13 リーマン仮説が成立しない確率

要　旨

(1) 完備化されたゼータ関数 $\xi(z)$ をマクローリン級数に展開し、その係数 A_r $r=1,2,3,\cdots$ の値を求める。
(2) 完備化されたゼータ関数 $\xi(z)$ について根と係数の関係(ヴィエタの公式)を示す。
(3) リーマン仮説が成立するならば、臨界線上の零点から成る半多重級数は A_r の多項式に等しい。
(4) リーマン仮説が成立するならば、臨界線上の零点から成る冪級数は A_r の多項式に等しい。
(5) (1)と(4)を用いてリーマン仮説が成立する確率を計算し、その余事象に含まれる 同仮説が成立しない確率を得る。

13･1 ξ(z) のマクローリン級数

完備化されたリーマン・ゼータ $\xi(z)$ のマクローリン級数は「 09 完備化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数 」の定理 9･1･3 で与えられた。これを少し形を変えて再掲すると次のようになる。

定理 13･1･1

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r \tag{1.0}$$

すると、これらの係数 A_r $r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r = \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!} \frac{(-1)^{s-t}g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!} h_t \tag{1.a}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

例

最初の4つを書き下すと次のようになる。

$$A_0 = \frac{\log^0\pi}{2^0 0!}\frac{(-1)^0 g_0(3/2)}{2^0 0!}h_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{\log^1\pi}{2^1 1!} - \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\gamma_0}{0!}$$

$$A_2 = \frac{\log^2\pi}{2^2 2!} + \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\gamma_1}{1!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}$$

$$A_3 = \frac{\log^3\pi}{2^3 3!} - \frac{g_3(3/2)}{2^3 3!} - \frac{\gamma_2}{2!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!}$$
$$+ \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}$$

g_r の中身はポリガンマ関数であるので、更に展開すれば次のようになる。

```
Clear[A, g, h, γ, ψ]
```

$$A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}(r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}(s-t)!} h_t$$

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \text{If}\left[r == 0, 1, \sum_{k=1}^{r} \text{BellY}\left[r, k, \text{Tbl}\psi\left[r, \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$h_{r\_} := \text{If}\left[r == 0, 1, -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

$$\text{Tbl}\psi[r\_, z\_] := \text{Table}[\psi_k[z], \{k, 0, r-1\}]$$

$$A_0 \quad 1$$

$$A_1 \quad \frac{\text{Log}[\pi]}{2} - \gamma_0 - \frac{1}{2}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$A_2 \quad \frac{\text{Log}[\pi]^2}{8} - \frac{1}{2}\text{Log}[\pi]\,\gamma_0 - \gamma_1 - \frac{1}{4}\text{Log}[\pi]\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{2}\gamma_0\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{8}\left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

$$A_3 \quad \frac{\text{Log}[\pi]^3}{48} - \frac{1}{8}\text{Log}[\pi]^2\,\gamma_0 - \frac{1}{2}\text{Log}[\pi]\,\gamma_1 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{1}{16}\text{Log}[\pi]^2\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4}\text{Log}[\pi]\,\gamma_0\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{2}\gamma_1\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16}\text{Log}[\pi]\left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right]\right) - \frac{1}{8}\gamma_0\left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right]\right) + \frac{1}{48}\left(-\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 - 3\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]\psi_1\left[\frac{3}{2}\right] - \psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

最後に、これらの数値は次のようになる。

$$\text{Clear}[A, g, h, \gamma, \psi]$$

$$A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\text{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\,(r-s)!}\,\frac{(-1)^{s-t}\,g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}\,(s-t)!}\,h_t$$

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \text{If}\left[r == 0, 1, \sum_{k=1}^{r} \text{BellY}\left[r, k, \text{Tbl}\psi\left[r, \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$h_{r\_} := \text{If}\left[r == 0, 1, -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

$$\text{Tbl}\psi[r\_, z\_] := \text{Table}[\text{PolyGamma}[k, z], \{k, 0, r-1\}]$$

$$\gamma_{s\_} := \text{StieltjesGamma}[s]$$

$$\text{SetPrecision}[\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, 14]$$

$$\{-0.0230957089661, 0.0233438645342, -0.0004979838499, 0.0002531817303, -5.0502548\times10^{-6}\}$$

$$\text{SetPrecision}[A_{16}, 100]$$

$$4.484340507245494493012998364541513049822570640735984986589156619586973608357503 75\times10^{-19}$$

13・2 ξ(z) におけるヴィエタの公式

13・2・1 無限次方程式とヴィエタの公式

拙著「 03 無限次方程式における根と係数 」(無限次方程式編)の公式 3・2・1を再掲すると次のようである。

公式 3・2・1 (ヴィエタの公式)(再掲)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots$ を持ち、次のように完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\left(1-\frac{z}{z_3}\right)\left(1-\frac{z}{z_4}\right)\cdots$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots \tag{2.0}$$

但し、

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_3}}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}\cdots z_{r_n}}$$

この公式を用いることにより、次の定理が証明できる。

定理 13・2・1 (共役複素根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k = x_k \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ $(k=1,2,3,\cdots)$ を持ち、次のように完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_rz}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots \tag{2.1}$$

但し、

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_1C_1 = 1$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_2C_2 = 1\ ,\ {}_1C_0 = 1$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_3C_3 = 1,\ {}_2C_1 = 2$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_4 = 1$$

$$+ \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_2 = 3$$

$$+ \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_2C_0 = 1$$

$$a_5 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty}\frac{2^5 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}x_{r_5}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)\left(x_{r_5}^2+y_{r_5}^2\right)} \qquad {}_5C_5 = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^3\left(x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}+x_{r_1}x_{r_2}x_{r_4}+x_{r_1}x_{r_3}x_{r_4}+x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_3 = 4$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_1 = 3$$

⋮

$$a_{2n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n} x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n} = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-2} = 2n-1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-4}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-4}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)} \qquad {}_{2n-2}C_{2n-4}$$

⋮

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-n}=r_{2n-n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-n}}^2+y_{r_{2n-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n-n}C_{2n-2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1}=r_{2n}+1}^{\infty}\frac{2^{2n+1} x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n+1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1}}^2+y_{r_{2n+1}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1}C_{2n+1} = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n-3} = 2n$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-3}$$

⋮

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1-n}=r_{2n-n}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_{2n+1-n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1-n}}^2+y_{r_{2n+1-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1-n}C_{2n+1-2n} = n+1$$

なお、右端の二項係数は各半多重級数の分子の項数である。

証明

(2.1) の根を $z_k = x_k \pm i y_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、公式 3･2･1 により、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right) = 0$$

i.e.

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right) = 0 \qquad (2.\mathrm{p})$$

簡単化のため、

$$\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2} = X_r \quad , \quad \frac{1}{x_r^2+y_r^2} = I_r$$

と略記すれば(2.p)は

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-X_r z+I_r z^2\right) = \left(1-X_1 z+I_1 z^2\right)\left(1-X_2 z+I_2 z^2\right)\left(1-X_3 z+I_3 z^2\right)\cdots \qquad (2.\mathrm{p}')$$

(2.1) と (2.p') を比べて、(2.1) の係数を計算すると、

$$a_1 = -X_1 - X_2 - X_3 - \cdots = -\sum_{r_1=1}^{\infty} X_{r_1}$$

$$a_2 = X_1(X_2+X_3+X_4+\cdots) + X_2(X_3+X_4+X_5+\cdots) + X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) + \cdots + I_1+I_2+I_3+\cdots$$

$$= \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} X_{r_1}X_{r_2} + \sum_{r_1=1}^{\infty} I_{r_1}$$

$$a_3 = -X_1X_2(X_3+X_4+X_5+\cdots) - X_1X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) - X_1X_4(X_5+X_6+X_4+\cdots) - \cdots$$

$$-X_2X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) - X_2X_4(X_5+X_6+X_4+\cdots) - X_2X_5(X_6+X_7+X_8+\cdots) - \cdots$$

$$\vdots$$

$$-X_1(I_2+I_3+I_4+\cdots) - X_2(I_3+I_4+I_5+\cdots) - X_3(I_4+I_5+I_6+\cdots) - \cdots$$

$$-I_1(X_2+X_3+X_4+\cdots) - I_2(X_3+X_4+X_5+\cdots) - I_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) - \cdots$$

$$= -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} X_{r_1}X_{r_2}X_{r_3} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(X_{r_1}I_{r_2} + I_{r_1}X_{r_2}\right)$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} X_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}X_{r_4}$$

$$+X_1X_2(I_3+I_4+I_5+\cdots) + X_1X_3(I_4+I_5+I_6+\cdots) + X_1X_4(I_5+I_6+I_4+\cdots) + \cdots$$

$$+X_2X_3(I_4+I_5+I_6+\cdots) + X_2X_4(I_5+I_6+I_4+\cdots) + X_2X_5(I_6+I_7+I_8+\cdots) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$+X_1I_2(X_3+X_4+X_5+\cdots) + X_1I_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) + X_1I_4(X_5+X_6+X_4+\cdots) + \cdots$$

$$+X_2I_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) + X_2I_4(X_5+X_6+X_4+\cdots) + X_2I_5(X_6+X_7+X_8+\cdots) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$+I_1X_2(X_3+X_4+X_5+\cdots) + I_1X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) + I_1X_4(X_5+X_6+X_4+\cdots) + \cdots$$

$$+I_2X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots) + I_2X_4(X_5+X_6+X_4+\cdots) + I_2X_5(X_6+X_7+X_8+\cdots) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$+I_1(I_2+I_3+I_4+\cdots) + I_2(I_3+I_4+I_5+\cdots) + I_3(I_4+I_5+I_6+\cdots) + \cdots$$

$$= \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} X_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}X_{r_4}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\left(X_{r_1}X_{r_2}I_{r_3} + X_{r_1}I_{r_2}X_{r_3} + I_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}\right) + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} I_{r_1}I_{r_2}$$

記号を元に戻して $a_1 \sim a_4$ を得る。そして帰納法により a_{2n}, a_{2n+1} を得る。　　Q.E.D.

