907558\cdots \approx -5!$$
$$\vdots$$

cf.

(3.0) は次式と同値である。

$$\zeta^{(n)}(0) = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+n}}{s!} - n! \qquad n=0,1,2,\cdots$$

これより O. Marichev の公式 (http://mathworld.wolfram.com/StieltjesConstants.html)を得る。

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+n}}{s!} = (-1)^n \left\{ n! + \zeta^{(n)}(0) \right\} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

(2) **1/2** における高階微係数

(3.a) において 特に $a=1/2$ と置けば、$1/2$ における n 階微係数が得られる。

$$\zeta^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{-n}n!}{(1/2-1)^{n+1}} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\gamma_s\frac{(1/2-1)^{s-n}}{\Gamma(1+s-n)}$$
$$= \frac{(-1)^{-n}n!}{(-1/2)^{n+1}} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\gamma_s\frac{(-1/2)^{s-n}}{\Gamma(1+s-n)}$$
$$= \frac{2^n n!}{(-1)^n(-1)^{n+1}} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{2^n(-1)^s(-1)^{s-n}}{2^s(s-n)!}$$

i.e.

$$\zeta^{(n)}(1/2) = 2^n\left\{(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^s(s-n)!} - 2n!\right\} \tag{3.h}$$

これらの最初のいくつかは次のとおり。全ての微係数は負で、1階以上の微係数は $-2^{n+1}n!$ に近いことが分かる。

$$\zeta^{(0)}(1/2) = -1.46035450880958\cdots$$
$$\zeta^{(1)}(1/2) = -3.92264613920915\cdots \approx -2^2 1!$$
$$\zeta^{(2)}(1/2) = -16.0083570139286\cdots \approx -2^3 2!$$
$$\zeta^{(3)}(1/2) = -96.0033092453190\cdots \approx -2^4 3!$$
$$\zeta^{(4)}(1/2) = -767.997319720447\cdots \approx -2^5 4!$$
$$\zeta^{(5)}(1/2) = -7680.00060066206\cdots \approx -2^6 5!$$
$$\vdots$$

9·3·1 リーマン・ゼータのマクローリン級数

これらの高階微係数を用いれば、リーマン・ゼータのマクローリン級数は容易に得られる。

公式 9·3·1 (ζ(z) のマクローリン級数)

$$\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\zeta^{(r)}(0)}{r!}z^r \qquad |z| < 1 \tag{3.1}$$

但し、

$$\zeta^{(r)}(0) = (-1)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{(s-r)!} - r! \qquad r=0,1,2,\cdots$$

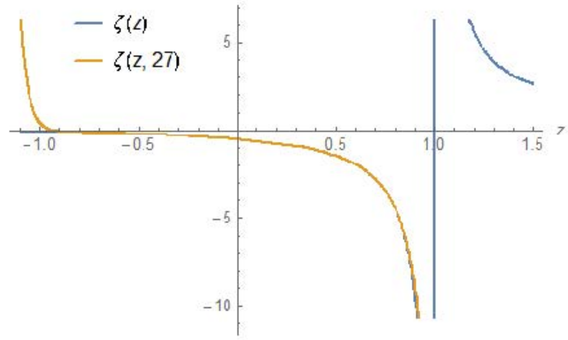
(3.1) の最初の数項は次のようである。分子と分母の絶対値が非常に近いため、5次以降の係数はほとんど -1 になっている。

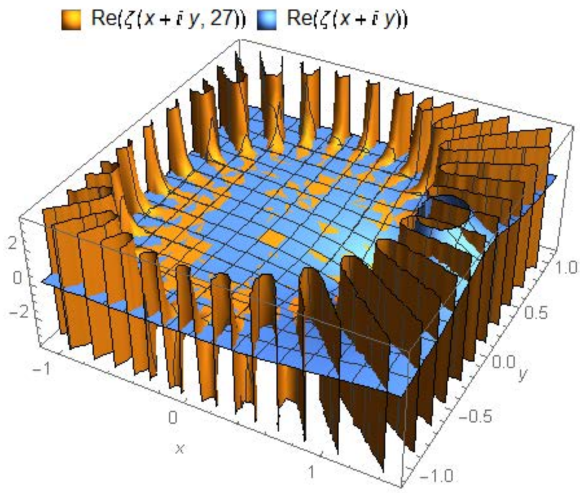
```
N[ζ[z, 8]]
```

$$-0.5 - 0.918939\,z - 1.00318\,z^2 - 1.00079\,z^3 - 0.999879\,z^4 - 1.\,z^5 - 1.\,z^6 - 1.\,z^7 - 1.\,z^8$$

