11 リーマン・ゼータの臨界線上の零点

11・1 符号関数による計算

11・1・0 $\varXi(z)$関数による計算

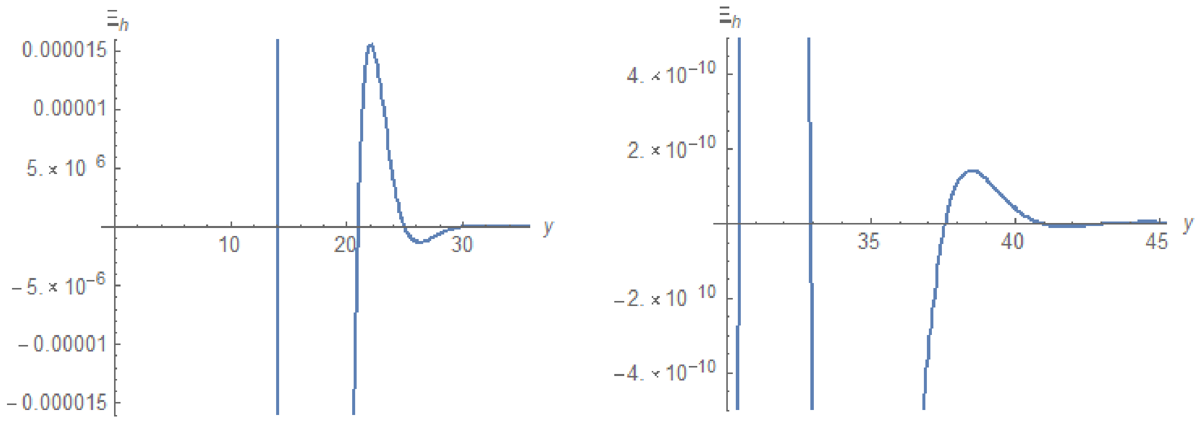
「 7 完備化されたリーマン・ゼータ 」によると、$\varXi(z)$ 関数は次のようであった。

$$\varXi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{1.0z}$$

そして 7・4・1 によれば、この関数の零点は全てリーマン・ゼータ $\zeta(1/2+z)$ の非自明な零点に一致している。従って、$z=0+iy$ と置けば、

$$\varXi_h(y) = -\left(\frac{1}{2}+iy\right)\left(\frac{1}{2}-iy\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{1.0y}$$

この関数の零点は全てリーマン・ゼータ $\zeta(z)$ の臨界線上の零点になる。そこでこれを描いてみると次のようになる。



左図は $y=35$ まで描いているがこの付近の零点は判別できない。右図はこれを拡大して $y=30$ から $y=45$ まで描いているがやはりこの付近の零点は判別できない。

それでも *Mathematica* の場合、$y=917$ 程度までは拡大率を上げて何とか零点を見つけることができるが、$y=917$ を超えると作図が出来なくなる。つまり、$\varXi(z)$ 関数は解析的に非常に優れた性質を持つ半面、数値計算には不向きである。

11・1・1 符号関数による計算

この原因は y が大きいところにおける $\varXi_h(y)$ の関数値が余りにも小さいことであった。それならば、関数値を大きくしてやれば良いと考えるのは自然な発想である。そこで、$\varXi_h(y)$ を正規化し、これを**符号関数**と呼ぶことにする。即ち、

$$sgn(y) = -\frac{\varXi_h(y)}{|\varXi_h(y)|}$$

「 07 完備化されたリーマン・ゼータ 」7・4・1 (4) によれば、任意の実数 y について $Im\{\varXi_h(y)\}=0$ であるから、

$$sgn(y) = -\frac{\Xi_h(y)}{|\Xi_h(y)|}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+iy\right)\left(\frac{1}{2}-iy\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\left(\frac{1}{2}+iy\right)\left(\frac{1}{2}-iy\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|}$$

