

14 李の係数のポリガンマ関数による表現

14・1 零点の逆数の総和とその記法

零点の逆数の総和

リーマンゼータ関数の零点の逆数の総和は一般に次のように記述される。

$$\lambda_1 = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \quad (1.1)$$

この記法は概念的でありこの限りで有効である。しかし、この記法ではこの逆数の半多重級数を記述出来ない。例えば、 λ_1^3 を強いてこの記法で表せば次のようになる。

$$\left(\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \right)^3 = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^3} + 3 \left(\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \right) \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^2} - 3 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^2} \quad (1.3)$$

但し、2重和と3重和において ρ は重複しないものとする。

しかし、この記法は不便な上に実計算が不可能である。そこで本章では次の記法を用いることにする。

本章における記法

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \\ & \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}} \\ & \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}} \\ & \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3} z_{r_4}} \\ & \vdots \\ & \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} \cdots z_{r_n}} \end{aligned}$$

この記法の可能性

問題は $\sum_{\rho}$ を $\sum_{r_1=1}^{\infty}$ で表せるか否かであるが、結論から言うとこれは可能である。

リーマンゼータ関数の零点は共役複素数であるので、 x, y をそれぞれ実数とすれば $x \pm iy$ である。

それ故、 $z_{r_1} \quad r_t = 1, 2, 3, \dots$ をそれぞれ次のように割り当てれば良い。

$$z_1 = x_1 - iy_1, \quad z_2 = x_1 + iy_1, \quad z_3 = x_2 - iy_2, \quad z_4 = x_2 + iy_2, \quad z_5 = x_3 - iy_3, \quad z_6 = x_3 + iy_3, \quad \dots$$

このようにすると、零点が6個の場合それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=1}^6 \frac{1}{z_{r_1}} &= \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{x_r - iy_r} + \frac{1}{x_r + iy_r} \right) = \sum_{r=1}^3 \frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2} \\ \sum_{r_1=1}^6 \sum_{r_2=1+r_1}^6 \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}} &= \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1+r}^3 \frac{2^2 x_r x_s}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)} + \sum_{r=1}^3 \frac{2^0}{x_r^2 + y_r^2} \\ \sum_{r_1=1}^6 \sum_{r_2=1+r_1}^6 \sum_{r_3=1+r_2}^6 \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}} &= \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1+r}^3 \sum_{t=1+s}^3 \frac{2^3 x_r x_s x_t}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)(x_t^2 + y_t^2)} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1+r}^3 \frac{2^1(x_r + x_s)}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)}$$

そして零点が無限個の場合、 Σ の上限も全て ∞ とすることができる。即ち、

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_r - iy_r} + \frac{1}{x_r + iy_r} \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \frac{2^2 x_r x_s}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^0}{x_r^2 + y_r^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \sum_{t=1+s}^{\infty} \frac{2^3 x_r x_s x_t}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)(x_t^2 + y_t^2)} \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \frac{2^1(x_r + x_s)}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \sum_{t=1+s}^{\infty} \sum_{u=1+t}^{\infty} \frac{2^4 x_r x_s x_t x_u}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)(x_t^2 + y_t^2)(x_u^2 + y_u^2)} \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \sum_{t=1+s}^{\infty} \frac{2^2(x_r x_s + x_r x_t + x_s x_t)}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)(x_t^2 + y_t^2)} \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \frac{2^0}{(x_r^2 + y_r^2)(x_s^2 + y_s^2)} \end{aligned}$$

⋮

14・2 李の基準と李係数

リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ に関する李の基準は次のようである。

李の基準

リーマン仮説は次の不等式と同値である。

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} \log \xi(z)] \right|_{z=1} \geq 0 \quad \text{for } n=1, 2, 3, \dots$$

但し、

$$\xi(z) = -z(1-z) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z)$$

リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点を ρ とするとき、李係数 λ_n は次と同値なることが知られている。

李係数 λ_n

$$\lambda_n = \sum_{\rho} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right)$$

但し、 Σ は全ての ρ に亘る。

最初の幾つかを展開すると次のとおり。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \\ \lambda_2 &= \sum_{\rho} \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) = 2 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^2} \\ \lambda_3 &= \sum_{\rho} \left(\frac{3}{\rho} - \frac{3}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \right) = 3 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} - 3 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^2} + \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^3} \\ \lambda_4 &= \sum_{\rho} \left(\frac{4}{\rho} - \frac{6}{\rho^2} + \frac{4}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^4} \right) = 4 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} - 6 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^2} + 4 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^3} - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ここで、前節の記法を用いれば、李係数 λ_n は次のように記述できる。