13･2･2 $\xi(z)$ の零点と係数の関係

定理 13･2･1 は完備化されたリーマンゼータ関数 $\xi(z)$ に適用可能であり、次の定理が得られる。

定理 13･2･2

完備化されたリーマンゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r \tag{2.2}$$

すると、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_{r_t} = x_{r_t} \pm i y_{r_t}$, $y_{r_t} \ne 0$ $t=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^1 x_{r_1}}{x_{r_1}^2 + y_{r_1}^2} \qquad {}_1C_1 = 1$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_2C_2 = 1\ ,\ {}_1C_0 = 1$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_3C_3 = 1,\ {}_2C_1 = 2$$

$$B_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_4 = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_2 = 3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_2C_0 = 1$$

$$B_5 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty}\frac{2^5 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}x_{r_5}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)\left(x_{r_5}^2+y_{r_5}^2\right)} \qquad {}_5C_5 = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^3\left(x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}+x_{r_1}x_{r_2}x_{r_4}+x_{r_1}x_{r_3}x_{r_4}+x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_3 = 4$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_1 = 3$$

$\vdots$

$$B_{2n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n} = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-2} = 2n-1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-4}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-4}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)} \qquad {}_{2n-2}C_{2n-4}$$

$\vdots$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-n}=r_{2n-n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-n}}^2+y_{r_{2n-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n-n}C_{2n-2n} = 1$$

$$B_{2n+1} = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1}=r_{2n}+1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n+1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1}}^2+y_{r_{2n+1}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1}C_{2n+1} = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n-3} = 2n$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-3}$$

$\vdots$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1-n}=r_{2n-n}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_{2n+1-n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1-n}}^2+y_{r_{2n+1-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1-n}C_{2n+1-2n} = n+1$$

なお、右端の二項係数は各半多重級数の分子の項数である。

証明

「 08 完備化されたリーマン・ゼータの因数分解 」の 定理 8･3･1 によれば、リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明な零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、完備化されたリーマンゼータ関数 $\xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)$$

よって 定理 13･2･1 が適用可能であり、所望の式を得る。 Q.E.D.

Note

この定理は絶対である。つまりこれはリーマン仮説の成否に関わらず成立する。

13·2·3 リーマン仮説が成立する場合

この場合、零点は $1/2 \pm y_{r_t}$ のみなので、定理 13·2·2 の $B_1, B_2, B_3, \cdots$ は次のようになる。

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{{}_1C_1}{1/4+y_{r_1}^2} \qquad {}_1C_1 = 1$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{{}_2C_2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{{}_1C_0}{1/4+y_{r_1}^2} \qquad {}_2C_2 = 1 \,,\, {}_1C_0 = 1$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{{}_3C_3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{{}_2C_1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_3C_3 = 1 \,,\, {}_2C_1 = 2$$

⋮

13·2·4 リーマン仮説が成立しない場合

この場合、零点は $1/2 \pm y_{r_t}$ の他に $1/2 \pm \alpha_{r_t} \pm \beta_{r_t}$ $\left(0 < \alpha_{r_t} < 1/2\right)$ が存在するので、定理 13·2·2 の $B_1, B_2, B_3, \cdots$ は次のようになる。

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{{}_1C_1}{1/4+y_{r_1}^2} - \sum_{r_1=1} \frac{2^1\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)}{\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2} - \sum_{r_1=1} \frac{2^1\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)}{\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = &\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{{}_2C_2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{{}_1C_0}{1/4+y_{r_1}^2} \\
&+ \sum_{r_1=1}\sum_{r_2=r_1+1} \frac{2^2\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)\left(1/2+\alpha_{r_2}\right)}{\left\{\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2\right\}\left\{\left(1/2+\alpha_{r_2}\right)^2+\beta_{r_2}^2\right\}} + \sum_{r_1=1} \frac{2^0}{\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2} \\
&+ \sum_{r_1=1}\sum_{r_2=r_1+1} \frac{2^2\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)\left(1/2-\alpha_{r_2}\right)}{\left\{\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2\right\}\left\{\left(1/2-\alpha_{r_2}\right)^2+\beta_{r_2}^2\right\}} + \sum_{r_1=1} \frac{2^0}{\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{{}_3C_3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{{}_2C_1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} \\
&- \sum_{r_1=1}\sum_{r_2=r_1+1}\sum_{r_3=r_2+1} \frac{2^3\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)\left(1/2+\alpha_{r_2}\right)\left(1/2+\alpha_{r_3}\right)}{\left\{\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2\right\}\left\{\left(1/2+\alpha_{r_2}\right)^2+\beta_{r_2}^2\right\}\left\{\left(1/2+\alpha_{r_3}\right)^2+\beta_{r_3}^2\right\}} \\
&- \sum_{r_1=1}\sum_{r_2=r_1+1}\sum_{r_3=r_2+1} \frac{2^3\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)\left(1/2-\alpha_{r_2}\right)\left(1/2-\alpha_{r_3}\right)}{\left\{\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2\right\}\left\{\left(1/2-\alpha_{r_2}\right)^2+\beta_{r_2}^2\right\}\left\{\left(1/2-\alpha_{r_3}\right)^2+\beta_{r_3}^2\right\}} \\
&- \sum_{r_1=1}\sum_{r_2=r_1+1} \frac{2^1\left\{\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)+\left(1/2+\alpha_{r_2}\right)\right\}}{\left\{\left(1/2+\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2\right\}\left\{\left(1/2+\alpha_{r_2}\right)^2+\beta_{r_2}^2\right\}} - \sum_{r_1=1}\sum_{r_2=r_1+1} \frac{2^1\left\{\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)+\left(1/2-\alpha_{r_2}\right)\right\}}{\left\{\left(1/2-\alpha_{r_1}\right)^2+\beta_{r_1}^2\right\}\left\{\left(1/2-\alpha_{r_2}\right)^2+\beta_{r_2}^2\right\}}
\end{aligned}$$

⋮

Note

(1) 臨界線上の零点が無限個なることは知られているが、臨界線外の零点の個数は知られていない。

(2) $B_r \quad r=0,1,2,\cdots$ は、臨界線上の零点から成る半多重級数と臨界線外の零点から成る半多重級数の和である。

(3) $0 < \alpha_{r_t} < 1/2$ であるので、臨界線外の零点から成る半多重級数が相殺し合って 0 に帰することはあり得ない。

13・3 リーマン仮説と同値な命題 その1

前節 13・2・3 で見たように、もしリーマン仮説が成立するならば これと同値な次の補題が成立する。

補題 13・3・1

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r \tag{2.2}$$

すると、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_{r_t}= 1/2\pm i y_{r_t}$, $y_{r_t}\neq 0$ $t=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{{}_1C_1}{1/4+y_{r_1}^2} \qquad {}_1C_1 = 1$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{{}_2C_2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{{}_1C_0}{1/4+y_{r_1}^2} \qquad {}_2C_2 = 1\,,\ {}_1C_0 = 1$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{{}_3C_3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{{}_2C_1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_3C_3 = 1,\ {}_2C_1 = 2$$

$$B_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{{}_4C_4}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_4 = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{{}_3C_2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_2 = 3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{{}_2C_0}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_2C_0 = 1$$

$$B_5 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty}\frac{{}_5C_5}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)\left(1/4+y_{r_5}^2\right)} \qquad {}_5C_5 = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{{}_4C_3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_3 = 4$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{{}_3C_1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_1 = 3$$

$\vdots$

$$B_{2n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{{}_{2n}C_{2n}}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n} = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{{}_{2n-1}C_{2n-2}}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-2} = 2n-1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{{}_{2n-2}C_{2n-4}}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n-2}}^2\right)} \qquad {}_{2n-2}C_{2n-4}$$

$\vdots$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{{}_nC_0}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_n}^2\right)} \qquad {}_{2n-n}C_{2n-2n} = 1$$

$$B_{2n+1} = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1}=r_{2n}+1}^{\infty}\frac{{}_{2n+1}C_{2n+1}}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n+1}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1}C_{2n+1} = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{{}_{2n}C_{2n-3}}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n-3} = 2n$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{{}_{2n-1}C_{2n-3}}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-3}$$

$\vdots$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1-n}=r_{2n-n}+1}^{\infty}\frac{{}_{n+1}C_1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_{2n+1-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1-n}C_{2n+1-2n}=n+1$$

しかしながらこの補題は煩雑である。どうせリーマン仮説を仮定するならば もっと良い命題を提示で来る。

命題 13･3･2

n は自然数、A_n は 定理 13･1･1 で得られた定数、そして y_{r_t} はリーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の臨界線上の零点とする。すると次式が成立する。

$$H_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{n}\binom{n-1+k}{n-1}(n-k)A_{n-k} \tag{3.2}$$

但し、

$$H_1=\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$H_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$H_3=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$H_n=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_n}^2\right)}$$

証明

補題 13･3･1 において二項係数は Σ, $\Sigma\Sigma$, ･･･ の前に出すことが出来る。そこで半多重級数を命題の但し書きのように略記すれば、補題 13･3･1 の各式は次のように記述できる。

$$B_1=-H_1$$
$$B_2=H_2+{}_1C_0H_1$$
$$B_3=-H_3-{}_2C_1H_2$$
$$B_4=H_4+{}_3C_2H_3+{}_2C_0H_2$$
$$B_5=-H_5-{}_4C_3H_4-{}_3C_1H_3$$
$$B_6=H_6+{}_5C_4H_5+{}_4C_2H_4+{}_3C_0H_3$$
$$B_7=-H_7-{}_6C_5H_6-{}_5C_3H_5-{}_4C_1H_4$$
$$\vdots$$

2項係数を数値に置き換え、B_r と H_r を入れ替えれば

$$H_1=-B_1$$
$$H_2=B_2-H_1$$
$$H_3=-B_3-2H_2$$
$$H_4=B_4-3H_3-H_2$$
$$H_5=-B_5-4H_4-3H_3$$
$$H_6=B_6-5H_5-6H_4-H_3$$
$$H_7=-B_7-6H_6-10H_5-4H_4$$
$$\vdots$$

数式処理ソフト *Mathematica* の再帰関数を用いて H_r を上から順次代入すれば、

$$H_1=-B_1$$
$$H_2=B_1+B_2$$
$$H_3=-2\left(B_1+B_2\right)-B_3$$

$$H_4 = \ \ 5\left(B_1+B_2\right) + 3B_3 + B_4$$
$$H_5 = -14\left(B_1+B_2\right) - 9B_3 - 4B_4 - B_5$$
$$H_6 = 42\left(B_1+B_2\right) + 28B_3 + 14B_4 + 5B_5 + B_6$$
$$H_7 = -132\left(B_1+B_2\right) - 90B_3 - 48B_4 - 20B_5 - 6B_6 - B_7$$
$$\vdots$$

ここで、オンライン整数列大辞典（OEIS）によると、これらの係数はカタランの三角形の構成数列（OEIS A009766）であり、次式で与えられる。

$$T(n,m) = {}_{n+m}C_n\,(n-m+1)/(n+1) \qquad 0 \le m \le n$$

これを用いれば、上の諸式は次のように一般表記が来る。

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n} \binom{n-1+k}{n-1} (n-k) B_{n-k} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

最後に、完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ のマクローリン級数は一意であるから、$B_r = A_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 。
そこで B_r を A_r に置換して与式を得る。　　Q.E.D.

