10 完備化されたリーマン・ゼータの零点と係数

前章では、完備化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数が得られた。その級数を0と置けばそれは無限次方程式となる。第8章で見たように、完備化されたリーマン・ゼータはその根(零点)で完全に因数分解される。よって、ヴィエタの公式により、零点(根)と係数の関係式が得られる。

10・1 ξ(z) の零点と係数

10・1・1 ξ(z) のマクローリン級数の係数

完備化されたリーマン・ゼータ $\xi(z)$ のマクローリン級数は 前章 の定理 9・1・3で与えられた。これを少し形を変えて再掲すると次のようになる。

定理 10・1・1

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r \tag{1.0}$$

すると、これらの係数 $A_r \quad r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r = \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!} h_t \tag{1.a}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \cdots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

最初の4つを書き下すと次のようになる。

$$A_0 = \frac{\log^0\pi}{2^0 0!} \frac{(-1)^0 g_0(3/2)}{2^0 0!} h_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{\log^1\pi}{2^1 1!} - \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\gamma_0}{0!}$$

$$A_2 = \frac{\log^2\pi}{2^2 2!} + \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\gamma_1}{1!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}$$

$$A_3 = \frac{\log^3\pi}{2^3 3!} - \frac{g_3(3/2)}{2^3 3!} - \frac{\gamma_2}{2!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!}$$
$$+ \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}$$

数式処理ソフト *Mathematica* により、$A_1 \sim A_4$ を計算するとそれぞれ次のとおり。

$$A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\,(r-s)\,!} \frac{(-1)^{s-t}\, g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}\,(s-t)\,!} h_t$$

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ \sum_{k=1}^{r} \mathrm{BellY}\left[r,\ k,\ \mathrm{Tbl}\psi\left[r,\ \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$h_{r\_} := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)\,!}\right] \qquad \gamma_{s\_} := \mathrm{StieltjesGamma}[s]$$

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]

SetPrecision[{A1, A2, A3, A4}, 12]
{-0.02309570897, 0.02334386453, -0.00049798385, 0.00025318173}
```

10・1・2 $\xi(z)$ の零点と係数の関係

定理 10・1・2

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r \tag{1.0}$$

すると、

(1) $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_k = x_k \pm i y_k$, $y_k \neq 0$ $k=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2 + y_{r_1}^2}$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$\begin{aligned} B_4 = & \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \\ & + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \\ & + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \end{aligned}$$

$\vdots$

$$B_{2n-1} = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_n}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

$$B_{2n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

(2) A_n を 定理 10･1･1 の係数とするとき、$B_n = A_n \quad n=1,2,3,\cdots$ である。

証明

(1)「８ 完備化されたリーマン･ゼータの因数分解 」定理 8･3･1 によれば、リーマン･ゼータ $\zeta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) とするとき、完備化された リーマン･ゼータ（1.0）は次のように因数分解される。

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)$$

他方、無限次方程式偏「３ 無限次方程式における根と係数 」公式 3･5･1 によれば、このような無限乗積 $\xi(z)$ は次のようにマクローリン展開される。

$$\xi(z) = 1+B_1 z^1+B_2 z^2+B_3 z^3+B_4 z^4+\cdots$$

但し、

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$B_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$\vdots$

(2) ベキ級数の一意性により、$B_n = A_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とならねばならない。

Q.E.D.

10・1・3 リーマン仮説と同値な命題1

もしリーマン仮説が真ならば、次の命題が成立しなければならない。

命題 10・1・3

リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点を $z_k = 1/2 \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = -A_1 = 0.0230957089\cdots \tag{1.3$_1$}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)} = A_2 + A_1 = 0.0002481555\cdots \tag{1.3$_2$}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)} = -A_3 - 2\left(A_2 + A_1\right)$$
$$= 0.0000016727\cdots \tag{1.3$_3$}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)\left(1/4+y_u^2\right)}$$
$$= A_4 + 3A_3 + 5\left(A_2 + A_1\right) = 8.021073428\times 10^{-9} \tag{1.3$_4$}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$A_r = \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\,\frac{(-1)^{s-t}g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!}h_t$$

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

同値性の証明

リーマン予想が成立するならば、$\zeta(z)$ の非自明零点 $z_k = x_k \pm i y_k$ の実数部は $x_k = 1/2$ $(k=1,2,3,\cdots)$ である。これを定理 10・1・2 の $B_1 \sim B_4$ に代入すれば、

$$B_1 = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1/4 + y_r^2}$$

$$B_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1/4 + y_r^2}$$

$$B_3 = -\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{2}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}$$

$$B_4 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{u=t+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)\left(1/4+y_u^2\right)}$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{3}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)}$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}$$

定理 10・1・2 (2) により $B_n = A_n \quad n=1,2,3,\cdots$ であるから、$B_1 \sim B_4$ を $A_1 \sim A_4$ に置換して、上から下に順次代入すれば、

$$A_1 = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1/4 + y_r^2}$$

$$A_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)} - A_1$$

$$A_3 = -\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)} - 2\left(A_2 + A_1\right)$$

$$A_4 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{u=t+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)\left(1/4+y_u^2\right)}$$
$$-3A_3 - 5\left(A_2 + A_1\right)$$

これらより、$(1.3_2) \sim (1.3_4)$ を得る。「 8 完備化されたリーマン・ゼータの因数分解 」定理 8・2・4 により (1.3_1) はリーマン仮説と同値である。$(1.3_2) \sim (1.3_4)$ は何らかの形で (1.3_1) を含むから、これらもそれぞれリーマン仮説と同値でなければならない。

Q.E.D.

直接計算

(1.3_1) は 8・2 で既に計算されているので此処では計算しない。

(1.3_2) , (1.3_3) の両辺を数式処理ソフト *Mathematica* により計算すると次のとおり。

f_2 は各 3,000 項計算して小数第5位まで一致、f_3 は各 300 項計算して小数第6位まで一致している。