補題 14・2・1

リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点を z_{r1} $r_1 = 1, 2, 3, \dots$ とするとき、李係数 λ_n $n = 1, 2, 3, \dots$ は次で表される。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}} \\ \lambda_2 &= 2 \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}} - \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}^2} \\ \lambda_3 &= 3 \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}} - 3 \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}^2} + \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}^3} \\ \lambda_4 &= 4 \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}} - 6 \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}^2} + 4 \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}^3} - \sum_{r1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r1}^4} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n = n \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^k} \quad (2.1n)$$

李係数の半多重級数表示

さて、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ は次の半多重級数で表すことが出来る。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}}, \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}}, \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}}, \dots$$

それには先ず次の漸化式が必要である。

補題 14・2・2

n を 2 以上の自然数とすると、収束する無限級数について次式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^n} &= \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \right)^n - 2 \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \right)^{n-2} H_2 \\ &\quad - \sum_{s=0}^{n-3} \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \right)^s \left\{ \sum_{t=2}^{n-s-1} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^{n-s-t}} \right) H_t + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s} \right\} \end{aligned} \quad (2.2n)$$

但し、

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}} \\ H_3 &= \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}} \\ &\vdots \\ H_n &= \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \dots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3} \dots z_{r_n}} \end{aligned} \quad (2.Hn)$$

$n \leq 2$ のとき (2.2n) の第 3 項は無視。

証明

拙著「05 冪級数と半多重級数」(無限次方程式編)の 定理 5・2・2 は次のようであった。

定理 5・2・2 (再掲)

n を 2 以上の自然数とすると、収束する無限級数について次式が成立する。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1} \right)^n &= \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^n + 2 \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1} \right)^{n-2} H_2 \\ &\quad + \sum_{s=0}^{n-3} \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1} \right)^s \left\{ \sum_{t=2}^{n-s-1} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{n-s-t} \right) H_t + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s} \right\} \end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} \\ H_3 &= \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \cdots a_{r_n}$$

$n \leq 2$ のとき 第3項は無視。

この定理において a_{r_n} を $1/z_{r_n}$ に置換して、補題 14・2・2 を得る。 Q.E.D.

他方、補題 14・2・2 の半多重級数と $\xi(z)$ のマクローリン級数の係数との間には次なる関係がある。

補題 14・2・3

関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r$$

すると、 $\xi(z)$ の零点 z_{r_1} $r_1 = 1, 2, 3, \dots$ について次式が成立する。

$$A_1 = - \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \quad (2.3_1)$$

$$A_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}}$$

$$A_3 = - \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}}$$

$$A_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3} z_{r_4}}$$

⋮

$$A_n = (-1)^n \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} \cdots z_{r_n}} \quad (2.3_n)$$

証明

$\xi(z)$ はその零点 z_{r_1} $r_1 = 1, 2, 3, \dots$ によって次のように完全に因数分解される。

$$\xi(z) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \left(1 - \frac{z}{z_3}\right) \left(1 - \frac{z}{z_4}\right) \cdots$$

拙著「3 無限次方程式における根と係数」(無限次方程式編) 公式 3・2・1 によれば、無限次方程式においても根と係数の関係が成立し、与式を得る。 Q.E.D.

そして、これらの A_n $n=1, 2, 3, 4, \dots$ の値は $\xi(z)$ を構成する関数 $I(z)$, $\zeta(z)$ の高階微係数及び π によって与えられる。即ち、

補題 14・2・3 の係数 A_r $r=1, 2, 3, \dots$ は 拙著「09 完備化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数」の定理 9・1・3 で与えられる。この定理を少し形を変えて再掲すると次のようになる。

補題 14・2・4

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r$$

すると、これらの係数 A_r $r=0, 1, 2, 3, \dots$ は次で与えられる。

$$A_r = \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{\log^{r-s} \pi}{2^{r-s} (r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t} (s-t)!} h_t$$

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ \sum_{k=1}^r B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

但し、 $\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、 $B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、 γ_s はスチルチエス定数である。

A_r の最初の幾つかは次のようになる。

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{\text{Log}[\pi]}{2} - \gamma_0 - \frac{1}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$A_2 = \frac{\text{Log}[\pi]^2}{8} - \frac{1}{2} \text{Log}[\pi] \gamma_0 - \gamma_1 - \frac{1}{4} \text{Log}[\pi] \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{2} \gamma_0 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{8} \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \right)$$

$$A_3 = \frac{\text{Log}[\pi]^3}{48} - \frac{1}{8} \text{Log}[\pi]^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \text{Log}[\pi] \gamma_1 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{1}{16} \text{Log}[\pi]^2 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] +$$

$$\frac{1}{4} \text{Log}[\pi] \gamma_0 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{2} \gamma_1 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16} \text{Log}[\pi] \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \right) -$$