例

(3.2) の最初の数個を書き下せば、

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} = -A_1 = 0.0230957089\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} = A_1 + A_2 = 0.000248155568\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} = -2\left(A_1+A_2\right) - A_3 = 1.672713713\times 10^{-6}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)} = 5\left(A_1+A_2\right) + 3A_3 + A_4$$
$$= 8.021073428\times 10^{-9}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_5=r_4+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_5}^2\right)} = -14\left(A_1+A_2\right) - 9A_3 - 4A_4 - A_5$$
$$= 2.936055872\times 10^{-11}$$

半多重級数と理論値

これらの左辺は臨界線上の零点から成る半多重級数であり、右辺は $log\ \pi$ 、スチルチェス定数 及び ポリガンマ関数からなる理論値である。リーマン仮説の確からしさの検証のためには、臨界線上の零点を幾つか取って半多重級数の値を計算し理論値と比べてみればよい。

理論値は一瞬で計算できる。しかし半多重級数 H_r の計算は容易ではない。半多重級数の計算を m で打ち切るとき、H_r の計算量は ${}_mC_r$ となるからである。例えば $m=100$ で計算を打ち切れば H_8 の計算量は ${}_{100}C_8 = 186{,}087{,}894{,}300$ となる。これはノートパソコンなどで計算できる量ではない。別の方法を考えねばならない。

13・4 リーマン仮説と同値な命題 その2

前節末で述べたように、半多重級数の計算は現実的ではない。そこで筆者が考えたのが半多重級数の計算を冪級数の計算に転嫁することである。例えば半2重級数の場合、次のような等式が成立する。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2=\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2-2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

ここで、前節で得た

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}=-A_1 \quad , \quad \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}=A_1+A_2$$

を右辺に代入すれば、

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2=A_1^2-2\left(A_1+A_2\right)$$

かくして半2重級数の計算は2乗の級数の計算に転嫁されている。後者は前者よりも圧倒的に収束が速い。本例は 2 次であるが、次数が上がるほど収束速度は速くなる。そのような高次の一般式を見出すのが本節の目的である。

「 05 冪級数と半多重級数 」(無限次方程式編) の定理 5・2・2 は次のようであった。

定理 5・2・2 (再掲)

n を 2 以上の自然数とするとき、収束する級数について次式が成立する。

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^n=\sum_{r_1=1}^{\infty}a_r^n+2\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^{n-2}H_2$$
$$+\sum_{s=0}^{n-3}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^s\left(\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^{n-s-t}\right)H_t+(-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right) \tag{2.2n}$$

但し、

$$H_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}$$

$$H_3=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$\vdots$$

$$H_n=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}\cdots a_{r_n}$$

$n\le 2$ のとき (2.2_n) の第 3 項は無いものとする。

この定理より、次の補題が得られる。

補題 13・4・1

n を 2 以上の自然数、y_{r_t} $t=1,2,3,\cdots$ を非ゼロの実数とするとき、収束する級数について次式が成立する。

$$G_1^n=G_n+2G_1^{n-2}H_2+\sum_{s=0}^{n-3}G_1^s\left(\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^tG_1^{n-s-t}H_t+(-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right) \tag{4.1}$$

但し、

$$G_n=\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$H_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$H_3=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_n}^2\right)}$$

$n \le 2$ のとき (4.1) の第 3 項は無いものとする。

証明

定理 5･2･2 において

$$a_{r_n} = \frac{1}{1/4+y_{r_n}^2} \quad , \quad G_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

と置けば

$$G_1 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} = H_1$$

であるから、(2.2_n) 以下は次のように表される。

$$G_1^n = G_n + 2G_1^{n-2}H_2 + \sum_{s=0}^{n-3}G_1^s\left(\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t G_1^{n-s-t}H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right)$$

但し、

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_n}^2\right)} \qquad n=2,3,4,\cdots$$

Q.E.D.

例

(4.1) の最初の幾つかを書き下すと、次のとおり

$$G_1^2 = G_2 + 2H_2$$

$$G_1^3 = G_3 + 3G_1H_2 - 3H_3$$

$$G_1^4 = G_4 + 3G_1^2H_2 + G_2H_2 - 4G_1H_3 + 4H_4$$

$$G_1^5 = G_5 + 3G_1^3H_2 + G_1G_2H_2 + G_3H_2 - 4G_1^2H_3 - G_2H_3 + 5G_1H_4 - 5H_5$$

補題 13･4･1 の問題点

y_{r_t} $t=1,2,3,\cdots$ が与えられた場合、これらの等式は確認計算が可能であるが、H_n の計算速度は n が大きくなるほど加速度的に遅くなる。

この問題を解決する最良の方法は、H_n を無くしてしまうことである。一般的にそのような幸運は期待できないが、y_{r_t} がリーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の臨界線上の零点である場合には、前節の 命題 13･3･2 を用いることによって H_n を定数に置き換えることが出来る。かくして、リーマン仮説と同値な次の命題が得られる。

命題 13･4･2

n を 2 以上の自然数、A_n を 定理 13･1･1 で得られた定数とするとき、次式が成立する。

$$G_n = G_1^n - 2G_1^{n-1}H_2 - \sum_{s=0}^{n-3}G_1^s\left(\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t G_{n-s-t}H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right) \tag{4.2}$$

但し、

$$G_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{n}\binom{n-1+k}{n-1}(n-k)A_{n-k} \qquad n=2,3,4,\cdots$$

$$G_1 = -A_1 \quad (=H_1)$$

$n \le 2$ のとき (4.2) の第 3 項は無いものとする。

証明

補題 13･4･1 の公式において G_1^n と G_n を入れ替える。そして H_n は前節の 命題 13･3･2 の式に差し替える。この際、

$H_1 = -A_1$ を $G_1 = -A_1$ に代替する。　　　Q.E.D.

例

この命題を *Mathematica* を用いて再帰式として計算すれば (4.2) の最初の幾つかは次のようになる。

Clear[G, H, A]

$$\mathbf{G_{n\_} := G_1{}^n - \sum_{s=0}^{n-3} G_1{}^s \left(\sum_{t=2}^{n-1-s} (-1)^t\, G_{n-s-t}\, H_t + (-1)^{n-s}\, (n-s)\, H_{n-s} \right) - 2\, G_1{}^{n-2}\, H_2}$$

$$\mathbf{H_{n\_} := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n}\, Binomial[n-1+k,\, n-1]\, (n-k)\, A_{n-k}}$$

$$\mathbf{G_1 := -A_1}$$

Expand[G_2] $\quad -2 A_1 + A_1^2 - 2 A_2$

Expand[G_3] $\quad -6 A_1 + 3 A_1^2 - A_1^3 - 6 A_2 + 3 A_1 A_2 - 3 A_3$

Expand[G_4] $\quad -20 A_1 + 10 A_1^2 - 4 A_1^3 + A_1^4 - 20 A_2 + 12 A_1 A_2 - 4 A_1^2 A_2 + 2 A_2^2 - 12 A_3 + 4 A_1 A_3 - 4 A_4$

Expand[G_5] $\quad -70 A_1 + 35 A_1^2 - 15 A_1^3 + 5 A_1^4 - A_1^5 - 70 A_2 + 45 A_1 A_2 - 20 A_1^2 A_2 + 5 A_1^3 A_2 +$
$10 A_2^2 - 5 A_1 A_2^2 - 45 A_3 + 20 A_1 A_3 - 5 A_1^2 A_3 + 5 A_2 A_3 - 20 A_4 + 5 A_1 A_4 - 5 A_5$

Expand[G_6] $\quad -252 A_1 + 126 A_1^2 - 56 A_1^3 + 21 A_1^4 - 6 A_1^5 + A_1^6 - 252 A_2 + 168 A_1 A_2 - 84 A_1^2 A_2 + 30 A_1^3 A_2 -$
$6 A_1^4 A_2 + 42 A_2^2 - 30 A_1 A_2^2 + 9 A_1^2 A_2^2 - 2 A_2^3 - 168 A_3 + 84 A_1 A_3 - 30 A_1^2 A_3 + 6 A_1^3 A_3 +$
$30 A_2 A_3 - 12 A_1 A_2 A_3 + 3 A_3^2 - 84 A_4 + 30 A_1 A_4 - 6 A_1^2 A_4 + 6 A_2 A_4 - 30 A_5 + 6 A_1 A_5 - 6 A_6$

Expand[G_{16}] $\quad -155\,117\,520 A_1 + 77\,558\,760 A_1^2 - 37\,442\,160 A_1^3 + 17\,383\,860 A_1^4 - 7\,726\,160 A_1^5 + 3\,268\,760 A_1^6 -$
$1\,307\,504 A_1^7 + 490\,314 A_1^8 - 170\,544 A_1^9 + 54\,264 A_1^{10} - 15\,504 A_1^{11} + 3876 A_1^{12} - 816 A_1^{13} + 136 A_1^{14} -$
$16 A_1^{15} + A_1^{16} - 155\,117\,520 A_2 + 112\,326\,480 A_1 A_2 - 69\,535\,440 A_1^2 A_2 + 38\,630\,800 A_1^3 A_2 -$
$19\,612\,560 A_1^4 A_2 + 9\,152\,528 A_1^5 A_2 - 3\,922\,512 A_1^6 A_2 + 1\,534\,896 A_1^7 A_2 - 542\,640 A_1^8 A_2 +$
$170\,544 A_1^9 A_2 - 46\,512 A_1^{10} A_2 + 10\,608 A_1^{11} A_2 - 1904 A_1^{12} A_2 + 240 A_1^{13} A_2 - 16 A_1^{14} A_2 + 34\,767\,720 A_2^2 -$

⋮

The middle parts were omitted

⋮

$3808 A_1 A_2 A_{11} + 720 A_1^2 A_2 A_{11} - 64 A_1^3 A_2 A_{11} - 240 A_2^2 A_{11} + 48 A_1 A_2^2 A_{11} + 1904 A_3 A_{11} - 480 A_1 A_3 A_{11} +$
$48 A_1^2 A_3 A_{11} - 32 A_2 A_3 A_{11} + 240 A_4 A_{11} - 32 A_1 A_4 A_{11} + 16 A_5 A_{11} - 46\,512 A_{12} + 10\,608 A_1 A_{12} -$
$1904 A_1^2 A_{12} + 240 A_1^3 A_{12} - 16 A_1^4 A_{12} + 1904 A_2 A_{12} - 480 A_1 A_2 A_{12} + 48 A_1^2 A_2 A_{12} - 16 A_2^2 A_{12} +$
$240 A_3 A_{12} - 32 A_1 A_3 A_{12} + 16 A_4 A_{12} - 10\,608 A_{13} + 1904 A_1 A_{13} - 240 A_1^2 A_{13} + 16 A_1^3 A_{13} + 240 A_2 A_{13} -$
$32 A_1 A_2 A_{13} + 16 A_3 A_{13} - 1904 A_{14} + 240 A_1 A_{14} - 16 A_1^2 A_{14} + 16 A_2 A_{14} - 240 A_{15} + 16 A_1 A_{15} - 16 A_{16}$