```
y[r_] := Im[ZetaZero[r]]
```

$$\mathtt{f_2[m\_]} := \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=r+1}^{m}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}$$

```
N[f2[3000]]          N[A2 + A1]
0.000240583          0.000248156
```

$$\mathtt{f_3[m\_]} := \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=r+1}^{m}\sum_{t=s+1}^{m}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)}$$

```
N[f3[300]]           N[-A3 - 2 (A2 + A1)]
1.304663×10^-6       1.67271×10^-6
```

間接計算

直接計算はかくも収束が遅い。そこで次の公式を用いて $(1.3_2)\sim(1.3_4)$ を間接的に計算する。（無限次方程式編「１ 無限級数の累乗」公式 1･3･1 参照。）

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^2=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^2+2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s \tag{3.2}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^3=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^3+3\sum_{r=0}^{\infty}a_r\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s-3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}a_r a_s a_t \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^4=&\;2\sum_{r=0}^{\infty}a_r^4-\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r^2\right)^2+4\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^2\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s\\&-8\sum_{r=0}^{\infty}a_r\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}a_r a_s a_t+8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}a_r a_s a_t a_u\end{aligned} \tag{3.4}$$

(1.3_2) に (3.2) を適用すれば、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2-\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2\right\}$$

右辺に (1.3_1) を代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2+\frac{A_1^2}{2} \tag{1.3₂'}$$

(1.3_3) に (3.3) を適用すれば、

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)}=&\;\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3\\&+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\cdot\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}-\frac{1}{3}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3\end{aligned}$$

右辺に (1.3_1) , (1.3_2) を代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)(1/4+y_t^2)}=\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3+\frac{A_1^3}{3}-A_1(A_2+A_1)$$

(1.3$_3$')

(1.3$_4$) に (3.4) を適用すれば、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)(1/4+y_t^2)(1/4+y_u^2)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^4-\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2\left(\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)}\right)$$

$$+\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)(1/4+y_t^2)}\right)$$

(1.3$_1$)～(1.3$_3$) を右辺に代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)(1/4+y_t^2)(1/4+y_u^2)}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2\right)^2$$

$$+\frac{A_1^4}{8}-\left(\frac{1}{2}A_1-2\right)A_1(A_1+A_2)+A_1A_3$$

となるが、更に、

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2=\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2-2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)}$$

$$=A_1^2-2(A_2+A_1)$$

を用いれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_r^2)(1/4+y_s^2)(1/4+y_t^2)(1/4+y_u^2)}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^4+\frac{A_1^4}{4}-A_1^3+A_1^2\left(\frac{5}{2}-A_2\right)$$

$$+\frac{A_2^2}{2}+A_1(3A_2+A_3)$$

(1.3$_4$')

(1.3$_2$') ～ (1.3$_4$') により (1.3$_2$) ～ (1.3$_4$) の左辺を計算すると次のとおり。

f_2 は500項計算して小数第9位まで一致、f_3 は30項計算して小数第11位まで一致、f_4 は20項計算して小数第14位まで一致している。これらの収束速度は上記の直接計算よりもはるかに速い。