$$\frac{1}{8} \gamma_0 \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \right) + \frac{1}{48} \left(-\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 - 3 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] - \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] \right)$$

$$A_4 = \frac{\text{Log}[\pi]^4}{384} - \frac{1}{48} \text{Log}[\pi]^3 \gamma_0 - \frac{1}{8} \text{Log}[\pi]^2 \gamma_1 - \frac{1}{4} \text{Log}[\pi] \gamma_2 - \frac{\gamma_3}{6} -$$

$$\frac{1}{96} \text{Log}[\pi]^3 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16} \text{Log}[\pi]^2 \gamma_0 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4} \text{Log}[\pi] \gamma_1 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4} \gamma_2 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] +$$

$$\frac{1}{64} \text{Log}[\pi]^2 \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \right) - \frac{1}{16} \text{Log}[\pi] \gamma_0 \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \right) - \frac{1}{8} \gamma_1 \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \right) +$$

$$\frac{1}{96} \text{Log}[\pi] \left(-\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 - 3 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] - \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] \right) - \frac{1}{48} \gamma_0 \left(-\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 - 3 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] - \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] \right) +$$

$$\frac{1}{384} \left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^4 + 6 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + 3 \psi_1\left[\frac{3}{2}\right]^2 + 4 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] + \psi_3\left[\frac{3}{2}\right] \right)$$

`Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]`

`γs_ := StieltjesGamma[s]`

`SetPrecision[{A1, A2, A3, A4}, 14]`

`{-0.0230957089661, 0.0233438645342, -0.0004979838499, 0.0002531817303}`

補題 14・2・2 ～ 補題 14・2・4 を総合すると次の定理が得られる。

定理 14・2・5

リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点を z_{r1} $r_1 = 1, 2, 3, \dots$ とするとき、李係数 λ_n $n = 1, 2, 3, \dots$ は次で表される。

$$\lambda_n = -nA_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^k} \quad (n=1 \text{ のとき 右辺の第2項は無視。})$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} = -A_1$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^k} = (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2}A_2 - \sum_{s=0}^{k-3} (-A_1)^s \left\{ \sum_{t=2}^{k-s-1} \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^{k-s-t}} \right) A_t + (k-s)A_{k-s} \right\}$$

($k \leq 2$ のとき 右辺の第3項は無視。)

但し、 A_r $r=1, 2, 3, \dots$ は $\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、 $B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式、 γ_s をスチルチエス定数として次式で定まる、

$$A_r = \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{\log^{r-s} \pi}{2^{r-s} (r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t} (s-t)!} h_t \quad (2.5a)$$

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^r B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

証明

補題 14・2・1 と 補題 14・2・2 より

$$\lambda_n = n \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^k} \quad (2.1n)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^n} &= \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \right)^n - 2 \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \right)^{n-2} H_2 \\ &\quad - \sum_{s=0}^{n-3} \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} \right)^s \left\{ \sum_{t=2}^{n-s-1} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^{n-s-t}} \right) H_t + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s} \right\} \end{aligned} \quad (2.2n)$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \dots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3} \dots z_{r_n}} \quad (2.Hn)$$

次に、補題 14・2・3 より

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}} = -A_1 \quad (2.3_1)$$

これを (2.1n) と (2.2n) に代入して

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -nA_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^k} \\ \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^n} &= (-A_1)^n - 2(-A_1)^{n-2} H_2 \\ &\quad - \sum_{s=0}^{n-3} (-A_1)^s \left\{ \sum_{t=2}^{n-s-1} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^{n-s-t}} \right) H_t + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s} \right\} \end{aligned}$$

次に、(2.Hn) と 補題 14・2・3 (2.3n) より

$$H_n = (-1)^n A_n \quad n=2, 3, 4, \dots$$

これらを上の2式に代入して与式を得る。

そして但し書きの A_r , g_r , h_r は補題 14・2・4 より従う。 Q.E.D.

定理 14・2・5 の記述は見易いが、計算には不向きである。そこで、冪乗和を次のように置換する。

$$G_1 = -A_1 \quad , \quad G_k = \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}^k} \quad k=2,3,4,\dots$$

すると、再帰計算に適した次の定理が得られる。

定理 14・2・5'

李係数 λ_n $n = 1, 2, 3, \dots$ は次で計算できる。

$$\lambda_n = -nA_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} G_k \quad (n=1 \text{ のとき 右辺の第 2 項は無視。})$$

$$G_1 = -A_1$$

$$G_k = (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2}A_2 - \sum_{s=0}^{k-3} (-A_1)^s \left\{ \sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} A_t + (k-s) A_{k-s} \right\}$$

($k \leq 2$ のとき 右辺の第 3 項は無視。)