Note

最後の G_{16} は 3.3 頁に及ぶ長いリストであるが、出力に要する時間は約 2 秒であった。

13・5 リーマン仮説が成立しない確率

定理13・1・1 と 命題 13・4・2 に従い、*Mathematica* を用いて この確率を計算する。道具立ては次のとおり。

$$\mathrm{Tbl}\psi[\mathrm{r\_},\ \mathrm{z\_}] := \mathrm{Table}[\mathrm{PolyGamma}[k,\ z],\ \{k,\ 0,\ r-1\}]$$

$$\gamma_{s\_} := \mathrm{StieltjesGamma}[s]$$

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ \sum_{k=1}^{r} \mathrm{BellY}\left[r,\ k,\ \mathrm{Tbl}\psi\left[r,\ \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$h_{r\_} := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)\,!}\right]$$

$$A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\ (r-s)\,!}\ \frac{(-1)^{s-t}\ g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}\ (s-t)\,!}\ h_t$$

$$y_{r\_} := \mathrm{Im}[\mathrm{ZetaZero}[r]]$$

最初の5行は 定理 13・1・1 に従って理論値 A_r を求めるツールである。最後の y_r は臨界線上の零点である。これらにより A_r と y_r の値が瞬時に得られる。 以下、命題 13・4・2 の等式に従って各次毎に計算が行われる。

5次

$$\mathrm{f5}[\mathrm{m\_}] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r{}^2}\right)^5$$

$$\begin{aligned} \mathrm{g5} := {} & -70\,A_1 + 35\,A_1^2 - 15\,A_1^3 + 5\,A_1^4 - A_1^5 - 70\,A_2 + 45\,A_1\,A_2 - 20\,A_1^2\,A_2 + \\ & 5\,A_1^3\,A_2 + 10\,A_2^2 - 5\,A_1\,A_2^2 - 45\,A_3 + 20\,A_1\,A_3 - 5\,A_1^2\,A_3 + 5\,A_2\,A_3 - 20\,A_4 + 5\,A_1\,A_4 - 5\,A_5 \end{aligned}$$

$f5(m)$ は5乗和であり、$g5$ は 命題 13・4・2 の右辺である。実際、これは 前節の例示 をコピー＆ペーストしたものである。臨界上の零点 30,000 個を取ってこれらを計算すると次のとおり。

```
SetPrecision[f5[30000], 50]
```

$3.1938918608673242323122528742640502953125718597 44 \times 10^{-12}$

```
SetPrecision[g5, 50]
```

$3.19389186086732423231225287429394519 \times 10^{-12}$

両辺は 29 桁が一致している。そこで左辺を右辺で除せば

```
3.193891860867324232312252874264050295312571859743841705206851339 1`49.15040414601467*\
  ^-12 / 3.193891860867324232312252874293945194379313889 8`35.60665719160085*^-12
```

0.99999999999999999999999999999 0639978

即ち、臨界上の零点 30,000 個の 5 乗和は理論値の 0.99999999999999999999999999999 （29 Nines）を占めている。他方、これの余事象を求めると

```
1 - %
```

9.36002×10^{-30}

この中には臨界線上の零点の残余と臨界線外の零点の可能性が含まれる。よって、臨界線外の零点が余事象に含まれる確率は 10^{-29} 未満である。つまり、リーマン仮説が成立しない確率は 10^{-29} 未満である。

6次

臨界線上の零点 30,000 個を取って同じように計算すると次のとおり。

$$\mathrm{f6}[\mathrm{m\_}] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r{}^2}\right)^6$$

$$\begin{aligned} \mathrm{g6} := {} & -252\,A_1 + 126\,A_1^2 - 56\,A_1^3 + 21\,A_1^4 - 6\,A_1^5 + A_1^6 - 252\,A_2 + 168\,A_1\,A_2 - 84\,A_1^2\,A_2 + \\ & 30\,A_1^3\,A_2 - 6\,A_1^4\,A_2 + 42\,A_2^2 - 30\,A_1\,A_2^2 + 9\,A_1^2\,A_2^2 - 2\,A_2^3 - 168\,A_3 + 84\,A_1\,A_3 - 30\,A_1^2\,A_3 + 6\,A_1^3\,A_3 + \\ & 30\,A_2\,A_3 - 12\,A_1\,A_2\,A_3 + 3\,A_3^2 - 84\,A_4 + 30\,A_1\,A_4 - 6\,A_1^2\,A_4 + 6\,A_2\,A_4 - 30\,A_5 + 6\,A_1\,A_5 - 6\,A_6 \end{aligned}$$

```
SetPrecision[f6[30000], 60]
```

$1.57589008816605893377996928745089763437436414944590953960006 \times 10^{-14}$

```
SetPrecision[g6, 60]
```

$1.5758900881660589337799692874508976380528921 \times 10^{-14}$

```
1.5758900881660589337799692874508976343743641494459095396005637869169155469583604299`
  59.07122205853604*^-14 /
 1.5758900881660589337799692874508976380528915613238068345592013 21`42.71887062740259*
  ^-14
```

0.99999999999999999999999999999999999976657462

```
1 - %
```

2.334254×10^{-36}

即ち、臨界上の零点 30,000 個の 6 乗和は理論値の35 ナインズ(35N)を占めている。従ってリーマン仮説が成立しない確率は 10^{-35} 未満である。計算精度は5次よりも6桁アップしている。これは6次の収束速度がより速いことに依る。

16 次

最後はジャンプしてこの計算を行う。臨界上の零点は前2例に同じく 30,000 個を取る。

$$f16[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r{}^2} \right)^{16}$$

$$
\begin{aligned}
g16 := &-155117520 A_1 + 77558760 A_1^2 - 37442160 A_1^3 + 17383860 A_1^4 - 7726160 A_1^5 + 3268760 A_1^6 - \\
&1307504 A_1^7 + 490314 A_1^8 - 170544 A_1^9 + 54264 A_1^{10} - 15504 A_1^{11} + 3876 A_1^{12} - 816 A_1^{13} + 136 A_1^{14} - \\
&16 A_1^{15} + A_1^{16} - 155117520 A_2 + 112326480 A_1 A_2 - 69535440 A_1^2 A_2 + 38630800 A_1^3 A_2 - \\
&19612560 A_1^4 A_2 + 9152528 A_1^5 A_2 - 3922512 A_1^6 A_2 + 1534896 A_1^7 A_2 - 542640 A_1^8 A_2 + \\
&170544 A_1^9 A_2 - 46512 A_1^{10} A_2 + 10608 A_1^{11} A_2 - 1904 A_1^{12} A_2 + 240 A_1^{13} A_2 - 16 A_1^{14} A_2 + 34767720 A_2^2 - \\
&38630800 A_1 A_2^2 + 29418840 A_1^2 A_2^2 - 18305056 A_1^3 A_2^2 + 9806280 A_1^4 A_2^2 - 4604688 A_1^5 A_2^2 + \\
&1899240 A_1^6 A_2^2 - 682176 A_1^7 A_2^2 + 209304 A_1^8 A_2^2 - 53040 A_1^9 A_2^2 + 10472 A_1^{10} A_2^2 - 1440 A_1^{11} A_2^2 + \\
&104 A_1^{12} A_2^2 - 6537520 A_2^3 + 9152528 A_1 A_2^3 - 7845024 A_1^2 A_2^3 + 5116320 A_1^3 A_2^3 - 2713200 A_1^4 A_2^3 + \\
&1193808 A_1^5 A_2^3 - 434112 A_1^6 A_2^3 + 127296 A_1^7 A_2^3 - 28560 A_1^8 A_2^3 + 4400 A_1^9 A_2^3 - 352 A_1^{10} A_2^3 + 980628 A_2^4 - \\
&1534896 A_1 A_2^4 + 1356600 A_1^2 A_2^4 - 852720 A_1^3 A_2^4 + 406980 A_1^4 A_2^4 - 148512 A_1^5 A_2^4 + 39984 A_1^6 A_2^4 - \\
&7200 A_1^7 A_2^4 + 660 A_1^8 A_2^4 - 108528 A_2^5 + 170544 A_1 A_2^5 - 139536 A_1^2 A_2^5 + 74256 A_1^3 A_2^5 - 26656 A_1^4 A_2^5 + \\
&6048 A_1^5 A_2^5 - 672 A_1^6 A_2^5 + 7752 A_2^6 - 10608 A_1 A_2^6 + 6664 A_1^2 A_2^6 - 2240 A_1^3 A_2^6 + 336 A_1^4 A_2^6 - 272 A_2^7 + \\
&240 A_1 A_2^7 - 64 A_1^2 A_2^7 + 2 A_2^8 - 112326480 A_3 + 69535440 A_1 A_3 - 38630800 A_1^2 A_3 + 19612560 A_1^3 A_3 - \\
&9152528 A_1^4 A_3 + 3922512 A_1^5 A_3 - 1534896 A_1^6 A_3 + 542640 A_1^7 A_3 - 170544 A_1^8 A_3 + 46512 A_1^9 A_3 - \\
&10608 A_1^{10} A_3 + 1904 A_1^{11} A_3 - 240 A_1^{12} A_3 + 16 A_1^{13} A_3 + 38630800 A_2 A_3 - 39225120 A_1 A_2 A_3 + \\
&27457584 A_1^2 A_2 A_3 - 15690048 A_1^3 A_2 A_3 + 7674480 A_1^4 A_2 A_3 - 3255840 A_1^5 A_2 A_3 + 1193808 A_1^6 A_2 A_3 - \\
&372096 A_1^7 A_2 A_3 + 95472 A_1^8 A_2 A_3 - 19040 A_1^9 A_2 A_3 + 2640 A_1^{10} A_2 A_3 - 192 A_1^{11} A_2 A_3 - 9152528 A_2^2 A_3 + \\
&11767536 A_1 A_2^2 A_3 - 9209376 A_1^2 A_2^2 A_3 + 5426400 A_1^3 A_2^2 A_3 - 2558160 A_1^4 A_2^2 A_3 + 976752 A_1^5 A_2^2 A_3 - \\
&297024 A_1^6 A_2^2 A_3 + 68544 A_1^7 A_2^2 A_3 - 10800 A_1^8 A_2^2 A_3 + 880 A_1^9 A_2^2 A_3 + 1534896 A_2^3 A_3 - \\
&2170560 A_1 A_2^3 A_3 + 1705440 A_1^2 A_2^3 A_3 - 930240 A_1^3 A_2^3 A_3 + 371280 A_1^4 A_2^3 A_3 - 106624 A_1^5 A_2^3 A_3 + \\
&20160 A_1^6 A_2^3 A_3 - 1920 A_1^7 A_2^3 A_3 - 170544 A_2^4 A_3 + 232560 A_1 A_2^4 A_3 - 159120 A_1^2 A_2^4 A_3 + \\
&66640 A_1^3 A_2^4 A_3 - 16800 A_1^4 A_2^4 A_3 + 2016 A_1^5 A_2^4 A_3 + 10608 A_2^5 A_3 - 11424 A_1 A_2^5 A_3 + 5040 A_1^2 A_2^5 A_3 - \\
&896 A_1^3 A_2^5 A_3 - 240 A_2^6 A_3 + 112 A_1 A_2^6 A_3 + 9806280 A_3^2 - 9152528 A_1 A_3^2 + 5883768 A_1^2 A_3^2 - \\
&3069792 A_1^3 A_3^2 + 1356600 A_1^4 A_3^2 - 511632 A_1^5 A_3^2 + 162792 A_1^6 A_3^2 - 42432 A_1^7 A_3^2 + 8568 A_1^8 A_3^2 - \\
&1200 A_1^9 A_3^2 + 88 A_1^{10} A_3^2 - 3922512 A_2 A_3^2 + 4604688 A_1 A_2 A_3^2 - 3255840 A_1^2 A_2 A_3^2 + 1705440 A_1^3 A_2 A_3^2 - \\
&697680 A_1^4 A_2 A_3^2 + 222768 A_1^5 A_2 A_3^2 - 53312 A_1^6 A_2 A_3^2 + 8640 A_1^7 A_2 A_3^2 - 720 A_1^8 A_2 A_3^2 + 813960 A_2^2 A_3^2 - \\
&1023264 A_1 A_2^2 A_3^2 + 697680 A_1^2 A_2^2 A_3^2 - 318240 A_1^3 A_2^2 A_3^2 + 99960 A_1^4 A_2^2 A_3^2 - 20160 A_1^5 A_2^2 A_3^2 +
\end{aligned}
$$

