12 リーマン・ゼータの零点と連立無限次方程式

要　旨

(1) リーマンゼータ関数の零点を求める問題は、関数等式により、過剰決定系の連立無限次方程式に帰着する。
(2) 臨界線上ではこの連立無限次方程式は解を持つ。
(3) 臨界線外ではこの連立無限次方程式は解を持ちそうにない。

12・1 $\zeta(z)$ と $\zeta(1-z)$ のローラン級数

「09 リーマン・ゼータ等の実数部虚数部別ベキ級数 」（ ディリクレ級数編 ）公式 9・3・1 によれば、リーマン・ゼータ $\zeta(z)$ のローラン級数は次のようであった。

公式 12・1・1 (公式 9・3・1の再掲)

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ ($z=x+iy$)、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ 、とするとき、$z=1$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!}=u(z)+i\,v(z)$$

$$u(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

これより直ちに次の公式が得られる。

公式 12・1・2

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(1-z)$ ($z=x+iy$)、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=0$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta(1-z)=-\frac{1}{z}+\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{z^s}{s!}=u(z)+i\,v(z)$$

$$u(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

上記2つの公式において z を $1/2+z$ に置換して次の公式を得る。

公式 12･1･3

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(1/2+z)$ $(z=x+iy)$、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=1/2$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) = -\frac{1}{1/2-z} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(1/2-z)^s}{s\,!} = u_+(z)+i\,v_+(z)$$

$$u_+(x,y) = -\frac{1/2-x}{(1/2-x)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{(1/2-x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v_+(x,y) = -\frac{y}{(1/2-x)^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{(1/2-x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

但し、$0^0=1$

公式 12･1･4

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(1/2-z)$ $(z=x+iy)$、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=-1/2$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta\left(\frac{1}{2}-z\right) = -\frac{1}{1/2+z} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(1/2+z)^s}{s\,!} = u_-(z)+i\,v_-(z)$$

$$u_-(x,y) = -\frac{1/2+x}{(1/2+x)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{(1/2+x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v_-(x,y) = \frac{y}{(1/2+x)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{(1/2+x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

但し、$0^0=1$

12･2 偶関数と奇関数

本節では、前節で得たリーマン･ゼータ関数 $\zeta(1/2\pm z)$ を偶関数と奇関数に組み替える。そして、これらを更に実部･虚部別に級数展開する。

定理 12･2･0

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(1/2\pm z)$、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$\zeta(1/2\pm z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式が解を持つことである。

$$\begin{cases} \zeta_e(z) = -\dfrac{1/2}{1/4-z^2} + \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{z^{2s}}{(2s)!} = 0 \\ \zeta_o(z) = -\dfrac{z}{1/4-z^2} - \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2s+1+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} = 0 \end{cases}$$

但し、$0^0=1$

証明

前節では次の2式が得られた。

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) = -\frac{1}{1/2-z} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(1/2-z)^s}{s!} \qquad (=:\zeta_+(z))$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}-z\right) = -\frac{1}{1/2+z} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(1/2+z)^s}{s!} \qquad (=:\zeta_-(z))$$

関数等式により、$\zeta(z)$ の零点では $\zeta(z)=\zeta(1-z)=0$ とならねばならない。
従って、$\zeta(1/2+z)$ の零点では次式が成立しなければならない。

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \zeta\left(\frac{1}{2}-z\right) = 0$$

級数で表すと

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{1/2-z} + \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\left(\frac{1}{2}-z\right)^s = 0 \\ -\dfrac{1}{1/2+z} + \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\left(\frac{1}{2}+z\right)^s = 0 \end{cases}$$

ここで

$$(a+b)^s = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}a^{s-t}b^t$$

であるから

$$\left(\frac{1}{2}-z\right)^s = \sum_{t=0}^{s}(-1)^t\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t$$

$$\left(\frac{1}{2}+z\right)^s = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t$$

これらを上に代入すると

$$-\frac{1}{1/2-z}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\sum_{t=0}^{s}(-1)^t\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t=0 \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{1/2+z}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t=0 \tag{2.2}$$

(2.1) + (2.2) は

$$\frac{1}{1/2-z}+\frac{1}{1/2+z}=\frac{1/2+z+1/2-z}{(1/2-z)(1/2+z)}=\frac{1}{1/4-z^2}$$

$$\sum_{t=0}^{s}(-1)^t\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t+\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t=2\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{2t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2t}z^{2t}$$