但し、 A_r $r=1, 2, 3, \dots$ は $\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、 $B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式、 γ_s をスチルチエス定数として次式で定まる、

$$A_r = \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{\log^{r-s} \pi}{2^{r-s} (r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t} (s-t)!} h_t$$

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^r B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

実際、数式処理ソフト *Mathematica* を用いてこの定理を実行すれば、次のようになる。

Li coefficients (symbolic) λ_n

$$\lambda_n := -n A_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \text{Binomial}[n, k] G_k$$

$$G_1 := -A_1$$

$$G_k := (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2} A_2 - \sum_{s=0}^{k-3} (-A_1)^s \left(\sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} A_t + (k-s) A_{k-s} \right)$$

Where,

$$A_r := \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^s \frac{\text{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s} (r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t} (s-t)!} h_t$$

$$g_r\left[\frac{3}{2}\right] := \text{If}\left[r=0, 1, \sum_{k=1}^r \text{BellY}[r, k, \text{Tbl}\psi\left[r, \frac{3}{2}\right]]\right]$$

$$h_r := \text{If}\left[r=0, 1, -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

$$\text{Tbl}\psi[r_ , z_] := \text{Table}[\psi_k[z], \{k, 0, r-1\}]$$

$$\begin{aligned}
\text{Expand}[\lambda_1] &= -\frac{\text{Log}[\pi]}{2} + \gamma_0 + \frac{1}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] \\
\text{Expand}[\lambda_2] &= -\text{Log}[\pi] + 2\gamma_0 - \gamma_0^2 - 2\gamma_1 + \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] \\
\text{Expand}[\lambda_3] &= -\frac{3\text{Log}[\pi]}{2} + 3\gamma_0 - 3\gamma_0^2 + \gamma_0^3 - 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3\gamma_2}{2} + \frac{3}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{3}{4} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] \\
\text{Expand}[\lambda_4] &= -2\text{Log}[\pi] + 4\gamma_0 - 6\gamma_0^2 + 4\gamma_0^3 - \gamma_0^4 - 12\gamma_1 + 12\gamma_0\gamma_1 - 4\gamma_0^2\gamma_1 - \\
&\quad 2\gamma_1^2 + 6\gamma_2 - 2\gamma_0\gamma_2 - \frac{2\gamma_3}{3} + 2\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{3}{2} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{96} \psi_3\left[\frac{3}{2}\right] \\
\text{Expand}[\lambda_5] &= -\frac{5\text{Log}[\pi]}{2} + 5\gamma_0 - 10\gamma_0^2 + 10\gamma_0^3 - 5\gamma_0^4 + \gamma_0^5 - 20\gamma_1 + 30\gamma_0\gamma_1 - \\
&\quad 20\gamma_0^2\gamma_1 + 5\gamma_0^3\gamma_1 - 10\gamma_1^2 + 5\gamma_0\gamma_1^2 + 15\gamma_2 - 10\gamma_0\gamma_2 + \frac{5}{2} \gamma_0^2\gamma_2 + \frac{5\gamma_1\gamma_2}{2} - \frac{10\gamma_3}{3} + \\
&\quad \frac{5\gamma_0\gamma_3}{6} + \frac{5\gamma_4}{24} + \frac{5}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{2} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{8} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{96} \psi_3\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{768} \psi_4\left[\frac{3}{2}\right] \\
\text{Expand}[\lambda_6] &= -3\text{Log}[\pi] + 6\gamma_0 - 15\gamma_0^2 + 20\gamma_0^3 - 15\gamma_0^4 + 6\gamma_0^5 - \gamma_0^6 - 30\gamma_1 + 60\gamma_0\gamma_1 - 60\gamma_0^2\gamma_1 + \\
&\quad 30\gamma_0^3\gamma_1 - 6\gamma_0^4\gamma_1 - 30\gamma_1^2 + 30\gamma_0\gamma_1^2 - 9\gamma_0^2\gamma_1^2 - 2\gamma_1^3 + 30\gamma_2 - 30\gamma_0\gamma_2 + 15\gamma_0^2\gamma_2 - \\
&\quad 3\gamma_0^3\gamma_2 + 15\gamma_1\gamma_2 - 6\gamma_0\gamma_1\gamma_2 - \frac{3\gamma_2^2}{4} - 10\gamma_3 + 5\gamma_0\gamma_3 - \gamma_0^2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_3 + \frac{5\gamma_4}{4} - \frac{\gamma_0\gamma_4}{4} - \\
&\quad \frac{\gamma_5}{20} + 3\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{15}{4} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{4} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{32} \psi_3\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{128} \psi_4\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{7680} \psi_5\left[\frac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