$2016\, A_1^6\, A_2^2\, A_3^2 - 93\,024\, A_2^3\, A_3^2 + 106\,080\, A_1\, A_2^3\, A_3^2 - 57\,120\, A_1^2\, A_2^3\, A_3^2 + 16\,800\, A_1^3\, A_2^3\, A_3^2 - 2240\, A_1^4\, A_2^3\, A_3^2 +$
$4760\, A_2^4\, A_3^2 - 3600\, A_1\, A_2^4\, A_3^2 + 840\, A_1^2\, A_2^4\, A_3^2 - 48\, A_2^5\, A_3^2 - 511\,632\, A_3^3 + 542\,640\, A_1\, A_3^3 - 341\,088\, A_1^2\, A_3^3 +$
$155\,040\, A_1^3\, A_3^3 - 53\,040\, A_1^4\, A_3^3 + 13\,328\, A_1^5\, A_3^3 - 2240\, A_1^6\, A_3^3 + 192\, A_1^7\, A_3^3 + 170\,544\, A_2\, A_3^3 - 186\,048\, A_1\, A_2\, A_3^3 +$
$106\,080\, A_1^2\, A_2\, A_3^3 - 38\,080\, A_1^3\, A_2\, A_3^3 + 8400\, A_1^4\, A_2\, A_3^3 - 896\, A_1^5\, A_2\, A_3^3 - 21\,216\, A_2^2\, A_3^3 + 19\,040\, A_1\, A_2^2\, A_3^3 -$
$7200\, A_1^2\, A_2^2\, A_3^3 + 1120\, A_1^3\, A_2^2\, A_3^3 + 800\, A_2^3\, A_3^3 - 320\, A_1\, A_2^3\, A_3^3 + 11\,628\, A_3^4 - 10\,608\, A_1\, A_3^4 + 4760\, A_1^2\, A_3^4 -$
$1200\, A_1^3\, A_3^4 + 140\, A_1^4\, A_3^4 - 1904\, A_2\, A_3^4 + 1200\, A_1\, A_2\, A_3^4 - 240\, A_1^2\, A_2\, A_3^4 + 40\, A_2^2\, A_3^4 - 48\, A_3^5 + 16\, A_1\, A_3^5 -$
$69\,535\,440\, A_4 + 38\,630\,800\, A_1\, A_4 - 19\,612\,560\, A_1^2\, A_4 + 9\,152\,528\, A_1^3\, A_4 - 3\,922\,512\, A_1^4\, A_4 + 1\,534\,896\, A_1^5\, A_4 -$
$542\,640\, A_1^6\, A_4 + 170\,544\, A_1^7\, A_4 - 46\,512\, A_1^8\, A_4 + 10\,608\, A_1^9\, A_4 - 1904\, A_1^{10}\, A_4 + 240\, A_1^{11}\, A_4 - 16\, A_1^{12}\, A_4 +$
$19\,612\,560\, A_2\, A_4 - 18\,305\,056\, A_1\, A_2\, A_4 + 11\,767\,536\, A_1^2\, A_2\, A_4 - 6\,139\,584\, A_1^3\, A_2\, A_4 + 2\,713\,200\, A_1^4\, A_2\, A_4 -$
$1\,023\,264\, A_1^5\, A_2\, A_4 + 325\,584\, A_1^6\, A_2\, A_4 - 84\,864\, A_1^7\, A_2\, A_4 + 17\,136\, A_1^8\, A_2\, A_4 - 2400\, A_1^9\, A_2\, A_4 +$
$176\, A_1^{10}\, A_2\, A_4 - 3\,922\,512\, A_2^2\, A_4 + 4\,604\,688\, A_1\, A_2^2\, A_4 - 3\,255\,840\, A_1^2\, A_2^2\, A_4 + 1\,705\,440\, A_1^3\, A_2^2\, A_4 -$
$697\,680\, A_1^4\, A_2^2\, A_4 + 222\,768\, A_1^5\, A_2^2\, A_4 - 53\,312\, A_1^6\, A_2^2\, A_4 + 8640\, A_1^7\, A_2^2\, A_4 - 720\, A_1^8\, A_2^2\, A_4 + 542\,640\, A_2^3\, A_4 -$
$682\,176\, A_1\, A_2^3\, A_4 + 465\,120\, A_1^2\, A_2^3\, A_4 - 212\,160\, A_1^3\, A_2^3\, A_4 + 66\,640\, A_1^4\, A_2^3\, A_4 - 13\,440\, A_1^5\, A_2^3\, A_4 +$
$1344\, A_1^6\, A_2^3\, A_4 - 46\,512\, A_2^4\, A_4 + 53\,040\, A_1\, A_2^4\, A_4 - 28\,560\, A_1^2\, A_2^4\, A_4 + 8400\, A_1^3\, A_2^4\, A_4 - 1120\, A_1^4\, A_2^4\, A_4 +$
$1904\, A_2^5\, A_4 - 1440\, A_1\, A_2^5\, A_4 + 336\, A_1^2\, A_2^5\, A_4 - 16\, A_2^6\, A_4 + 9\,152\,528\, A_3\, A_4 - 7\,845\,024\, A_1\, A_3\, A_4 +$
$4\,604\,688\, A_1^2\, A_3\, A_4 - 2\,170\,560\, A_1^3\, A_3\, A_4 + 852\,720\, A_1^4\, A_3\, A_4 - 279\,072\, A_1^5\, A_3\, A_4 + 74\,256\, A_1^6\, A_3\, A_4 -$
$15\,232\, A_1^7\, A_3\, A_4 + 2160\, A_1^8\, A_3\, A_4 - 160\, A_1^9\, A_3\, A_4 - 3\,069\,792\, A_2\, A_3\, A_4 + 3\,255\,840\, A_1\, A_2\, A_3\, A_4 -$
$2\,046\,528\, A_1^2\, A_2\, A_3\, A_4 + 930\,240\, A_1^3\, A_2\, A_3\, A_4 - 318\,240\, A_1^4\, A_2\, A_3\, A_4 + 79\,968\, A_1^5\, A_2\, A_3\, A_4 -$
$13\,440\, A_1^6\, A_2\, A_3\, A_4 + 1152\, A_1^7\, A_2\, A_3\, A_4 + 511\,632\, A_2^2\, A_3\, A_4 - 558\,144\, A_1\, A_2^2\, A_3\, A_4 + 318\,240\, A_1^2\, A_2^2\, A_3\, A_4 -$
$114\,240\, A_1^3\, A_2^2\, A_3\, A_4 + 25\,200\, A_1^4\, A_2^2\, A_3\, A_4 - 2688\, A_1^5\, A_2^2\, A_3\, A_4 - 42\,432\, A_2^3\, A_3\, A_4 + 38\,080\, A_1\, A_2^3\, A_3\, A_4 -$
$14\,400\, A_1^2\, A_2^3\, A_3\, A_4 + 2240\, A_1^3\, A_2^3\, A_3\, A_4 + 1200\, A_2^4\, A_3\, A_4 - 480\, A_1\, A_2^4\, A_3\, A_4 - 542\,640\, A_3^2\, A_4 +$
$511\,632\, A_1\, A_3^2\, A_4 - 279\,072\, A_1^2\, A_3^2\, A_4 + 106\,080\, A_1^3\, A_3^2\, A_4 - 28\,560\, A_1^4\, A_3^2\, A_4 + 5040\, A_1^5\, A_3^2\, A_4 -$
$448\, A_1^6\, A_3^2\, A_4 + 139\,536\, A_2\, A_3^2\, A_4 - 127\,296\, A_1\, A_2\, A_3^2\, A_4 + 57\,120\, A_1^2\, A_2\, A_3^2\, A_4 - 14\,400\, A_1^3\, A_2\, A_3^2\, A_4 +$
$1680\, A_1^4\, A_2\, A_3^2\, A_4 - 11\,424\, A_2^2\, A_3^2\, A_4 + 7200\, A_1\, A_2^2\, A_3^2\, A_4 - 1440\, A_1^2\, A_2^2\, A_3^2\, A_4 + 160\, A_2^3\, A_3^2\, A_4 + 10\,608\, A_3^3\, A_4 -$
$7616\, A_1\, A_3^3\, A_4 + 2400\, A_1^2\, A_3^3\, A_4 - 320\, A_1^3\, A_3^3\, A_4 - 960\, A_2\, A_3^3\, A_4 + 320\, A_1\, A_2\, A_3^3\, A_4 - 16\, A_3^4\, A_4 + 1\,961\,256\, A_4^2 -$
$1\,534\,896\, A_1\, A_4^2 + 813\,960\, A_1^2\, A_4^2 - 341\,088\, A_1^3\, A_4^2 + 116\,280\, A_1^4\, A_4^2 - 31\,824\, A_1^5\, A_4^2 + 6664\, A_1^6\, A_4^2 -$
$960\, A_1^7\, A_4^2 + 72\, A_1^8\, A_4^2 - 542\,640\, A_2\, A_4^2 + 511\,632\, A_1\, A_2\, A_4^2 - 279\,072\, A_1^2\, A_2\, A_4^2 + 106\,080\, A_1^3\, A_2\, A_4^2 -$
$28\,560\, A_1^4\, A_2\, A_4^2 + 5040\, A_1^5\, A_2\, A_4^2 - 448\, A_1^6\, A_2\, A_4^2 + 69\,768\, A_2^2\, A_4^2 - 63\,648\, A_1\, A_2^2\, A_4^2 + 28\,560\, A_1^2\, A_2^2\, A_4^2 -$
$7200\, A_1^3\, A_2^2\, A_4^2 + 840\, A_1^4\, A_2^2\, A_4^2 - 3808\, A_2^3\, A_4^2 + 2400\, A_1\, A_2^3\, A_4^2 - 480\, A_1^2\, A_2^3\, A_4^2 + 40\, A_2^4\, A_4^2 - 170\,544\, A_3\, A_4^2 +$
$139\,536\, A_1\, A_3\, A_4^2 - 63\,648\, A_1^2\, A_3\, A_4^2 + 19\,040\, A_1^3\, A_3\, A_4^2 - 3600\, A_1^4\, A_3\, A_4^2 + 336\, A_1^5\, A_3\, A_4^2 + 31\,824\, A_2\, A_3\, A_4^2 -$
$22\,848\, A_1\, A_2\, A_3\, A_4^2 + 7200\, A_1^2\, A_2\, A_3\, A_4^2 - 960\, A_1^3\, A_2\, A_3\, A_4^2 - 1440\, A_2^2\, A_3\, A_4^2 + 480\, A_1\, A_2^2\, A_3\, A_4^2 +$
$2856\, A_3^2\, A_4^2 - 1440\, A_1\, A_3^2\, A_4^2 + 240\, A_1^2\, A_3^2\, A_4^2 - 96\, A_2\, A_3^2\, A_4^2 - 15\,504\, A_4^3 + 10\,608\, A_1\, A_4^3 - 3808\, A_1^2\, A_4^3 +$
$800\, A_1^3\, A_4^3 - 80\, A_1^4\, A_4^3 + 1904\, A_2\, A_4^3 - 960\, A_1\, A_2\, A_4^3 + 160\, A_1^2\, A_2\, A_4^3 - 32\, A_2^2\, A_4^3 + 240\, A_3\, A_4^3 - 64\, A_1\, A_3\, A_4^3 +$
$4\, A_4^4 - 38\,630\,800\, A_5 + 19\,612\,560\, A_1\, A_5 - 9\,152\,528\, A_1^2\, A_5 + 3\,922\,512\, A_1^3\, A_5 - 1\,534\,896\, A_1^4\, A_5 +$
$542\,640\, A_1^5\, A_5 - 170\,544\, A_1^6\, A_5 + 46\,512\, A_1^7\, A_5 - 10\,608\, A_1^8\, A_5 + 1904\, A_1^9\, A_5 - 240\, A_1^{10}\, A_5 + 16\, A_1^{11}\, A_5 +$
$9\,152\,528\, A_2\, A_5 - 7\,845\,024\, A_1\, A_2\, A_5 + 4\,604\,688\, A_1^2\, A_2\, A_5 - 2\,170\,560\, A_1^3\, A_2\, A_5 + 852\,720\, A_1^4\, A_2\, A_5 -$
$279\,072\, A_1^5\, A_2\, A_5 + 74\,256\, A_1^6\, A_2\, A_5 - 15\,232\, A_1^7\, A_2\, A_5 + 2160\, A_1^8\, A_2\, A_5 - 160\, A_1^9\, A_2\, A_5 - 1\,534\,896\, A_2^2\, A_5 +$
$1\,627\,920\, A_1\, A_2^2\, A_5 - 1\,023\,264\, A_1^2\, A_2^2\, A_5 + 465\,120\, A_1^3\, A_2^2\, A_5 - 159\,120\, A_1^4\, A_2^2\, A_5 + 39\,984\, A_1^5\, A_2^2\, A_5 -$
$6720\, A_1^6\, A_2^2\, A_5 + 576\, A_1^7\, A_2^2\, A_5 + 170\,544\, A_2^3\, A_5 - 186\,048\, A_1\, A_2^3\, A_5 + 106\,080\, A_1^2\, A_2^3\, A_5 - 38\,080\, A_1^3\, A_2^3\, A_5 +$
$8400\, A_1^4\, A_2^3\, A_5 - 896\, A_1^5\, A_2^3\, A_5 - 10\,608\, A_2^4\, A_5 + 9520\, A_1\, A_2^4\, A_5 - 3600\, A_1^2\, A_2^4\, A_5 + 560\, A_1^3\, A_2^4\, A_5 +$
$240\, A_2^5\, A_5 - 96\, A_1\, A_2^5\, A_5 + 3\,922\,512\, A_3\, A_5 - 3\,069\,792\, A_1\, A_3\, A_5 + 1\,627\,920\, A_1^2\, A_3\, A_5 - 682\,176\, A_1^3\, A_3\, A_5 +$
$232\,560\, A_1^4\, A_3\, A_5 - 63\,648\, A_1^5\, A_3\, A_5 + 13\,328\, A_1^6\, A_3\, A_5 - 1920\, A_1^7\, A_3\, A_5 + 144\, A_1^8\, A_3\, A_5 - 1\,085\,280\, A_2\, A_3\, A_5 +$
$1\,023\,264\, A_1\, A_2\, A_3\, A_5 - 558\,144\, A_1^2\, A_2\, A_3\, A_5 + 212\,160\, A_1^3\, A_2\, A_3\, A_5 - 57\,120\, A_1^4\, A_2\, A_3\, A_5 + 10\,080\, A_1^5\, A_2\, A_3\, A_5 -$
$896\, A_1^6\, A_2\, A_3\, A_5 + 139\,536\, A_2^2\, A_3\, A_5 - 127\,296\, A_1\, A_2^2\, A_3\, A_5 + 57\,120\, A_1^2\, A_2^2\, A_3\, A_5 - 14\,400\, A_1^3\, A_2^2\, A_3\, A_5 +$
$1680\, A_1^4\, A_2^2\, A_3\, A_5 - 7616\, A_2^3\, A_3\, A_5 + 4800\, A_1\, A_2^3\, A_3\, A_5 - 960\, A_1^2\, A_2^3\, A_3\, A_5 + 80\, A_2^4\, A_3\, A_5 - 170\,544\, A_3^2\, A_5 +$
$139\,536\, A_1\, A_3^2\, A_5 - 63\,648\, A_1^2\, A_3^2\, A_5 + 19\,040\, A_1^3\, A_3^2\, A_5 - 3600\, A_1^4\, A_3^2\, A_5 + 336\, A_1^5\, A_3^2\, A_5 + 31\,824\, A_2\, A_3^2\, A_5 -$
$22\,848\, A_1\, A_2\, A_3^2\, A_5 + 7200\, A_1^2\, A_2\, A_3^2\, A_5 - 960\, A_1^3\, A_2\, A_3^2\, A_5 - 1440\, A_2^2\, A_3^2\, A_5 + 480\, A_1\, A_2^2\, A_3^2\, A_5 + 1904\, A_3^3\, A_5 -$