であるから

$$-\frac{1}{1/4-z^2}+2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{2t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2t}z^{2t}=0$$

(2.1) − (2.2) は

$$\frac{1}{1/2-z}-\frac{1}{1/2+z}=\frac{1/2+z-(1/2-z)}{(1/2-z)(1/2+z)}=\frac{2z}{1/4-z^2}$$

$$\sum_{t=0}^{s}(-1)^t\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t-\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-t}z^t=-2\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{2t+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2t-1}z^{2t+1}$$

であるから

$$-\frac{2z}{1/4-z^2}-2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{2t+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2t-1}z^{2t+1}=0$$

即ち

$$\zeta_e(z)=-\frac{1/2}{1/4-z^2}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{2t}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2t}z^{2t}=0$$

$$\zeta_o(z)=-\frac{z}{1/4-z^2}-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{2t+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2t-1}z^{2t+1}=0$$

これらは何れも正しいが少し非効率である。そこでこれらを並べ替え且つ s と t を入れ替えて次のようにする。

$$\zeta_e(z)=-\frac{1/2}{1/4-z^2}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=2s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{t!}\binom{t}{2s}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2s}z^{2s}=0$$

$$\zeta_o(z)=-\frac{z}{1/4-z^2}-\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=2s+1}^{\infty}\frac{\gamma_t}{t!}\binom{t}{2s+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2s-1}z^{2s+1}=0$$

ここで

$$\sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{t!}\binom{t}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}=\frac{1}{s!}\sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}=\frac{1}{s!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$$

であるから、これを上に適用すれば

$$\zeta_e(z) = -\frac{1/2}{1/4-z^2} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{z^{2s}}{(2s)!} = 0$$

$$\zeta_o(z) = -\frac{z}{1/4-z^2} - \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2s+1+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} = 0$$

逆に $\zeta_e(z)=\zeta_o(z)=0$ ならば、以上の逆を辿ることにより $\zeta(1/2+z)=\zeta(1/2-z)=0$ に帰着する。 Q.E.D.

関数 $\zeta_e(z)$, $\zeta_o(z)$ は更に実部・虚部別に級数展開できる。

公式 12･2･1（偶関数）

$$\zeta_e(z) = -\frac{1/2}{1/4-z^2} + \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

$$u_e(x,y) = -\frac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_e(x,y) = -\frac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、

$$f^{(s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s} \right\}, \quad 0^0=1$$

証明

定理 12･2･0 より

$$\zeta_e(z) = -\frac{1/2}{1/4-z^2} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

ここで

$$f^{(s)}(0) := \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

と置けば

$$f^{(2s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

よって

$$\zeta_e(z) = -\frac{1/2}{1/4-z^2} + \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

「 14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」（ アラカルト編 ）公式 14･1･2” によれば、

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!} = u(x,y)+i\,v(x,y)$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$

$\zeta_e(z)$ の第1項を実部虚部別に分解し 第2項にこの公式を適用して与式を得る。

公式 12･2･2 (奇関数)

$$\zeta_o(z) = -\frac{z}{1/4-z^2} - \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s+1)}(0)\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

$$u_o(x,y) = -\frac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_o(x,y) = -\frac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、

$$f^{(s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}\right\}, \quad 0^0 = 1$$

証明

定理 12･2･0 と「 14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」(アラカルト編) 公式 14･1･2' により、公式 12･2･1 と類似の方法で証明される。

Note

$$f^{(s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}\right\}$$

本章では 描画には { } を用いる。*Mathematica* においては描画速度が 6~9 倍異なるからである(原因不明)。

12・3 零点のための必要十分条件

定理 12・3・1

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(1/2\pm z)$ $(z=x+iy)$、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$\zeta(1/2\pm z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式が解を持つことである。

$$\begin{cases} u_e = -\dfrac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_e = -\dfrac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \\ u_o = -\dfrac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_o = -\dfrac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \end{cases}$$

但し、 $f^{(s)}(0)=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{=\sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}\right\},\quad 0^0=1$