そして $\psi_n(3/2)$ と γ_n に数値を与えて λ_n を計算すると次のようになる。

Li coefficients (numerical) λ_n

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

```
γs_ := StieltjesGamma[s]
```

```
SetPrecision[{λ1, λ2, λ3, λ4}, 14]
```

```
{0.0230957089661, 0.092345735228, 0.207638920554, 0.36879047949}
```

これらの結果は既知の値 (OEIS A074760, A104539, A104540, A104541) と一致している。

14・3 李係数の構成要素

さて、前節で得られた李係数 λ_n は次のようであった。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) + \gamma_0 \\ \lambda_2 &= -\log \pi + \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{4} \psi_1 \left(\frac{3}{2} \right) + 2\gamma_0 - \gamma_0^2 - 2\gamma_1 \\ \lambda_3 &= -\frac{3}{2} \log \pi + \frac{3}{2} \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{3}{4} \psi_1 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{16} \psi_2 \left(\frac{3}{2} \right) \\ &\quad + 3\gamma_0 - 3\gamma_0^2 + \gamma_0^3 - 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3}{2} \gamma_2 \\ \lambda_4 &= -2 \log \pi + 2 \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} \psi_1 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{4} \psi_2 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{96} \psi_3 \left(\frac{3}{2} \right) \\ &\quad + 4\gamma_0 - 6\gamma_0^2 + 4\gamma_0^3 - \gamma_0^4 - 12\gamma_1 + 12\gamma_0\gamma_1 - 4\gamma_0^2\gamma_1 - 2\gamma_1^2 + 6\gamma_2 - 2\gamma_0\gamma_2 - \frac{2}{3} \gamma_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

これらを改めて観察すると、李係数 λ_n は三つの要素から成っていることが判る。即ち $\log \pi$ 、ポリガンマ関数 $\psi_n(3/2)$ 及びスチルチェス定数 γ_n から構成されている。これらの出自はそれぞれ $\pi^{-z/2}$, $\zeta(z)$ 及び $\Gamma(1/2)$ である。

しかも、これらは綺麗に3分割されている。即ち、 $\gamma_2 \log \pi$ や $\gamma_3 \psi_1(3/2)$ の項は存在しない。これらの要素が補題 14・2・4 の A_n から得られたことを思えば、これは驚くべきことである。

定式化可能な多項式 μ_n

λ_n のうち、 $\log \pi$ と $\psi_n(3/2)$ から成る多項式は定式化が可能そうに見える。実際、次の公式を証明することが出来る。

公式 14・3・1

李係数 λ_n $n=1, 2, 3 \dots$ のうち、 $\log \pi$ とポリガンマ関数 $\psi_n(3/2)$ から成る多項式 μ_n $n=1, 2, 3 \dots$ は次式で与えられる。

$$\mu_n = -\frac{n}{2} \log \pi + \sum_{k=1}^n \frac{n}{2^k k!} \binom{n-1}{k-1} \psi_{k-1} \left(\frac{3}{2} \right) \quad (3.1n)$$

証明

$\log \pi$ の単項式は一見して次のようであることが解る。

$$-\frac{n}{2} \log \pi \quad n=1, 2, 3, \dots$$

よって

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) \\ \mu_2 &= -\frac{2}{2} \log \pi + \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{4} \psi_1 \left(\frac{3}{2} \right) \\ \mu_3 &= -\frac{3}{2} \log \pi + \frac{3}{2} \psi_0 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{3}{4} \psi_1 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{16} \psi_2 \left(\frac{3}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\mu_4 = -\frac{4}{2} \log \pi + 2 \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} \psi_2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{96} \psi_3\left(\frac{3}{2}\right)$$

⋮

$\psi_n(3/2)$ の項を通分すると

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2^1 0!} \left\{ \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$\mu_2 = -\frac{2}{2} \log \pi + \frac{1}{2^2 1!} \left\{ 4 \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$\mu_3 = -\frac{3}{2} \log \pi + \frac{1}{2^3 2!} \left\{ 24 \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + 12 \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$\mu_4 = -\frac{4}{2} \log \pi + \frac{1}{2^4 3!} \left\{ 192 \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + 144 \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + 24 \psi_2\left(\frac{3}{2}\right) + \psi_3\left(\frac{3}{2}\right) \right\}$$

⋮

{ } 内の整数列は

$$1, 4, 1, 24, 12, 1, 192, 144, 24, 1, \dots$$

これを「オンライン正数列大辞典」で検索すると **A079621** が見つかり、これは次式で与えられる。

$$T(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k}$$

これを用いれば μ_n $n=1, 2, 3, \dots$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mu_n &= -\frac{n}{2} \log \pi + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n (n-1)!} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k} \psi_{k-1}\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{n}{2} \log \pi + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} \frac{n}{k!} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k} \psi_{k-1}\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

i.e.

$$\mu_n = -\frac{n}{2} \log \pi + \sum_{k=1}^n \frac{n}{2^k k!} \binom{n-1}{k-1} \psi_{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Q.E.D.