ここで、

$$\left(\frac{1}{2}+iy\right)\left(\frac{1}{2}-iy\right)\Big/\left|\left(\frac{1}{2}+iy\right)\left(\frac{1}{2}-iy\right)\right| = \left(\frac{1}{4}+y^2\right)\Big/\left|\frac{1}{4}+y^2\right| = 1$$

$$(\because \quad y: \ real\ number)$$

$$\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)}\Big/\left|\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)}\right| = \pi^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{iy}{2}}\Big/\left|\pi^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{iy}{2}}\right| = \pi^{-\frac{iy}{2}}$$

$$\left(\because \quad \left|\pi^{-iy/2}\right| = 1\right)$$

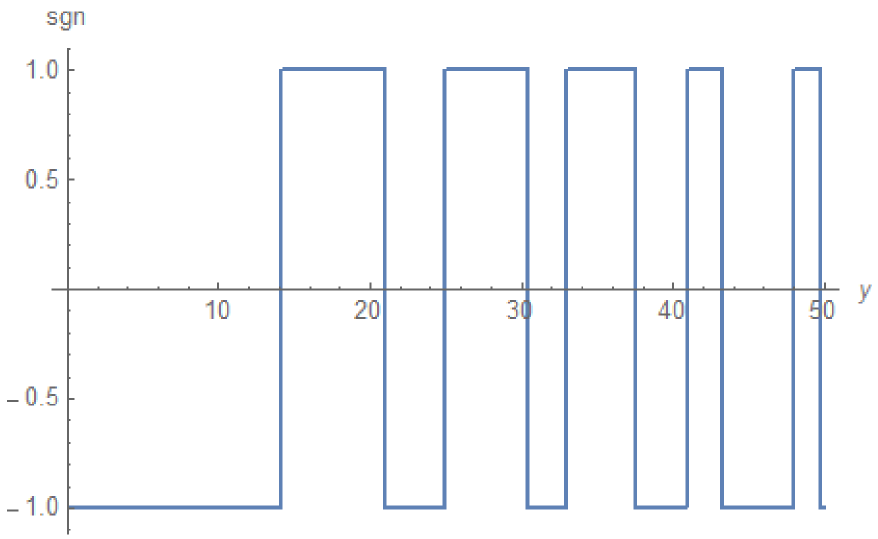
であるから、

$$sgn(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|} \tag{1.1}$$

Note 描画時の注意

(1.1) の分子は理論上は実数である。しかし数値計算上は微小な虚数を含む。数値を求めるときは虚数部を無視すれば問題ないが、描画時は $sgn(y)$ が複素数とみなされて描画できないことがある。その場合は、$Re[sgn(y)]$ として描画すれば良い。

この関数はその絶対値が1であるから、$\Xi_h(y)$ の零点を判別し易いに違いない。実際、これを描くと次のようになる。



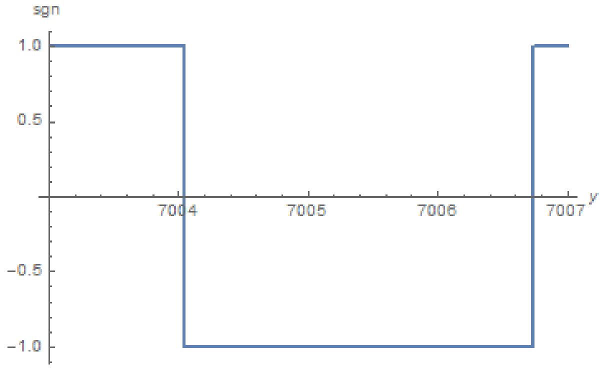
この関数ならば $\Xi_h(y)$ の零点を確実に見つけることができるように思われる。零点と思しき付近から2分法で近づいて行って $sgn(y)$ の値が不定(*indeterminate*)になる点が零点である。