$960\,A_1\,A_3^3\,A_5 + 160\,A_1^2\,A_3^3\,A_5 - 64\,A_2\,A_3^3\,A_5 + 1\,534\,896\,A_4\,A_5 - 1\,085\,280\,A_1\,A_4\,A_5 + 511\,632\,A_1^2\,A_4\,A_5 -$
$186\,048\,A_1^3\,A_4\,A_5 + 53\,040\,A_1^4\,A_4\,A_5 - 11\,424\,A_1^5\,A_4\,A_5 + 1680\,A_1^6\,A_4\,A_5 - 128\,A_1^7\,A_4\,A_5 - 341\,088\,A_2\,A_4\,A_5 +$
$279\,072\,A_1\,A_2\,A_4\,A_5 - 127\,296\,A_1^2\,A_2\,A_4\,A_5 + 38\,080\,A_1^3\,A_2\,A_4\,A_5 - 7200\,A_1^4\,A_2\,A_4\,A_5 + 672\,A_1^5\,A_2\,A_4\,A_5 +$
$31\,824\,A_2^2\,A_4\,A_5 - 22\,848\,A_1\,A_2^2\,A_4\,A_5 + 7200\,A_1^2\,A_2^2\,A_4\,A_5 - 960\,A_1^3\,A_2^2\,A_4\,A_5 - 960\,A_2^3\,A_4\,A_5 +$
$320\,A_1\,A_2^3\,A_4\,A_5 - 93\,024\,A_3\,A_4\,A_5 + 63\,648\,A_1\,A_3\,A_4\,A_5 - 22\,848\,A_1^2\,A_3\,A_4\,A_5 + 4800\,A_1^3\,A_3\,A_4\,A_5 -$
$480\,A_1^4\,A_3\,A_4\,A_5 + 11\,424\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5 - 5760\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5 + 960\,A_1^2\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5 - 192\,A_2^2\,A_3\,A_4\,A_5 +$
$720\,A_3^2\,A_4\,A_5 - 192\,A_1\,A_3^2\,A_4\,A_5 - 10\,608\,A_4^2\,A_5 + 5712\,A_1\,A_4^2\,A_5 - 1440\,A_1^2\,A_4^2\,A_5 + 160\,A_1^3\,A_4^2\,A_5 +$
$720\,A_2\,A_4^2\,A_5 - 192\,A_1\,A_2\,A_4^2\,A_5 + 48\,A_3\,A_4^2\,A_5 + 271\,320\,A_5^2 - 170\,544\,A_1\,A_5^2 + 69\,768\,A_1^2\,A_5^2 - 21\,216\,A_1^3\,A_5^2 +$
$4760\,A_1^4\,A_5^2 - 720\,A_1^5\,A_5^2 + 56\,A_1^6\,A_5^2 - 46\,512\,A_2\,A_5^2 + 31\,824\,A_1\,A_2\,A_5^2 - 11\,424\,A_1^2\,A_2\,A_5^2 + 2400\,A_1^3\,A_2\,A_5^2 -$
$240\,A_1^4\,A_2\,A_5^2 + 2856\,A_2^2\,A_5^2 - 1440\,A_1\,A_2^2\,A_5^2 + 240\,A_1^2\,A_2^2\,A_5^2 - 32\,A_2^3\,A_5^2 - 10\,608\,A_3\,A_5^2 + 5712\,A_1\,A_3\,A_5^2 -$
$1440\,A_1^2\,A_3\,A_5^2 + 160\,A_1^3\,A_3\,A_5^2 + 720\,A_2\,A_3\,A_5^2 - 192\,A_1\,A_2\,A_3\,A_5^2 + 24\,A_3^2\,A_5^2 - 1904\,A_4\,A_5^2 + 720\,A_1\,A_4\,A_5^2 -$
$96\,A_1^2\,A_4\,A_5^2 + 48\,A_2\,A_4\,A_5^2 - 80\,A_5^3 + 16\,A_1\,A_5^3 - 19\,612\,560\,A_6 + 9\,152\,528\,A_1\,A_6 - 3\,922\,512\,A_1^2\,A_6 +$
$1\,534\,896\,A_1^3\,A_6 - 542\,640\,A_1^4\,A_6 + 170\,544\,A_1^5\,A_6 - 46\,512\,A_1^6\,A_6 + 10\,608\,A_1^7\,A_6 - 1904\,A_1^8\,A_6 +$
$240\,A_1^9\,A_6 - 16\,A_1^{10}\,A_6 + 3\,922\,512\,A_2\,A_6 - 3\,069\,792\,A_1\,A_2\,A_6 + 1\,627\,920\,A_1^2\,A_2\,A_6 - 682\,176\,A_1^3\,A_2\,A_6 +$
$232\,560\,A_1^4\,A_2\,A_6 - 63\,648\,A_1^5\,A_2\,A_6 + 13\,328\,A_1^6\,A_2\,A_6 - 1920\,A_1^7\,A_2\,A_6 + 144\,A_1^8\,A_2\,A_6 - 542\,640\,A_2^2\,A_6 +$
$511\,632\,A_1\,A_2^2\,A_6 - 279\,072\,A_1^2\,A_2^2\,A_6 + 106\,080\,A_1^3\,A_2^2\,A_6 - 28\,560\,A_1^4\,A_2^2\,A_6 + 5040\,A_1^5\,A_2^2\,A_6 -$
$448\,A_1^6\,A_2^2\,A_6 + 46\,512\,A_2^3\,A_6 - 42\,432\,A_1\,A_2^3\,A_6 + 19\,040\,A_1^2\,A_2^3\,A_6 - 4800\,A_1^3\,A_2^3\,A_6 + 560\,A_1^4\,A_2^3\,A_6 -$
$1904\,A_2^4\,A_6 + 1200\,A_1\,A_2^4\,A_6 - 240\,A_1^2\,A_2^4\,A_6 + 16\,A_2^5\,A_6 + 1\,534\,896\,A_3\,A_6 - 1\,085\,280\,A_1\,A_3\,A_6 +$
$511\,632\,A_1^2\,A_3\,A_6 - 186\,048\,A_1^3\,A_3\,A_6 + 53\,040\,A_1^4\,A_3\,A_6 - 11\,424\,A_1^5\,A_3\,A_6 + 1680\,A_1^6\,A_3\,A_6 -$
$128\,A_1^7\,A_3\,A_6 - 341\,088\,A_2\,A_3\,A_6 + 279\,072\,A_1\,A_2\,A_3\,A_6 - 127\,296\,A_1^2\,A_2\,A_3\,A_6 + 38\,080\,A_1^3\,A_2\,A_3\,A_6 -$
$7200\,A_1^4\,A_2\,A_3\,A_6 + 672\,A_1^5\,A_2\,A_3\,A_6 + 31\,824\,A_2^2\,A_3\,A_6 - 22\,848\,A_1\,A_2^2\,A_3\,A_6 + 7200\,A_1^2\,A_2^2\,A_3\,A_6 -$
$960\,A_1^3\,A_2^2\,A_3\,A_6 - 960\,A_2^3\,A_3\,A_6 + 320\,A_1\,A_2^3\,A_3\,A_6 - 46\,512\,A_3^2\,A_6 + 31\,824\,A_1\,A_3^2\,A_6 - 11\,424\,A_1^2\,A_3^2\,A_6 +$
$2400\,A_1^3\,A_3^2\,A_6 - 240\,A_1^4\,A_3^2\,A_6 + 5712\,A_2\,A_3^2\,A_6 - 2880\,A_1\,A_2\,A_3^2\,A_6 + 480\,A_1^2\,A_2\,A_3^2\,A_6 - 96\,A_2^2\,A_3^2\,A_6 +$
$240\,A_3^3\,A_6 - 64\,A_1\,A_3^3\,A_6 + 542\,640\,A_4\,A_6 - 341\,088\,A_1\,A_4\,A_6 + 139\,536\,A_1^2\,A_4\,A_6 - 42\,432\,A_1^3\,A_4\,A_6 +$
$9520\,A_1^4\,A_4\,A_6 - 1440\,A_1^5\,A_4\,A_6 + 112\,A_1^6\,A_4\,A_6 - 93\,024\,A_2\,A_4\,A_6 + 63\,648\,A_1\,A_2\,A_4\,A_6 - 22\,848\,A_1^2\,A_2\,A_4\,A_6 +$
$4800\,A_1^3\,A_2\,A_4\,A_6 - 480\,A_1^4\,A_2\,A_4\,A_6 + 5712\,A_2^2\,A_4\,A_6 - 2880\,A_1\,A_2^2\,A_4\,A_6 + 480\,A_1^2\,A_2^2\,A_4\,A_6 - 64\,A_2^3\,A_4\,A_6 -$
$21\,216\,A_3\,A_4\,A_6 + 11\,424\,A_1\,A_3\,A_4\,A_6 - 2880\,A_1^2\,A_3\,A_4\,A_6 + 320\,A_1^3\,A_3\,A_4\,A_6 + 1440\,A_2\,A_3\,A_4\,A_6 -$
$384\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_6 + 48\,A_3^2\,A_4\,A_6 - 1904\,A_4^2\,A_6 + 720\,A_1\,A_4^2\,A_6 - 96\,A_1^2\,A_4^2\,A_6 + 48\,A_2\,A_4^2\,A_6 + 170\,544\,A_5\,A_6 -$
$93\,024\,A_1\,A_5\,A_6 + 31\,824\,A_1^2\,A_5\,A_6 - 7616\,A_1^3\,A_5\,A_6 + 1200\,A_1^4\,A_5\,A_6 - 96\,A_1^5\,A_5\,A_6 - 21\,216\,A_2\,A_5\,A_6 +$
$11\,424\,A_1\,A_2\,A_5\,A_6 - 2880\,A_1^2\,A_2\,A_5\,A_6 + 320\,A_1^3\,A_2\,A_5\,A_6 + 720\,A_2^2\,A_5\,A_6 - 192\,A_1\,A_2^2\,A_5\,A_6 -$
$3808\,A_3\,A_5\,A_6 + 1440\,A_1\,A_3\,A_5\,A_6 - 192\,A_1^2\,A_3\,A_5\,A_6 + 96\,A_2\,A_3\,A_5\,A_6 - 480\,A_4\,A_5\,A_6 + 96\,A_1\,A_4\,A_5\,A_6 -$
$16\,A_5^2\,A_6 + 23\,256\,A_6^2 - 10\,608\,A_1\,A_6^2 + 2856\,A_1^2\,A_6^2 - 480\,A_1^3\,A_6^2 + 40\,A_1^4\,A_6^2 - 1904\,A_2\,A_6^2 + 720\,A_1\,A_2\,A_6^2 -$
$96\,A_1^2\,A_2\,A_6^2 + 24\,A_2^2\,A_6^2 - 240\,A_3\,A_6^2 + 48\,A_1\,A_3\,A_6^2 - 16\,A_4\,A_6^2 - 9\,152\,528\,A_7 + 3\,922\,512\,A_1\,A_7 -$
$1\,534\,896\,A_1^2\,A_7 + 542\,640\,A_1^3\,A_7 - 170\,544\,A_1^4\,A_7 + 46\,512\,A_1^5\,A_7 - 10\,608\,A_1^6\,A_7 + 1904\,A_1^7\,A_7 -$
$240\,A_1^8\,A_7 + 16\,A_1^9\,A_7 + 1\,534\,896\,A_2\,A_7 - 1\,085\,280\,A_1\,A_2\,A_7 + 511\,632\,A_1^2\,A_2\,A_7 - 186\,048\,A_1^3\,A_2\,A_7 +$
$53\,040\,A_1^4\,A_2\,A_7 - 11\,424\,A_1^5\,A_2\,A_7 + 1680\,A_1^6\,A_2\,A_7 - 128\,A_1^7\,A_2\,A_7 - 170\,544\,A_2^2\,A_7 + 139\,536\,A_1\,A_2^2\,A_7 -$
$63\,648\,A_1^2\,A_2^2\,A_7 + 19\,040\,A_1^3\,A_2^2\,A_7 - 3600\,A_1^4\,A_2^2\,A_7 + 336\,A_1^5\,A_2^2\,A_7 + 10\,608\,A_2^3\,A_7 - 7616\,A_1\,A_2^3\,A_7 +$
$2400\,A_1^2\,A_2^3\,A_7 - 320\,A_1^3\,A_2^3\,A_7 - 240\,A_2^4\,A_7 + 80\,A_1\,A_2^4\,A_7 + 542\,640\,A_3\,A_7 - 341\,088\,A_1\,A_3\,A_7 +$
$139\,536\,A_1^2\,A_3\,A_7 - 42\,432\,A_1^3\,A_3\,A_7 + 9520\,A_1^4\,A_3\,A_7 - 1440\,A_1^5\,A_3\,A_7 + 112\,A_1^6\,A_3\,A_7 - 93\,024\,A_2\,A_3\,A_7 +$
$63\,648\,A_1\,A_2\,A_3\,A_7 - 22\,848\,A_1^2\,A_2\,A_3\,A_7 + 4800\,A_1^3\,A_2\,A_3\,A_7 - 480\,A_1^4\,A_2\,A_3\,A_7 + 5712\,A_2^2\,A_3\,A_7 -$
$2880\,A_1\,A_2^2\,A_3\,A_7 + 480\,A_1^2\,A_2^2\,A_3\,A_7 - 64\,A_2^3\,A_3\,A_7 - 10\,608\,A_3^2\,A_7 + 5712\,A_1\,A_3^2\,A_7 - 1440\,A_1^2\,A_3^2\,A_7 +$
$160\,A_1^3\,A_3^2\,A_7 + 720\,A_2\,A_3^2\,A_7 - 192\,A_1\,A_2\,A_3^2\,A_7 + 16\,A_3^3\,A_7 + 170\,544\,A_4\,A_7 - 93\,024\,A_1\,A_4\,A_7 +$
$31\,824\,A_1^2\,A_4\,A_7 - 7616\,A_1^3\,A_4\,A_7 + 1200\,A_1^4\,A_4\,A_7 - 96\,A_1^5\,A_4\,A_7 - 21\,216\,A_2\,A_4\,A_7 + 11\,424\,A_1\,A_2\,A_4\,A_7 -$
$2880\,A_1^2\,A_2\,A_4\,A_7 + 320\,A_1^3\,A_2\,A_4\,A_7 + 720\,A_2^2\,A_4\,A_7 - 192\,A_1\,A_2^2\,A_4\,A_7 - 3808\,A_3\,A_4\,A_7 + 1440\,A_1\,A_3\,A_4\,A_7 -$
$192\,A_1^2\,A_3\,A_4\,A_7 + 96\,A_2\,A_3\,A_4\,A_7 - 240\,A_4^2\,A_7 + 48\,A_1\,A_4^2\,A_7 + 46\,512\,A_5\,A_7 - 21\,216\,A_1\,A_5\,A_7 +$