また、(3.1) の2D図とその実数部の3D図を描くと次のようである。左辺が青で右辺が橙である。

この級数(橙)は3D図の円内しか表すことができない。





従って、この級数は $\zeta(z)$ の零点を表示することが出来ない。これが筆者が $\zeta(z)$ のマクローリン展開を今まで躊躇していた理由である。

公式 9·3·1' (ζ (z+1/2) のマクローリン級数)

$$\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\zeta^{(r)}(1/2)}{r!}z^r \qquad |z|<\frac{1}{2} \tag{3.1'}$$

但し、

$$\zeta^{(r)}(1/2) = 2^r\left\{(-1)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^s(s-r)!} - 2r!\right\} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

(3.1') の最初の数項は次のようである。分子が $-2^{n+1}n!$ に近く、分母が $n!$ であるため、5次以降の係数はほとんど -2^{n+1} になっている。

```
N[f[z, 8]]
-1.46035 - 3.92265 z - 8.00418 z^2 - 16.0006 z^3 - 31.9999 z^4
 - 64. z^5 - 128. z^6 - 256. z^7 - 512. z^8
```

また、(3.1') の級数の収束域は複素平面の原点を中心とする半径 $1/2$ の円内である。従って、この級数もまた $\zeta(z+1/2)$ の零点を表示することができない。

9·3·2 正則化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数

これらの公式は収束域が狭くてほとんど使い物にならない。その原因は特異点の存在である。何故ならば、マクローリン級数の収束域半径は原点から特異点までの距離だからである。

それならば、$\zeta(z)$ から特異点を除いてやれば、その級数の収束半径は無限大になるに違いない。そのためには、$\zeta(z)$ には $(z-1)$ を乗じてやれば良い。$\zeta(z+1/2)$ には $(z-1/2)$ を乗じてやれば良い。

公式 9·3·2 ((z−1) ζ (z) のマクローリン級数)

$$(z-1)\zeta(z) = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{r\zeta^{(r-1)}(0)-\zeta^{(r)}(0)}{r!}z^r \tag{3.2}$$

但し、

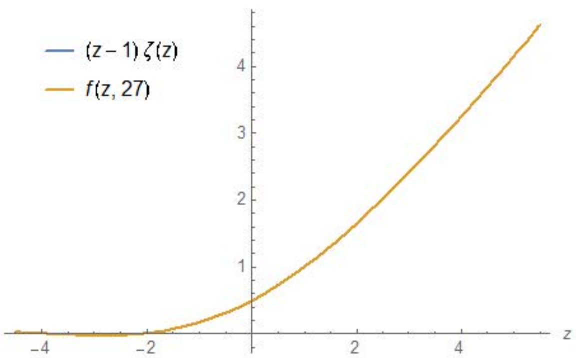
$$\zeta^{(r)}(0) = (-1)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{(s-r)!} - r! \qquad r=0,1,2,\cdots$$