証明

定理 12・2・0 を 公式 12・2・1 と 公式 12・2・2 で記述することにより直ちに得る。

過剰決定系

2個の変数に対して4個の式があるから、この連立方程式は過剰決定系である。このような連立方程式は一般的には解を持たない。

臨界線上の零点

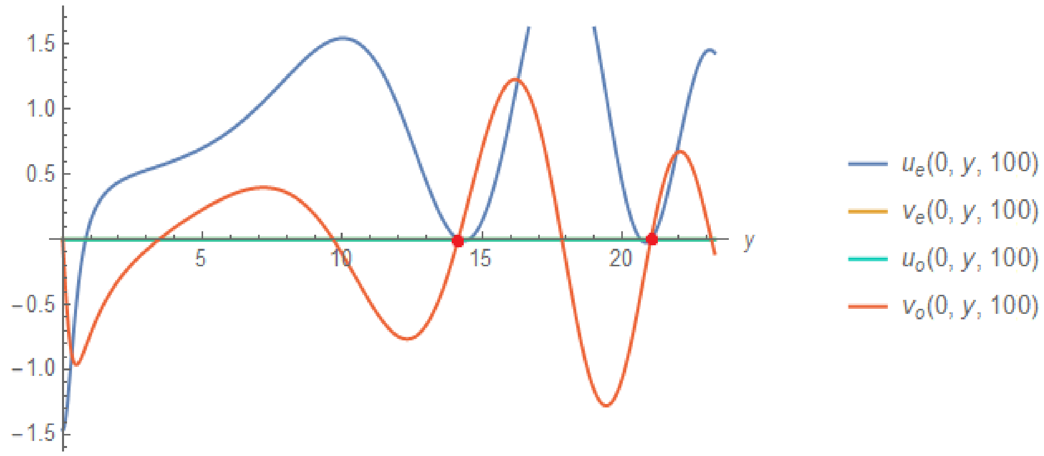
しかしながら、この連立方程式が例外的に解を持つ場合がある。それは $x=0$ の場合である。なお、$x=0$ は 関数 $\zeta(1/2+z)$ の臨界線である。 上式に $x=0$ を代入すれば

$$\begin{cases} u_e = -\dfrac{1/2}{1/4+y^2} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} f^{(2r)}(0)\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_e = 0+0=0 \\ u_o = 0-0=0 \\ v_o = -\dfrac{y}{1/4+y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} f^{(2r+1)}(0)\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \end{cases}$$

但し、$f^{(s)}(0)=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad , \quad 0^0=1$

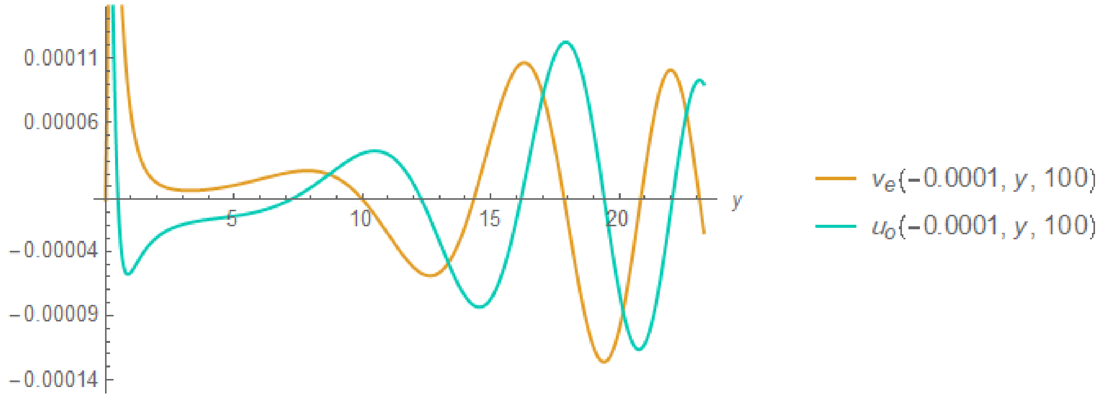
v_e, u_o はそれぞれ恒等的に0になり、過剰決定性は消失する。そして、v_e, u_o に $f^{(2r)}, f^{(2r+1)}$ を代入して計算すると、これらはそれぞれ 公式 12・1・3 の $u_+(0,y), v_+(0,y)$ に帰着する。よってこの連立方程式は解を持つ。