$$5712\,A_1^2\,A_5\,A_7-960\,A_1^3\,A_5\,A_7+80\,A_1^4\,A_5\,A_7-3808\,A_2\,A_5\,A_7+1440\,A_1\,A_2\,A_5\,A_7-192\,A_1^2\,A_2\,A_5\,A_7+$$
$$48\,A_2^2\,A_5\,A_7-480\,A_3\,A_5\,A_7+96\,A_1\,A_3\,A_5\,A_7-32\,A_4\,A_5\,A_7+10\,608\,A_6\,A_7-3808\,A_1\,A_6\,A_7+720\,A_1^2\,A_6\,A_7-$$
$$64\,A_1^3\,A_6\,A_7-480\,A_2\,A_6\,A_7+96\,A_1\,A_2\,A_6\,A_7-32\,A_3\,A_6\,A_7+952\,A_7^2-240\,A_1\,A_7^2+24\,A_1^2\,A_7^2-16\,A_2\,A_7^2-$$
$$3\,922\,512\,A_8+1\,534\,896\,A_1\,A_8-542\,640\,A_1^2\,A_8+170\,544\,A_1^3\,A_8-46\,512\,A_1^4\,A_8+10\,608\,A_1^5\,A_8-$$
$$1904\,A_1^6\,A_8+240\,A_1^7\,A_8-16\,A_1^8\,A_8+542\,640\,A_2\,A_8-341\,088\,A_1\,A_2\,A_8+139\,536\,A_1^2\,A_2\,A_8-$$
$$42\,432\,A_1^3\,A_2\,A_8+9520\,A_1^4\,A_2\,A_8-1440\,A_1^5\,A_2\,A_8+112\,A_1^6\,A_2\,A_8-46\,512\,A_2^2\,A_8+31\,824\,A_1\,A_2^2\,A_8-$$
$$11\,424\,A_1^2\,A_2^2\,A_8+2400\,A_1^3\,A_2^2\,A_8-240\,A_1^4\,A_2^2\,A_8+1904\,A_2^3\,A_8-960\,A_1\,A_2^3\,A_8+160\,A_1^2\,A_2^3\,A_8-$$
$$16\,A_2^4\,A_8+170\,544\,A_3\,A_8-93\,024\,A_1\,A_3\,A_8+31\,824\,A_1^2\,A_3\,A_8-7616\,A_1^3\,A_3\,A_8+1200\,A_1^4\,A_3\,A_8-$$
$$96\,A_1^5\,A_3\,A_8-21\,216\,A_2\,A_3\,A_8+11\,424\,A_1\,A_2\,A_3\,A_8-2880\,A_1^2\,A_2\,A_3\,A_8+320\,A_1^3\,A_2\,A_3\,A_8+720\,A_2^2\,A_3\,A_8-$$
$$192\,A_1\,A_2^2\,A_3\,A_8-1904\,A_3^2\,A_8+720\,A_1\,A_3^2\,A_8-96\,A_1^2\,A_3^2\,A_8+48\,A_2\,A_3^2\,A_8+46\,512\,A_4\,A_8-21\,216\,A_1\,A_4\,A_8+$$
$$5712\,A_1^2\,A_4\,A_8-960\,A_1^3\,A_4\,A_8+80\,A_1^4\,A_4\,A_8-3808\,A_2\,A_4\,A_8+1440\,A_1\,A_2\,A_4\,A_8-192\,A_1^2\,A_2\,A_4\,A_8+$$
$$48\,A_2^2\,A_4\,A_8-480\,A_3\,A_4\,A_8+96\,A_1\,A_3\,A_4\,A_8-16\,A_4^2\,A_8+10\,608\,A_5\,A_8-3808\,A_1\,A_5\,A_8+720\,A_1^2\,A_5\,A_8-$$
$$64\,A_1^3\,A_5\,A_8-480\,A_2\,A_5\,A_8+96\,A_1\,A_2\,A_5\,A_8-32\,A_3\,A_5\,A_8+1904\,A_6\,A_8-480\,A_1\,A_6\,A_8+48\,A_1^2\,A_6\,A_8-$$
$$32\,A_2\,A_6\,A_8+240\,A_7\,A_8-32\,A_1\,A_7\,A_8+8\,A_8^2-1\,534\,896\,A_9+542\,640\,A_1\,A_9-170\,544\,A_1^2\,A_9+$$
$$46\,512\,A_1^3\,A_9-10\,608\,A_1^4\,A_9+1904\,A_1^5\,A_9-240\,A_1^6\,A_9+16\,A_1^7\,A_9+170\,544\,A_2\,A_9-93\,024\,A_1\,A_2\,A_9+$$
$$31\,824\,A_1^2\,A_2\,A_9-7616\,A_1^3\,A_2\,A_9+1200\,A_1^4\,A_2\,A_9-96\,A_1^5\,A_2\,A_9-10\,608\,A_2^2\,A_9+5712\,A_1\,A_2^2\,A_9-$$
$$1440\,A_1^2\,A_2^2\,A_9+160\,A_1^3\,A_2^2\,A_9+240\,A_2^3\,A_9-64\,A_1\,A_2^3\,A_9+46\,512\,A_3\,A_9-21\,216\,A_1\,A_3\,A_9+$$
$$5712\,A_1^2\,A_3\,A_9-960\,A_1^3\,A_3\,A_9+80\,A_1^4\,A_3\,A_9-3808\,A_2\,A_3\,A_9+1440\,A_1\,A_2\,A_3\,A_9-192\,A_1^2\,A_2\,A_3\,A_9+$$
$$48\,A_2^2\,A_3\,A_9-240\,A_3^2\,A_9+48\,A_1\,A_3^2\,A_9+10\,608\,A_4\,A_9-3808\,A_1\,A_4\,A_9+720\,A_1^2\,A_4\,A_9-64\,A_1^3\,A_4\,A_9-$$
$$480\,A_2\,A_4\,A_9+96\,A_1\,A_2\,A_4\,A_9-32\,A_3\,A_4\,A_9+1904\,A_5\,A_9-480\,A_1\,A_5\,A_9+48\,A_1^2\,A_5\,A_9-32\,A_2\,A_5\,A_9+$$
$$240\,A_6\,A_9-32\,A_1\,A_6\,A_9+16\,A_7\,A_9-542\,640\,A_{10}+170\,544\,A_1\,A_{10}-46\,512\,A_1^2\,A_{10}+10\,608\,A_1^3\,A_{10}-$$
$$1904\,A_1^4\,A_{10}+240\,A_1^5\,A_{10}-16\,A_1^6\,A_{10}+46\,512\,A_2\,A_{10}-21\,216\,A_1\,A_2\,A_{10}+5712\,A_1^2\,A_2\,A_{10}-$$
$$960\,A_1^3\,A_2\,A_{10}+80\,A_1^4\,A_2\,A_{10}-1904\,A_2^2\,A_{10}+720\,A_1\,A_2^2\,A_{10}-96\,A_1^2\,A_2^2\,A_{10}+16\,A_2^3\,A_{10}+10\,608\,A_3\,A_{10}-$$
$$3808\,A_1\,A_3\,A_{10}+720\,A_1^2\,A_3\,A_{10}-64\,A_1^3\,A_3\,A_{10}-480\,A_2\,A_3\,A_{10}+96\,A_1\,A_2\,A_3\,A_{10}-16\,A_3^2\,A_{10}+$$
$$1904\,A_4\,A_{10}-480\,A_1\,A_4\,A_{10}+48\,A_1^2\,A_4\,A_{10}-32\,A_2\,A_4\,A_{10}+240\,A_5\,A_{10}-32\,A_1\,A_5\,A_{10}+16\,A_6\,A_{10}-$$
$$170\,544\,A_{11}+46\,512\,A_1\,A_{11}-10\,608\,A_1^2\,A_{11}+1904\,A_1^3\,A_{11}-240\,A_1^4\,A_{11}+16\,A_1^5\,A_{11}+10\,608\,A_2\,A_{11}-$$
$$3808\,A_1\,A_2\,A_{11}+720\,A_1^2\,A_2\,A_{11}-64\,A_1^3\,A_2\,A_{11}-240\,A_2^2\,A_{11}+48\,A_1\,A_2^2\,A_{11}+1904\,A_3\,A_{11}-480\,A_1\,A_3\,A_{11}+$$
$$48\,A_1^2\,A_3\,A_{11}-32\,A_2\,A_3\,A_{11}+240\,A_4\,A_{11}-32\,A_1\,A_4\,A_{11}+16\,A_5\,A_{11}-46\,512\,A_{12}+10\,608\,A_1\,A_{12}-$$
$$1904\,A_1^2\,A_{12}+240\,A_1^3\,A_{12}-16\,A_1^4\,A_{12}+1904\,A_2\,A_{12}-480\,A_1\,A_2\,A_{12}+48\,A_1^2\,A_2\,A_{12}-16\,A_2^2\,A_{12}+$$
$$240\,A_3\,A_{12}-32\,A_1\,A_3\,A_{12}+16\,A_4\,A_{12}-10\,608\,A_{13}+1904\,A_1\,A_{13}-240\,A_1^2\,A_{13}+16\,A_1^3\,A_{13}+240\,A_2\,A_{13}-$$
$$32\,A_1\,A_2\,A_{13}+16\,A_3\,A_{13}-1904\,A_{14}+240\,A_1\,A_{14}-16\,A_1^2\,A_{14}+16\,A_2\,A_{14}-240\,A_{15}+16\,A_1\,A_{15}-16\,A_{16}$$

```
SetPrecision[f16[30000], 105]
```