```
y[r_] := Im[ZetaZero[r]]
```

$$f_2[m\_] := -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{1/4+y_r{}^2}\right)^2+\frac{A_1{}^2}{2}$$

`N[f2[500], 7]` → 0.0002481558　　`N[A2 + A1, 7]` → 0.0002481556

$$f_3[m\_] := \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{1/4+y_r{}^2}\right)^3+\frac{A_1{}^3}{3}-A_1(A_1+A_2)$$

`N[f3[30], 7]` → 1.672711×10^{-6}　　`N[-A3 - 2 (A2 + A1), 7]` → 1.672714×10^{-6}

$$f_4[m\_] := -\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{1/4+y_r{}^2}\right)^4+\frac{A_1^4}{4}-A_1^3+A_1^2\left(\frac{5}{2}-A_2\right)+\frac{A_2^2}{2}+A_1(3A_2+A_3)$$

`N[f4[20], 7]` → 8.021074×10^{-9}　　`N[A4 + 3 A3 + 5 (A2 + A1), 7]` → 8.021073×10^{-9}

上記の間接計算は次のようにも記述できる。

命題 10･1･3'

$z_k=1/2\pm iy_k$, $y_k\neq0$ ($k=1,2,3,\cdots$) はリーマン･ゼータ $\zeta(z)$ の非自明な零点で

A_r $r=1,2,3,\cdots$ は定理 10･1･1 で得られる定数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}=-A_1=0.0230957089\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2=A_1^2-2(A_1+A_2)=0.00003710063\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3=-A_1^3+3(A_1-2)(A_1+A_2)-3A_3=0.00000014367786\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^4=A_1^4-4A_1^3+4A_1^2\left(\frac{5}{2}-A_2\right)+4A_1(3A_2+A_3-5)$$
$$+2A_2^2-20A_2-12A_3-4A_4=6.59827915\times10^{-10}$$

cf.

無限次方程式偏「 4 リーマン仮説と同値な級数の和 」命題 4･4･1 は次のようであった。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}=\gamma_0-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2=\gamma_0^2+2\gamma_0+2\gamma_1-\log\pi+\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3 = \gamma_0^3+3\gamma_0^2+6\gamma_0+6\gamma_1+3\gamma_0\gamma_1+\frac{3}{2}\gamma_2-3\log\pi$$
$$+3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{16}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)$$

これらは $A_1 \sim A_3$ を展開したものである。

数値計算

数式処理ソフト *Mathematica* により 命題 10･1･3'の両辺と左辺の右辺に対する比を計算する。臨界線上の零点 y_r は 1 次から 3 次までは 30,000 個、4 次は 600,000 個取る。すると、それぞれ次のようになる。

$$A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\,(r-s)!}\;\frac{(-1)^{s-t}\,g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}\,(s-t)!}\,h_t \qquad y_{r\_} := \mathrm{Im}[\mathrm{ZetaZero}[r]]$$

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ \sum_{k=1}^{r}\mathrm{BellY}\left[r,\ k,\ \mathrm{Tbl}\psi\left[r,\ \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$h_{r\_} := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right] \qquad \gamma_{s\_} := \mathrm{StieltjesGamma}[s]$$

$$\mathrm{Tbl}\psi[r\_,\ z\_] := \mathrm{Table}[\mathrm{PolyGamma}[k,\ z],\ \{k,\ 0,\ r-1\}]$$

1st degree

$$f1[m\_] := \sum_{r=1}^{m}\frac{1}{1/4+y_r^2} \qquad g1 := -A_1$$

```
N[f1[30000]]                N[g1]
0.0230381                   0.0230957
```

$$\frac{0.023038125016396405`}{0.023095708966121044`} = 0.997507$$

2nd degree

$$f2[m\_] := \sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2 \qquad g2 := A_1^2 - 2\,(A_1+A_2)$$