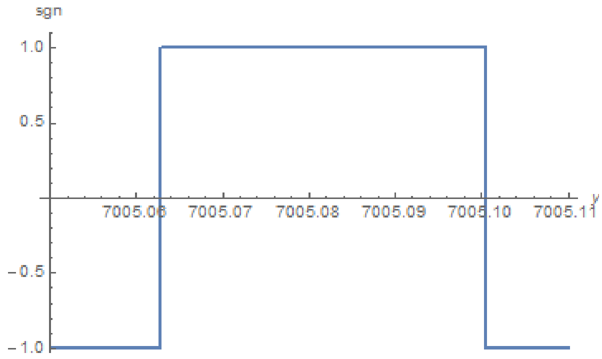
しかしながら、2分法は効率が悪い。この関数は零点のおおよその位置を見つけるためにのみ使用し、具体的な零点の値は $\zeta(1/2+iy)$ から直接求めるのが賢明である。例えば、y=48 付近の零点の場合、*Mathematica* の *FindRoot* 関数を用いて次のように求める。(虚数部は無視。)

$$\text{FindRoot}\left[\text{Zeta}\left[\frac{1}{2}+i\,y\right],\{y,48\}\right] \qquad \{y\to 48.0052-1.72833\times10^{-15}\,i\}$$

レーマ現象

零点の位置を見出すことに関しては符号関数 $sgn(y)$ は確実であるように見える。ところが、次のような事例が存在する。

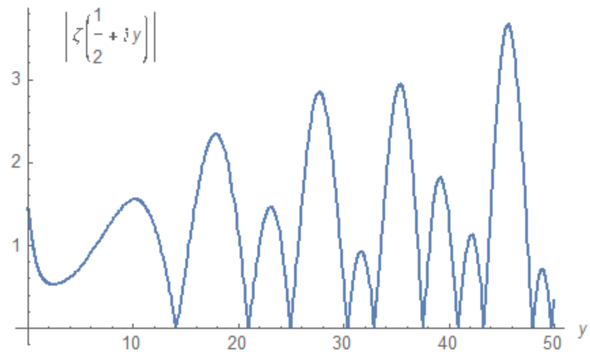


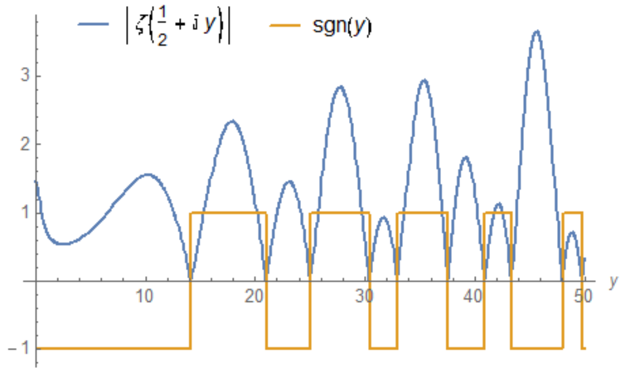


左図において y=7005 付近には零点が見当たらない。ところがこの付近を拡大して見ると右図のように、零点が2か所存在する。この幅は 0.037 と非常に狭いため、左図においては無視されたものである。このような事例はレーマ現象(*Lehmer's Phenominon*)と呼ばれる。
符号関数 $sgn(y)$ にはこのような現象を見逃し易いと言う欠点がある。