Mathematica を用いてこの公式を実行すれば次のようになる。

$$\mu_n := -\frac{n}{2} \text{Log}[\pi] + \sum_{k=1}^n \frac{n}{2^k k!} \text{Binomial}[n-1, k-1] \psi_{k-1}\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\mu_1 = -\frac{\text{Log}[\pi]}{2} + \frac{1}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\mu_2 = -\text{Log}[\pi] + \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\mu_3 = -\frac{3 \text{Log}[\pi]}{2} + \frac{3}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{3}{4} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right]$$

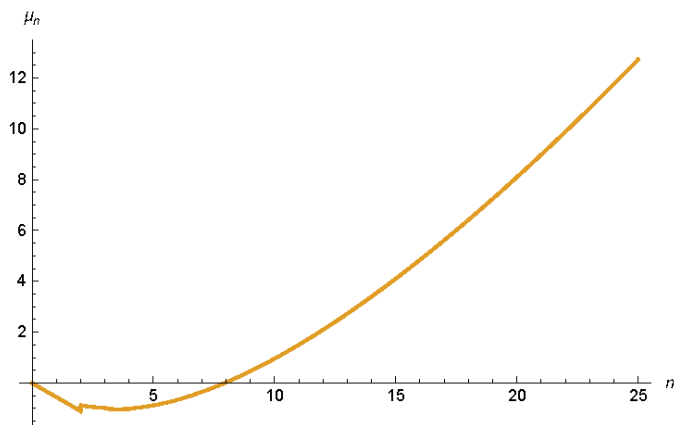
$$\mu_4 = -2 \text{Log}[\pi] + 2 \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{3}{2} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{4} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{96} \psi_3\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\mu_5 = -\frac{5 \text{Log}[\pi]}{2} + \frac{5}{2} \psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{2} \psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{8} \psi_2\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{5}{96} \psi_3\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{768} \psi_4\left[\frac{3}{2}\right]$$

そして、 $\psi_n(3/2)$ に数値を与えてこれらを図示すると次のとおり。

$$\psi_n\left[\frac{3}{2}\right] := \text{PolyGamma}\left[n, \frac{3}{2}\right]$$

`Plot[ $\mu_n$ , {n, 0, 25}, AxesLabel → {n, " $\mu_n$ "}, PlotStyle → ColorData[97, 2]]`



μ_n は $n < 8$ では負であるが、 $n \geq 8$ では正となっている。

定式化が困難な多項式 v_n

λ_n のうち、 γ_n から成る多項式を v_n $n=1, 2, 3, \dots$ と表記すれば、

$$v_1 = \gamma_0$$

$$v_2 = 2\gamma_0 - \gamma_0^2 - 2\gamma_1$$

$$v_3 = 3\gamma_0 - 3\gamma_0^2 + \gamma_0^3 - 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2$$

$$v_4 = 4\gamma_0 - 6\gamma_0^2 + 4\gamma_0^3 - \gamma_0^4 - 12\gamma_1 + 12\gamma_0\gamma_1 - 4\gamma_0^2\gamma_1 - 2\gamma_1^2 + 6\gamma_2 - 2\gamma_0\gamma_2 - \frac{2}{3}\gamma_3$$

⋮

結論から言うと、これらの定式化は困難である。前節の λ_n と同様に再帰式を用いる他はない。

補題 14・3・2

李の係数 λ_n $n=1, 2, 3, \dots$ のうち、スチルチェス定数 γ_n から成る多項式 v_n $n=1, 2, 3, \dots$ は次の再帰式で与えられる。

$$v_n = n\gamma_0 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} G_k \quad (n=1 \text{ のとき 右辺の第 2 項は無視。})$$

$$G_1 = \gamma_0$$

$$G_k = \gamma_0^k + 2\gamma_0^{k-2}\gamma_1 + \sum_{s=0}^{k-3} \gamma_0^s \left\{ \sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} \frac{\gamma_{t-1}}{(t-1)!} + (k-s) \frac{\gamma_{k-s-1}}{(k-s-1)!} \right\}$$

($k \leq 2$ のとき 右辺の第 3 項は無視。)

証明

定理 14・2・5' を見ると、 $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ に含まれる γ_n のみからなる項は次のようであった。

$$-\gamma_0/0!, -\gamma_1/1!, -\gamma_2/2!, -\gamma_3/3!, \dots$$

そこで、定理 14・2・5' の A_n 中に $-\gamma_{n-1}/(n-1)!$ のみを入れて再帰計算を行うことにする。すると、

$$v_n = -nA_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} G_k \quad (n=1 \text{ のとき 右辺の第 2 項は無視。})$$

$$G_1 = -A_1$$

$$G_k = (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2}A_2 - \sum_{s=0}^{k-3} (-A_1)^s \left\{ \sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} A_t + (k-s)A_{k-s} \right\}$$

($k \leq 2$ のとき 右辺の第 3 項は無視。)

$$A_r = -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}$$

最後の式を上 3 つの式に代入して与式を得る。 Q.E.D.