```
SetPrecision[f2[30000], 20]       SetPrecision[g2, 20]
0.000037100636410598344980        0.00003710063643746
```

$$\frac{0.000037100636410598344}{0.000037100636437464873} = 0.99999999927585$$

3rd degree

$$f3[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r^2} \right)^3 \qquad g3 := -A_1^3 + 3(A_1 - 2)(A_1 + A_2) - 3A_3$$

SetPrecision[f3[30000], 25]

$1.436778602886917509211370 \times 10^{-7}$

SetPrecision[g3, 25]

$1.4367786028869177 \times 10^{-7}$

$$\frac{1.4367786028869175092111 \times 10^{-7}}{1.436778602886917748480 \times 10^{-7}} = 0.9999999999999998$$

4th degree

$$f4[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r^2} \right)^4$$

$$g4 := A_1^4 - 4A_1^3 + 4A_1^2 \left(\frac{5}{2} - A_2 \right) + 4A_1 (3A_2 + A_3 - 5) + 2A_2^2 - 20A_2 - 12A_3 - 4A_4$$

SetPrecision[f4[600000], 50]

$6.598279145424011526905050847511845394108119125577 \times 10^{-10}$

SetPrecision[g4, 50]

$6.5982791454240115269050508475141899440 \times 10^{-10}$

$$\frac{6.59827914542401152690505084751184 \times 10^{-10}}{6.59827914542401152690505084751418 \times 10^{-10}}$$

$$= 0.99999999999999999999999999999644$$

リーマン仮説が成立しない確率

上の計算結果を見ると、冪が大きくなるほど近似度が上がっていることが分る。
特に４次の場合、臨界線上の最初の 60 万個の零点の絶対値の逆数の８乗の合計が理論値の 0.999999999999999999999999999999（30N）を占めている。即ち、リーマン仮説が成立する確率は少なくとも 0.999999999999999999999999999999（30N）である。

他方、リーマン仮説が成立しない確率はその余事象に含まれる。従って、**リーマン仮説が成立しない確率は 10^{-30} 未満** である。

参考までに、筆者のパソコン（Intel Core i7-9750H , 16GB）では、上記の４次 60 万個の計算に 28 時間を要した。ラップトップパソコンと４次式ではこの辺が限界と思われる。

より高精度の確率計算

スーパー・コンピューターを用い、定理 10·1·1 と 定理 10·1·2 に従って A_n , B_n を計算し、A_n/B_n または $1 - A_n/B_n$ を求める。この方法ならば 次数 n も精度もスパコンに応じて大きく取ることが出来る。

10･2 $\Xi(z)$ の零点と係数

10･2･1 $\Xi(z)$ のマクローリン級数の係数

完備化されたリーマン･ゼータ $\Xi(z)$ のマクローリン級数は、前章 9･2･3 で与えられた。これを少し形を変えて再掲すると次のようになる。

定理 10･2･1

完備化されたリーマン･ゼータ関数 $\Xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{2.0}$$

$$= \Xi(0)\left(1+A_1 z^1+A_2 z^2+A_3 z^3+A_4 z^4+\cdots\right)$$

すると、これらの係数 $A_r \quad r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r = \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}h_t \tag{2.a}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\frac{2}{\zeta(1/2)}\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

最初の4つを書き下すと次のようになる。

$$A_0 = \frac{\log^0\pi}{2^0 0!}\frac{g_0(5/4)}{2^0 0!}h_0 = 1$$

$$A_1 = -\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}+\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}+h_1$$

$$A_2 = \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}+\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}+h_2-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}+\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}h_1-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}h_1$$

$$A_3 = -\frac{\log^3\pi}{2^3 3!}+\frac{g_3(5/4)}{2^3 3!}+h_3+\frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}+\frac{\log^2\pi}{2^2 2!}h_1+\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}h_1$$
$$-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}h_2+\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}h_2-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}h_1$$

数式処理ソフト*Mathematica* により、$A_1 \sim A_8$ を計算するとそれぞれ次のとおり。

$$\mathbf{A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{Log[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\ (r-s)\ !}\frac{g_{s-t}[5/4]}{2^{s-t}\ (s-t)\ !}h_t}$$

$$\mathbf{g_{r\_}\left[\frac{5}{4}\right] := If\left[r == 0,\ 1,\ \sum_{k=1}^{r} BellY\left[r,\ k,\ Tbl\psi\left[r,\ \frac{5}{4}\right]\right]\right]}$$