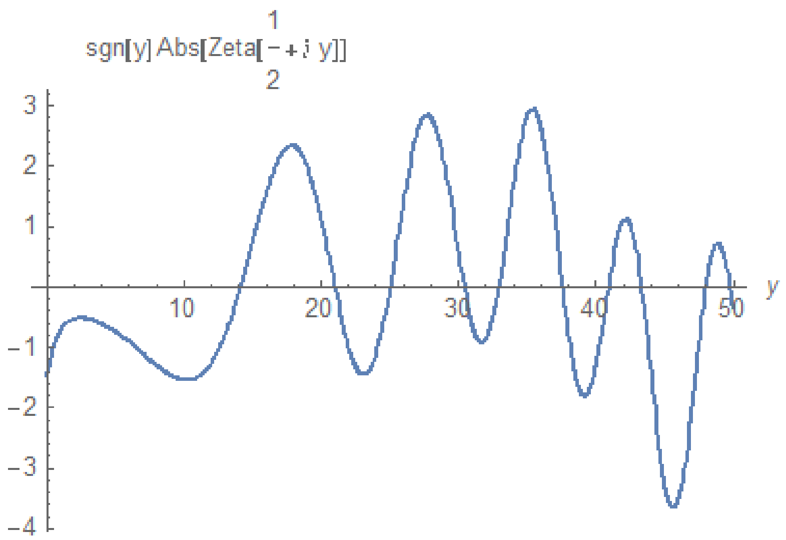
11・2 $|\zeta(1/2+iy)|$ の符号反転

リーマン・ゼータ関数 $\zeta(1/2+iy)$ の絶対値を描いて見ると左図のようである。
これに前節の符号関数 $sgn(y)$ を重ねて描くと右図のようになる。





注目すべきは右図である。負になって欲しい区間の $sgn(y)$ の値が正確に負である。両者の積は滑らかな関数になることが期待される。実際、両者の積を描くと次のようになる。



当然ながら、この関数の零点は全てリーマン・ゼータ $\zeta(z)$ の臨界線上の零点になる。しかも絶対値は $\Xi_h(y)$ よりもはるかに大きい。

Z 関数

この積を **Z 関数**と呼ぶことにすれば、それは以下のように表される。

$$Z(y) = sgn(y)\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|$$

これに前節の

$$sgn(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|} \tag{1.1}$$

を代入すれば、

$$Z(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|$$

これより

$$Z(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\right|}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{2.1}$$

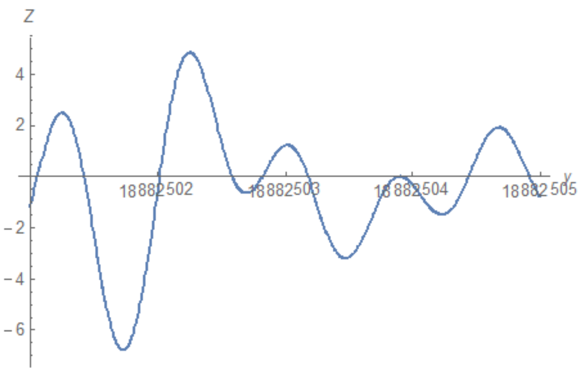
この関数を用いれば、曲線と y 軸との交点によって $\zeta(z)$ の臨界線上の零点を探すことができる。

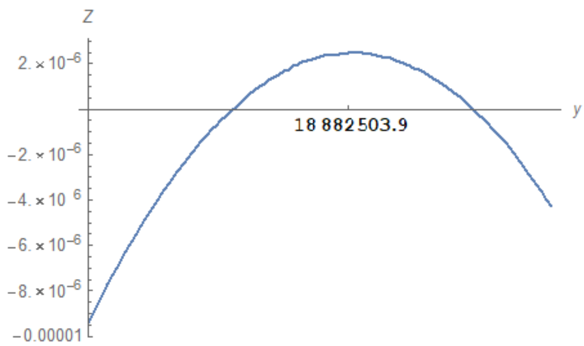
Note 描画時の注意

(2.1) の分子は理論上は実数である。しかし数値計算上は微小な虚数を含む。数値を求めるときは虚数部を無視すれば問題ないが、描画時は $Z(y)$ が複素数とみなされて描画できないことがある。その場合は、$Re\,[Z(y)]$ として描画すれば良い。