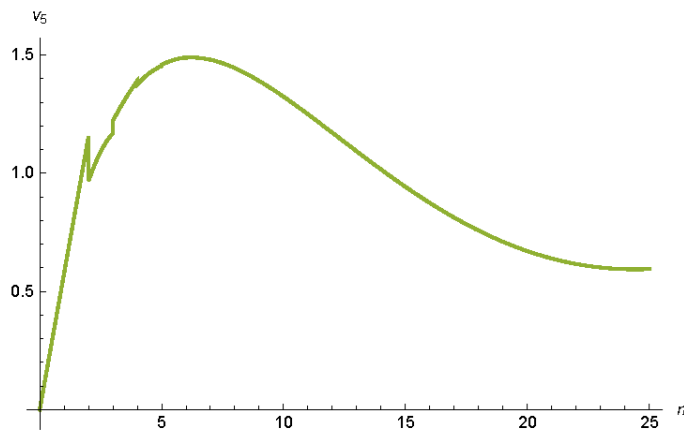
Mathematica を用いてこの補題を実行すれば次のようになる。

$$G_1 := \gamma_0$$

$$G_k := \gamma_0^k + 2\gamma_0^{k-2}\gamma_1 + \sum_{s=0}^{k-3} \gamma_0^s \left(\sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} \frac{\gamma_{t-1}}{(t-1)!} + (k-s) \frac{\gamma_{k-s-1}}{(k-s-1)!} \right)$$

$$\gamma_s := \text{StieltjesGamma}[s]$$

$$\text{Plot}[v_n, \{n, 0, 25\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{n, "v_s"\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{ColorData}[97, 3]]$$



李係数 λ_n

以上を纏めると次のようになる。

定理 14.3.3

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数とし γ_s をスチルチェス定数とすると、李係数 λ_n は次で表される。

$$\lambda_n = \mu_n + v_n$$

$$\mu_n = -\frac{n}{2} \log \pi + \sum_{k=1}^n \frac{n}{2^k k!} \binom{n-1}{k-1} \psi_{k-1} \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$v_n = n\gamma_0 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} G_k \quad (n=1 \text{ のとき 右辺の第 2 項は無視。})$$

但し、

$$G_1 = \gamma_0$$

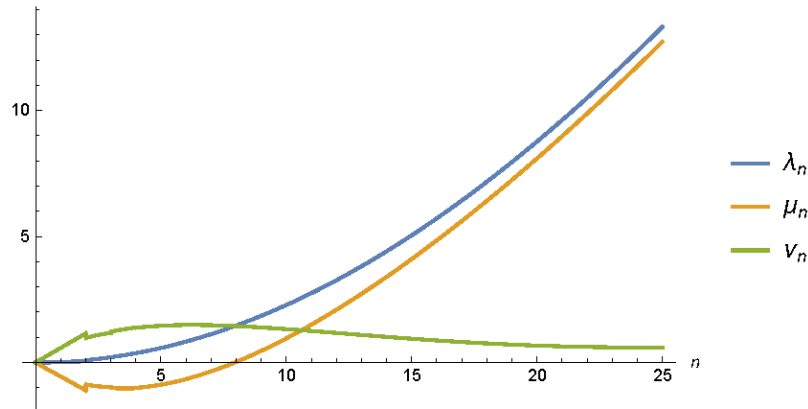
$$G_k = \gamma_0^k + 2\gamma_0^{k-2}\gamma_1 + \sum_{s=0}^{k-3} \gamma_0^s \left\{ \sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} \frac{\gamma_{t-1}}{(t-1)!} + (k-s) \frac{\gamma_{k-s-1}}{(k-s-1)!} \right\}$$

($k \leq 2$ のとき 右辺の第 3 項は無視。)

Mathematica を用いてこれを実行すれば節頭の $\lambda_n \quad n=1,2,3,\dots$ が得られる。
 そして $\psi_n(3/2)$ と γ_n に数値を与えて λ_n, μ_n, ν_n を重ねて図示すると次のようになる。

$$\lambda_n := \mu_n + \nu_n$$

`Plot[{ $\lambda_n, \mu_n, \nu_n$ }, { $n, 0, 25$ }, AxesLabel  $\rightarrow$  Automatic, PlotLegends  $\rightarrow$  "Expressions"]`