$x = 0$ のとき、$u_e \sim v_o$ を描けば次のようになる。青は u_e、赤茶は v_o で、これらが y 軸上で交わる点(赤点)が $\zeta(1/2 \pm z)$ の零点である。橙は v_e、水色は u_o であるが、これらは y 軸に重なっている。勿論この2直線も赤点を通過している。

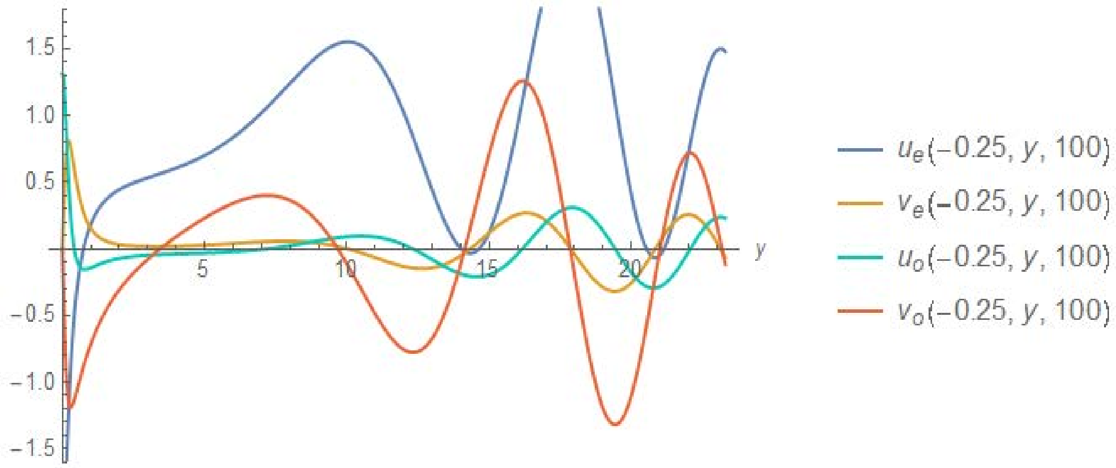


臨界線外の零点

x がほんの僅かでも 0 から外れれば v_e, u_o は直線ではなくなる。例えば $x=-0.0001$ のとき



この結果、過剰決定性は回復する。例えば $x=-0.25$ のとき $u_e \sim v_o$ を描けば次のようになる。4曲線が y 軸上の1点で交わることなどありそうには見えない。



そこで、リーマン仮説と同値な次の仮説を提示できる。

仮説 12･3･2

$\gamma_s \quad s=0,1,2,\cdots$ をスチルチェス定数、x,y を実数とするとき、次の連立方程式は $x\neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} u_e = -\dfrac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_e = -\dfrac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \\ u_o = -\dfrac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_o = -\dfrac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \end{cases}$$

但し、$f^{(s)}(0) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s} \right\} , \quad 0^0 = 1$

12・4 零点のための必要条件

仮説 12・3・2の連立方程式は次の6組の連立方程式と同値である。各連立方程式は零点のための必要条件である。

$$\begin{cases} u_e = 0 \\ v_e = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_e = 0 \\ u_o = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_e = 0 \\ v_o = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_e = 0 \\ u_o = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_e = 0 \\ v_o = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_o = 0 \\ u_o = 0 \end{cases}$$

但し、 $f^{(s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+t}}{t\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t} \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty} \frac{\gamma_t}{(t-s)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s} \right\}, \quad 0^0 = 1$

仮説 12・3・2 を証明するには、これらの何れか1組が $x \neq 0$ なる解を持たないことを示せば良い。u_e ,v_e, u_o , v_o の y に関する偏導関数をも併せて考慮した結果、リーマン仮説とほぼ同値な2組の連立方程式を提示する。

仮説 12・4・1

γ_s $s=0,1,2,\cdots$ をスチルチェス定数、x , y を実数とするとき、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} v_o = -\dfrac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!} = 0 \\ u_o = -\dfrac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!} = 0 \end{cases}$$