$1.520953753134287904166911250967765702700173819859730877029288769188490763188380482304467152819480713552\,8\times10^{-37}$

```
SetPrecision[g16, 150]
```

$1.520953753134287904166911250967765702700173819859730877029288769188490763188380482304467152819480713560\,6\times10^{-37}$

```
1.5209537531342879041669112509677657027001738198597308770292887691884907631883804823\
04467152819480713552776152151427781`103.64525271013926*^-37 /
 1.5209537531342879041669112509677657027001738198597308770292887691884907631883804823\
04467152819480713560634755589948988`103.84156841793063*^-37
```

0.99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999483

```
1 - %
```

5.2×10^{-102}

即ち、臨界上の零点30,000個の16乗和は理論値の101ナイン(101N)を占めている。従ってリーマン仮説が成立しない確率は10^{-101}未満である。

参考までに、筆者のパソコン（Intel Core i7-9750H, 16GB）では、$f_{16}(30000)$の計算に3.5時間、g_{16}の計算には2秒を要した。

計算精度は次数が1上がる毎に6.3桁上昇するように見える。つまり、冪の次数と計算精度はほぼ比例する。そうならば、リーマン仮説が成立しない確率は、160次ならば10^{-1000}、1600次ならば10^{-10000}となる筈である。本章で示した算式を用いればこのような計算は可能である。それ故、リーマン仮説が成立しない確率は限りなく0に近いと言える。

2025.01.17

河野 和
広島市

宇宙人の数学