```
h_r_ := If[r == 0, 1, 2/Zeta[1/2] Sum[(-1)^r γ_{s-1}/(s-1)! Binomial[s, r] (1/2)^(s-r), {s, r, 1000}]]
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r-1}]      γ_s_ := StieltjesGamma[s]
```

```
SetPrecision[{A2, A4, A6, A8}, 15]
{0.0231049931154, 0.00024833405379, 1.67435263×10^-6, 8.030697×10^-9}
```

```
SetPrecision[{A1, A3, A5, A7}, 15]
{0.×10^-14, 0.×10^-14, 0.×10^-15, 0.×10^-16}
```

10･2･2 $\varXi(z)$ の零点と係数の関係

定理 10･2･2

完備化されたリーマン･ゼータ関数 $\varXi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\varXi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{2.0}$$
$$= \varXi(0)\left(1+B_1z^1+B_2z^2+B_3z^3+B_4z^4+\cdots\right)$$

すると、

(1) $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_k=x_k\pm iy_k$,$y_k\neq 0$ $k=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$\varXi(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2(x_{r_1}-1/2)}{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2(x_{r_1}-1/2)(x_{r_2}-1/2)}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}}$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3(x_{r_1}-1/2)(x_{r_2}-1/2)(x_{r_3}-1/2)}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}\left\{(x_{r_3}-1/2)^2+y_{r_3}^2\right\}}$$
$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left\{(x_{r_1}-1/2)+(x_{r_2}-1/2)\right\}}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}}$$

$$B_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4(x_{r1}-1/2)(x_{r2}-1/2)\cdots(x_{r4}-1/2)}{\left\{(x_{r1}-1/2)^2+y_{r1}^2\right\}\left\{(x_{r2}-1/2)^2+y_{r2}^2\right\}\cdots\left\{(x_{r4}-1/2)^2+y_{r4}^2\right\}}$$
$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left\{(x_{r1}-1/2)(x_{r2}-1/2)+\cdots+(x_{r2}-1/2)(x_{r3}-1/2)\right\}}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}\left\{(x_{r_3}-1/2)^2+y_{r_3}^2\right\}}$$
$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}}$$

⋮

(2) A_n を **定理 10・2・1** の係数とするとき、$B_n = A_n \quad n=1,2,3,\cdots$ である。

証明

(1)「**8 完備化されたリーマン・ゼータの因数分解**」定理 8・4・1 によれば、リーマン・ゼータ $\zeta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) とするとき、完備化されたリーマン・ゼータ (2.0) は次のように因数分解される。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

$$\text{但し、}\Xi(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

他方、無限次方程式偏「**3 無限次方程式における根と係数**」公式 3・5・1 によれば、無限乗積

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

は次のようにマクローリン展開される。

$$f(z) = 1+B_1z^1+B_2z^2+B_3z^3+B_4z^4+\cdots$$

但し、

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2(x_{r_1}-1/2)}{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2(x_{r_1}-1/2)(x_{r_2}-1/2)}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}}$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3(x_{r_1}-1/2)(x_{r_2}-1/2)(x_{r_3}-1/2)}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}\left\{(x_{r_3}-1/2)^2+y_{r_3}^2\right\}}$$
$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left\{(x_{r_1}-1/2)+(x_{r_2}-1/2)\right\}}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}}$$

$$B_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4(x_{r1}-1/2)(x_{r2}-1/2)\cdots(x_{r4}-1/2)}{\left\{(x_{r1}-1/2)^2+y_{r1}^2\right\}\left\{(x_{r2}-1/2)^2+y_{r2}^2\right\}\cdots\left\{(x_{r4}-1/2)^2+y_{r4}^2\right\}}$$
$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left\{(x_{r1}-1/2)(x_{r2}-1/2)+\cdots+(x_{r2}-1/2)(x_{r3}-1/2)\right\}}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}\left\{(x_{r_3}-1/2)^2+y_{r_3}^2\right\}}$$
$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left\{(x_{r_1}-1/2)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{(x_{r_2}-1/2)^2+y_{r_2}^2\right\}}$$

⋮

$\Xi(z) = \Xi(0)f(z)$ であるから、(1) が成立する。

(2) ベキ級数の一意性により、$B_n = A_n \quad n=1,2,3,\cdots$ となならねばならない。

Q.E.D.

10・2・3 リーマン仮説と同値な命題2

もしリーマン仮説が真ならば、次の命題が成立しなければならない。

命題 10・2・3

リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点を $z_k = 1/2 \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2} = A_2 = 0.0231049931\cdots \tag{2.3$_2$}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2} = A_4 = 0.0002483340\cdots \tag{2.3$_4$}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2 y_{r_3}^2} = A_6 = 0.00000167435\cdots \tag{2.3$_6$}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2 y_{r_3}^2 y_{r_4}^2} = A_8 = 8.030697\times 10^{-9} \tag{2.3$_8$}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2\cdots y_{r_{2n}}^2} = A_{2n}$$

$$= \sum_{s=0}^{2n}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{2n-s}\frac{\log^{2n-s}\pi}{2^{2n-s}(r-s)!}\,\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}h_t \tag{2.3$_{2n}$}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)}\displaystyle\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

同値性の証明

リーマン予想が成立するならば、$\zeta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm iy_k$ の実数部は $x_k = 1/2$ ($k=1,2,3,\cdots$) である。これを定理 10・2・2 の各式に代入し B_r を A_r に置換して与式を得る。

「 8 完備化されたリーマン・ゼータの因数分解 」定理 8・2・4 により、(2.3$_2$) はリーマン仮説と同値である。(2.3$_4$) ~ (2.3$_{2n}$) は何らかの形で (2.3$_2$) を含むから、これらもそれぞれリーマン仮説と同値でなければならない。

直接計算

(2.3$_2$), (2.3$_4$), (2.3$_6$) の両辺を数式処理ソフト *Mathematica* により計算すると次のとおり。
B_2 は 100,000 項計算して小数第3位まで一致、B_4 は各3,000 項計算して小数第5位まで一致
B_6 は各 300 項計算して小数第6位まで一致している。