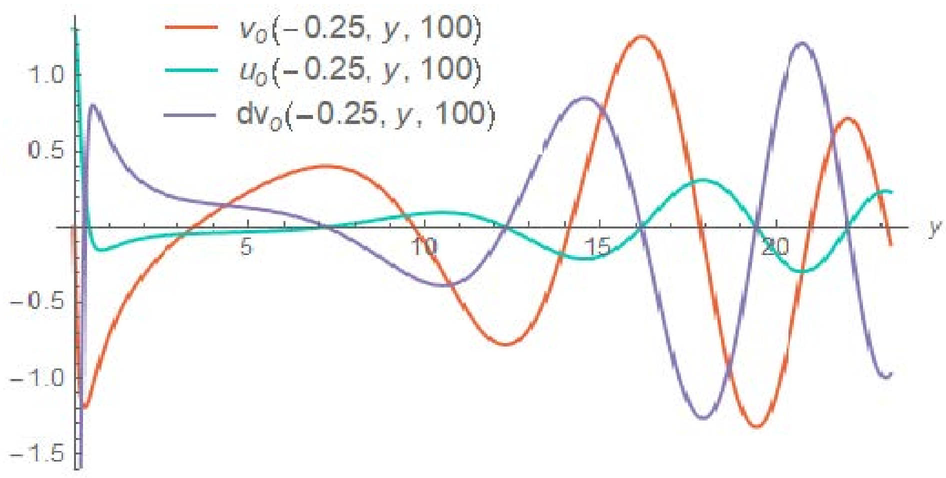
但し、 $f^{(s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+t}}{t\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t} \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty} \frac{\gamma_t}{(t-s)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s} \right\}, \quad 0^0 = 1$

Remark

v_o の y に関する偏導関数は次のようになる。

$$\frac{\partial v_o}{\partial y} = \frac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)\left\{4y\left(1/4-x^2+y^2\right)+8x^2y\right\}}{\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}^2} - \frac{1/4-x^2+3y^2}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$x=-0.25$ のとき、これらの2D図を描くと次のとおり。赤茶が v_o 、水色が u_o 、紫が $\partial v_o/\partial y$ である。



$\partial v_o/\partial y$（紫）の零点は v_o（赤）の山か谷に当たる。そして $y>5$ においては u_o（水色）の零点と $\partial v_o/\partial y$（紫）の零点はかなり近いことが見て取れる。つまり、v_o（赤）と u_o（水色）は零点を共有しそうにはない。

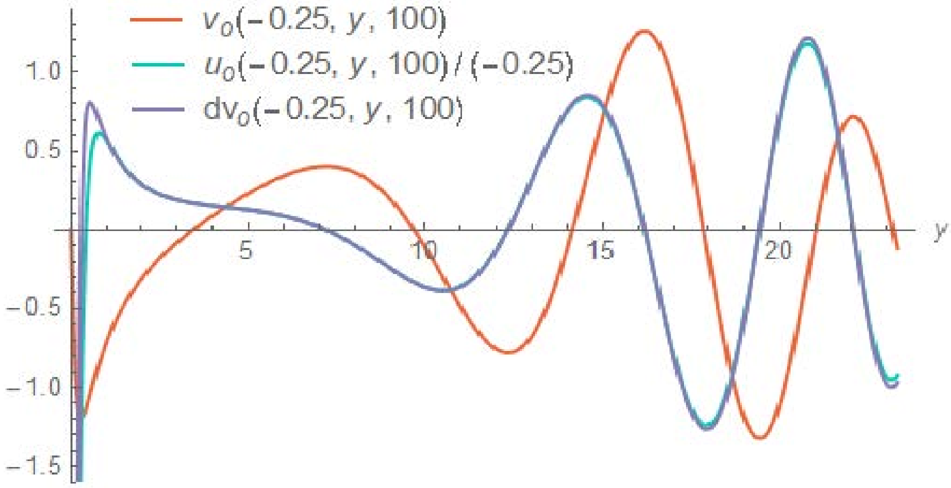
これをよりし詳しく観察するため、次の連立方程式を考えよう。$x \neq 0$ のとき これは上の連立方程式と同値である。

$$\begin{cases} v_o = -\dfrac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \\ \dfrac{u_o}{x} = -\dfrac{1/4-x^2-y^2}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+2s+1)}(0)}{2s+1}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial y} = \frac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)\left\{4y\left(1/4-x^2+y^2\right)+8x^2y\right\}}{\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}^2} - \frac{1/4-x^2+3y^2}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2}$$

$$- \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$x=-0.25$ のとき、これらの2D図は次のとおり。赤茶が v_o、水色が u_o/x、紫が $\partial v_o/\partial y$ である。