レーマ現象

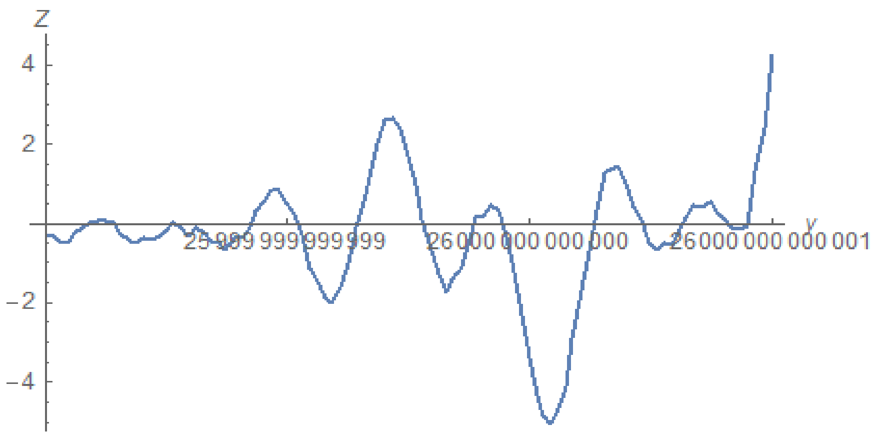
この関数を用いて y=18882504 付近の零点を描くと次のようになる。左図において零点は判別が困難である。Z 関数においてレーマ現象はこのような形で現れる。しかし、これを拡大すれば右図のように零点の判別が出来る。この点において Z 関数は前節の $sgn(y)$ よりも危険が少ない。





y = 26 兆 付近の零点

(2.1) と *Mathematica* を用いてこの付近を描画してみると、次のようになる。



この図の右端付近の零点を求めると、

```
N[Z[26000000000000.883]]
0.0714604 - 0.00599445 ⅈ
```

```
N[Z[26000000000000.8831]]
Indeterminate
```

$$N\left[Zeta\left[\frac{1}{2}+i\,26000000000000.8831\right]\right]$$

0.0000988717 + 0.000250425 ⅈ

Mathematica にはリーマン・ジーゲルの漸近公式を組み込んだ専用の関数 *RiemannSiegel Z* が実装されているが、これを用いてもこの辺りが限度である。つまり、(2.1) は *RiemannSiegel Z* と 遜色がない。これは驚きである。(2.1) を用いても *Mathematica* が勝手に *RiemannSiegel Z* を使用しているとしか考えられない。

11･3 リーマン･ジーゲルのZ関数

　前節の Z 関数は出自も形もリーマン･ジーゲルの Z 関数とは異なるが、同一の関数である。実際、前者から後者を導出することが出来る。そのために、先ず、*Lemma* を1つ用意する。

Lemma 11.3.1

$f(z)$を領域 D 上に定義された複素関数とするとき、次式が成立する。

$$e^{i\,Im\log f(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

証明

　関数 $f(z)$ を極形式で表示すれば

$$f(z) = |f(z)|\,e^{i\,Arg\,f(z)}$$

他方、

$$\log f(z) = |f(z)| + i\,Arg\,f(z)$$

これより、

$$Im\log f(z) = Arg\,f(z)$$

これを上に代入すれば

$$f(z) = |f(z)|\,e^{i\,Im\log f(z)}$$

これより与式を得る。

リーマン･ジーゲルのZ関数

　前節より、

$$Z(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\right|}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{2.1}$$

ガンマ関数に*Lemma* 11.3.1 を適用すれば、

$$Z(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}}e^{i\,Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

$$= e^{i\left[Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}-\frac{iy}{2}\log\pi\right]}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

ここで

$$\theta(y) = Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\} - \frac{y}{2}\log\pi$$

と置けば、

$$Z(y) = e^{i\theta(y)}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{3.1}$$

これはリーマン･ジーゲルZ関数の定義式である。

Note

(3.1) と *Mathematica* を用いた計算速度も異常である。専用の関数 *RiemannSiegel Z* を使わなければ有り得ない速さである。

2019.03.20

Kano Kono

宇宙人の数学