```
y_r := Im[ZetaZero[r]]
```

$B_2[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{y_r^2}$	N[B$_2$[100000]] 0.0230829	N[A$_2$] 0.023105
$B_4[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m} \frac{1}{y_r^2 y_s^2}$	N[B$_4$[3000]] 0.000240759	N[A$_4$] 0.000248334
$B_6[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m} \sum_{t=s+1}^{m} \frac{1}{y_r^2 y_s^2 y_t^2}$	N[B$_6$[300]] 1.30603×10^{-6}	N[A$_6$] 1.67435×10^{-6}

間接計算

ここでは、(2.3$_2$) は計算せず、$B_2 = A_2 = 0.02310499311\cdots$ とする。そしてこれを用いて (2.3$_4$) ~ (2.3$_8$) の左辺を間接的に計算する。

無限次方程式編「1 無限級数の累乗 」公式 1·3·1 によれば、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^2 + 2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s \tag{3.2}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^3 + 3\sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s - 3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^4 =& 2\sum_{r=0}^{\infty} a_r^4 - \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r^2\right)^2 + 4\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2 \cdot \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s \\ & - 8\sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t + 8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} a_r a_s a_t a_u\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで、$r=0$ を $r=1$ に置換し a_r を $1/y_r^2$ 置換すれば、

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2}\right)^2 = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{y_r^2}\right)^2 + 2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2 y_s^2}$$

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2}\right)^3 = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{y_r^2}\right)^3 + 3\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2}\cdot\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2 y_s^2} - 3\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2 y_s^2 y_t^2}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2}\right)^4 =& 2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{y_r^2}\right)^4 - \left\{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{y_r^2}\right)^2\right\}^2 + 4\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2}\right)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2 y_s^2} \\ & - 8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2}\cdot\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2 y_s^2 y_t^2} + 8\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2 y_s^2 y_t^2 y_u^2}\end{aligned}$$

(2.3$_2$) ~ (2.3$_8$) をこれらに代入すれば

$$A_2^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^4} + 2A_4 \tag{w4}$$

$$A_2^3 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^6} + 3A_2 A_4 - 3A_6 \tag{w6}$$

$$A_2^4 = 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^8} - \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^4} \right)^2 + 4A_2^2 A_4 - 8A_2 A_6 + 8A_8$$

$$= 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^8} - \left(A_2^2 - 2A_4 \right)^2 + 4A_2^2 A_4 - 8A_2 A_6 + 8A_8$$

i.e.