$\partial v_o/\partial y$（紫）の零点は v_o（赤）の山か谷に当たる。。そして u_o/x（水色）と $\partial v_o/\partial y$（紫）は重なっており、u_o/x（水色）は殆ど見えない。実際、u_o/x（水色）と $\partial v_o/\partial y$（紫）の零点とその差は次のようである。なお、22 付近の零点はアンダー・フローで不正確な可能性がある。

v_o/x	7.18500	12.3133	16.1699	19.4249	22.0703
$\partial v_o/\partial y$	7.19453	12.3223	16.1755	19.4255	22.0685
差	-0.00953	-0.0090	-0.0056	-0.0006	0.0018

v_o, u_o/x, $\partial v_0/\partial y$ の分数関数が煩雑であるが気にしなくてよい。何故なら、$y \to \infty$ のとき これらは 0 に近づくからである。そこで、$y \to \infty$ のとき次の2級数の零点が接近することを証明できれば、v_o と u_o は共通零点を持たないと言える。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+2s+1)}(0)}{2s+1}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \quad , \quad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

これらの2重級数は係数のみが異なっている。しかも微分係数 $f^{(2r+2s+1)}(0)$ は同一である。このことは、両2重級数の比較に際してスチルチェス定数の不規則な変動の影響がないことを意味している。これがこの連立方程式を選んだ理由である。これらの零点の解析的な比較は不可能ではないように思われる。

仮説 12·4·2

$\gamma_s \quad s=0,1,2,\cdots$ をスチルチェス定数、x, y を実数とするとき、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} u_e = -\dfrac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_e = -\dfrac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \end{cases}$$

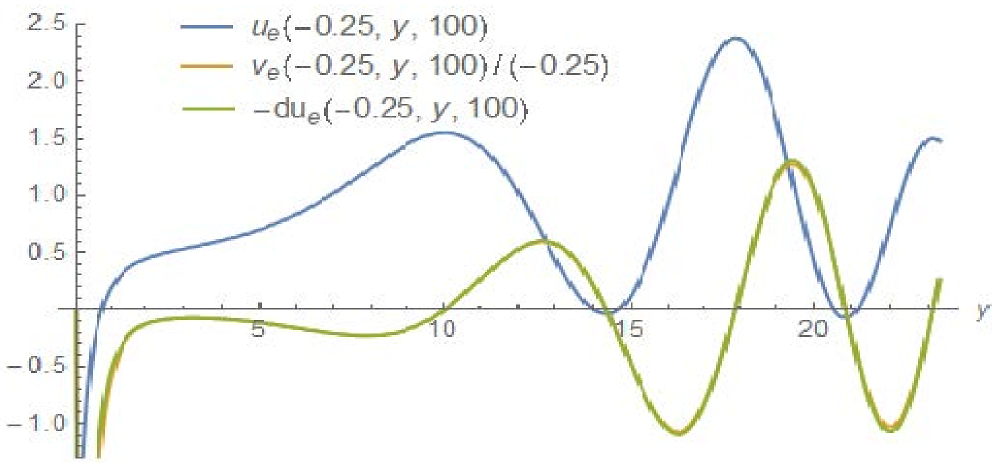
但し、 $f^{(s)}(0) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s} \right\}, \quad 0^0 = 1$

Remark

u_e の y に関する偏導関数は次のようになる。

$$\frac{\partial u_e}{\partial y} = \frac{\left(1/4-x^2+y^2\right)\left\{4y\left(1/4-x^2+y^2\right)+8x^2y\right\}}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}^2} - \frac{y}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2}$$
$$- \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

そして $x=-0.25$ のとき、u_e , v_e/x , $-\partial u_e/\partial y$ の2D図を描くと次のようになる。



v_e/x (橙)と $-\partial u_e/\partial y$ (緑)は重なっており、v_e/x (橙)は見えない。この場合も $y \to \infty$ のとき次の2級数の零点が接近することを証明できれば、u_e と v_e は共通零点を持たないと言える。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(2r+2s+2)}(0)}{2s+1}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \quad , \quad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

両級数において微分係数 $f^{(2r+2s+2)}(0)$ は同一である。それ故、両2重級数の比較に際してスチルチェス定数の不規則な変動の影響はない。よって、これらの零点の解析的比較も可能性はありそうに思える。

2022.08.20

宇宙人の数学

河野 和
広島市