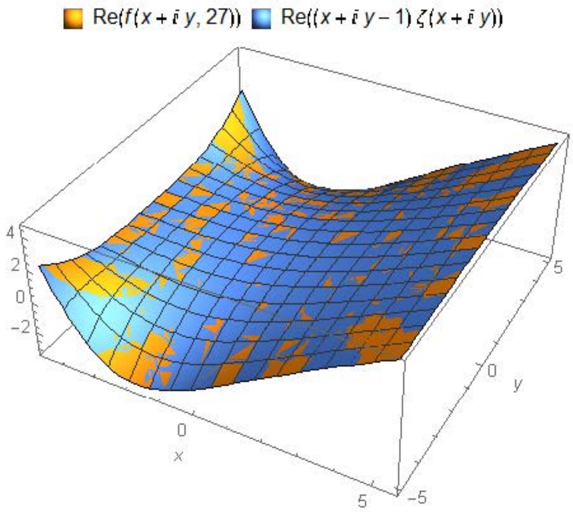
証明

公式 9·3·1 (3.1) より、

$$\begin{aligned} z\zeta(z)-\zeta(z) &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\zeta^{(r)}(0)}{r!}z^{r+1} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\zeta^{(r)}(0)}{r!}z^r \\ &= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\zeta^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}z^r - \left\{\frac{\zeta^{(0)}(0)}{0!}z^0 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\zeta^{(r)}(0)}{r!}z^r\right\} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{r\zeta^{(r-1)}(0)-\zeta^{(r)}(0)}{r!}z^r \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) の2D図とその実数部の3D図を描くと次のようである。左辺が青で右辺が橙である。両図において、収束円の如きものは見られない。(3.2) は全複素平面において成立しているように見える。





同様な方法により、(3.1') から次式が得られる。これもまた全複素平面において成立する。

公式 9·3·2' ((z−1/2) ζ (z+1/2) のマクローリン級数)

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{h_r - 2rh_{r-1}}{r!}z^r\right\} \tag{3.2'}$$

但し、

$$h_r = \frac{2^r}{\zeta(1/2)}\left\{(-1)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^s(s-r)!} - 2r!\right\} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

9･3･3 完備化されたリーマン･ゼータのマクローリン級数

9･1 や 9･2 と同様の方法で、(3.2) , (3.2') を用いて次の定理が得られる。

定理 9･3･3 (ξ(z) のマクローリン級数)

完備化されたリーマン･ゼータ関数 $\xi(z)$ が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、全複素平面上で次式が成立する。

$$\xi(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{\Gamma^{(s-t)}(1)}{2^{s-t}(s-t)!}\frac{2t\zeta_0^{(t-1)}-2\zeta_0^{(t)}}{t!}z^r$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$\Gamma^{(r)}(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$\zeta_0^{(r)} = \begin{cases} 0 & r=-1 \\ (-1)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{(s-r)!} - r! & r=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

cf.

定理 9･1･3 は次のようであった。

$$\xi(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{(-1)^{s-t}g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r$$

但し、

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

この式は

$$\xi(z) = \xi(1-z) = \pi^{\frac{z}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right)\right\}\{-z\zeta(1-z)\}$$

を級数に展開したものである。これは搦手攻めである。短所はやや全体を見渡し難いことである。長所は、$-z\zeta(1-z)$ の微係数が僅か1個のスチルチェス定数 γ_s から得られることである。それ故、高い精度は要求されるが ノートパソコンでもこれらの零点の計算が可能である。

これに対して 定理 9･3･3 は

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\{2(z-1)\zeta(z)\}$$

を級数に展開したものである。これは正攻法である。長所は全体を見渡し易いことである。短所は、$2(z-1)\zeta(z)$ の微係数を得るためにスチルチェス定数 γ_s を無限個累積しなければならないことである。これには高い精度と多大な計算量が要求される。それ故、定理 9･3･3 に従って

ノートパソコンでこれらの零点を計算することはほとんど不可能である。

定理 9･3･3'（$\Xi(z)$ のマクローリン級数 ）

完備化されたリーマン･ゼータ関数 $\Xi(z)$ が次のようであるとする。

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、全複素平面上で次式が成立する。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}\frac{h_t-2th_{t-1}}{t!}z^r$$

$$\Xi(0) = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 0 & r=-1 \\ \displaystyle\frac{2^r}{\zeta(1/2)}\left\{(-1)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^s(s-r)!} - 2r!\right\} & r=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

cf.

定理 9･2･3 は次のようであった。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r$$

但し、

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\frac{2}{\zeta(1/2)}\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

この定理と 定理 9･3･3'は殆ど同じである。両者とも正攻法である。異なるのは正則化された ゼータ関数の微係数の算式である。c_r と h_r を比較すれば、前者は後者の半分の計算量で あることが分かる。この差は小さくない。ノートパソコンを用いて零点における計算をおこなうとき、定理 9･2･3 による計算は何とか可能であるが、定理 9･3･3' による計算は殆ど不可能である。

2018.09.07

Kano Kono

宇宙人の数学