$$A_2^4 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^8} - 2A_4^2 + 4A_2^2 A_4 - 4A_2 A_6 + 4A_8 \tag{w8}$$

(w4), (w6), (w8) より

$$A_4 = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^4} + \frac{1}{2}A_2^2 \quad , \quad A_6 = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^6} - \frac{1}{3}A_2^3 + A_2 A_4$$

$$A_8 = -\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^8} + \frac{1}{4}A_2^4 + \frac{1}{2}A_4^2 - A_2^2 A_4 + A_2 A_6$$

$A_n = B_n \quad n=1,2,3,\cdots$ であるから、

$$B_4 = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^4} + \frac{1}{2}A_2^2 \tag{2.3$_4$'}$$

$$B_6 = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^6} - \frac{1}{3}A_2^3 + A_2 A_4 \tag{2.3$_6$'}$$

$$B_8 = -\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{y_r^8} + \frac{1}{4}A_2^4 + \frac{1}{2}A_4^2 - A_2^2 A_4 + A_2 A_6 \tag{2.3$_8$'}$$

我々は、

$$B_4 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{y_r^2 y_s^2} \quad , \quad B_6 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{y_r^2 y_s^2 y_t^2} \quad , \quad B_8 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} \frac{1}{y_r^2 y_s^2 y_t^2 y_u^2}$$

の代わりに (2.3$_4$'), (2.3$_6$'), (2.3$_8$') を計算すればよい。

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

B_4 は 500 項計算して小数第9位まで一致、B_6 は 30 項計算して小数第11位まで一致、B_8 は 20 項計算して小数第13位まで一致している。これらの収束は上記の直接計算よりも非常に速い。

$$B_4[m\_] := -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{y_r^4} + \frac{A_2^2}{2}$$

N[B4[500]]
0.000248334

N[A4]
0.000248334

$$B_6[m\_] := \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{y_r^6} + A_2 A_4 - \frac{A_2^3}{3}$$

N[B6[30]]
1.67435×10^{-6}

N[A6]
1.67435×10^{-6}

$B_8[m\_] := -\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{y_r{}^8} + \frac{A_2{}^4}{4} + \frac{A_4{}^2}{2} - A_2{}^2 A_4 + A_2 A_6$　　N[B_8[20]]　8.0307×10^{-9}　　N[A_8]　8.0307×10^{-9}

(w4), (w6), (w8) は次のようにも記述できる。

命題 10･2･3’

$z_k = 1/2 \pm i y_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) はリーマン･ゼータ $\zeta(z)$ の非自明な零点で A_r $r=1,2,3,\cdots$ は定理 10･2･1 で得られる定数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^4} = A_2^2 - 2A_4 = 0.00003717259\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^6} = A_2^3 - 3A_2A_4 + 3A_6 = 0.00000014417393\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^8} = A_2^4 + 2A_4^2 - 4A_2^2A_4 + 4A_2A_6 - 4A_8 = 6.6303\times 10^{-10}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。右辺の計算にはより高い精度が要求される。

$y_{r\_} := \mathrm{Im}[\mathrm{ZetaZero}[r]]$

$N\left[\left\{\sum_{r=1}^{2000}\frac{1}{y_r{}^4},\ A_2{}^2 - 2A_4\right\},\ 7\right]$

$\{0.00003717258,\ 0.0000371726\}$

$N\left[\left\{\sum_{r=1}^{100}\frac{1}{y_r{}^6},\ A_2{}^3 - 3A_2A_4 + 3A_6\right\},\ 7\right]$

$\{1.441738\times 10^{-7},\ 1.44174\times 10^{-7}\}$

$N\left[\left\{\sum_{r=1}^{25}\frac{1}{y_r{}^8},\ A_2{}^4 + 2A_4{}^2 - 4A_2{}^2A_4 + 4A_2A_6 - 4A_8\right\},\ 10\right]$

$\{6.63030429\times 10^{-10},\ 6.63032\times 10^{-10}\}$

以上の計算結果を見る限りでは、リーマン予想は成立しそうに見える。

2018.09.12
2018.09.19 4乗と8乗を第2節に追加。
2024.12.10 リーマン仮説が成立しない確率を第1節に追加。

河野 和
広島市

宇宙人の数学