`SetPrecision[{ $\lambda_5, \lambda_{10}, \lambda_{15}, \lambda_{20}, \lambda_{25}$ }, 14]`

`{0.57554271446, 2.2793393632, 5.04507937, 8.7692769, 13.32098}`

Note

$n < 11$ では μ_n と ν_n の形状が上下対称的であるのが不思議である。
 μ_n において $\psi_n(3/2)$ を γ_n と $\log 2$ に置換することはできるが、それは次のような γ_n の1次級数になる。

$$\begin{aligned} \mu_n = & -\frac{n}{2} \log \pi + \frac{n}{2} \left(1 - \log 2 - \frac{\gamma_0}{2} \right) + n \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1-2^{-k}}{k-1} \right) \binom{n-1}{k-1} \\ & + n \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} (1-2^{-k}) \binom{n-1}{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\gamma_s}{s!} (k-1)^s \end{aligned}$$

最初の幾つかは

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\log \pi}{2} - \frac{\gamma_0}{4} \\ \mu_2 &= \frac{3}{4} - \frac{2 \log 2}{2} - \frac{2 \log \pi}{2} + \frac{\gamma_0}{4} - \frac{3 \gamma_1}{4} + \frac{3 \gamma_2}{8} - \frac{\gamma_3}{8} + \frac{\gamma_4}{32} - \frac{\gamma_5}{160} + \frac{\gamma_6}{960} \dots \\ \mu_3 &= \frac{21}{16} - \frac{3 \log 2}{2} - \frac{3 \log \pi}{2} + \frac{5 \gamma_0}{8} - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{5 \gamma_2}{8} + \frac{19 \gamma_3}{24} - \frac{47 \gamma_4}{96} + \frac{103 \gamma_5}{480} - \frac{43 \gamma_6}{576} \dots \\ \mu_4 &= \frac{33}{16} - \frac{4 \log 2}{2} - \frac{4 \log \pi}{2} + \frac{15 \gamma_0}{16} - \frac{5 \gamma_1}{16} - \frac{17 \gamma_2}{32} - \frac{29 \gamma_3}{96} + \frac{391 \gamma_4}{384} - \frac{385 \gamma_5}{384} + \frac{7423 \gamma_6}{11520} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

即ち、 μ_n は γ_n の1次級数であり、 ν_n は γ_n の多項式である。そして μ_n と ν_n の形状は上下対称的である。
 上図は益々不思議である。

14・4 コフィーの漸化式

Coffey, M.W. (*Li's Criterion Wolfram MathWorld*) によれば、 γ_s をスチルチェス定数とすると、李の係数 λ_n は次の漸化式によって得られる。

$$\lambda_n = 1 - \frac{1}{2}n(\gamma_0 + \log \pi + 2\log 2) - \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} \eta_{m-1} + \sum_{m=2}^n (-1)^m \binom{n}{m} (1-2^{-m}) \zeta(m)$$

但し

$$\eta_0 = -\gamma_0$$

$$\eta_n = (-1)^{n-1} \left\{ \frac{n+1}{n!} \gamma_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k-1)!} \eta_k \gamma_{n-k-1} \right\}$$

Mathematica を用いてこれを実行すれば次のようになる。

Coffey's recurrence relation (symbolic) λ_n

$$\lambda_{n_} := 1 - \frac{1}{2} n (\gamma_0 + \text{Log}[\pi] + 2 \text{Log}[2]) - \sum_{m=1}^n \text{Binomial}[n, m] \eta_{m-1} + \sum_{m=2}^n (-1)^m \text{Binomial}[n, m] (1 - 2^{-m}) \zeta[m]$$

Where,

$$\eta_0 := -\gamma_0$$

$$\eta_{n_} := (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n!} \gamma_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k-1)!} \eta_k \gamma_{n-k-1} \right)$$

$$\text{Expand}[\lambda_1] \quad 1 - \text{Log}[2] - \frac{\text{Log}[\pi]}{2} + \frac{\gamma_0}{2}$$

$$\text{Expand}[\lambda_2] \quad 1 - 2 \text{Log}[2] - \text{Log}[\pi] + \gamma_0 - \gamma_0^2 - 2 \gamma_1 + \frac{3 \zeta[2]}{4}$$

$$\text{Expand}[\lambda_3] \quad 1 - 3 \text{Log}[2] - \frac{3 \text{Log}[\pi]}{2} + \frac{3 \gamma_0}{2} - 3 \gamma_0^2 + \gamma_0^3 - 6 \gamma_1 + 3 \gamma_0 \gamma_1 + \frac{3 \gamma_2}{2} + \frac{9 \zeta[2]}{4} - \frac{7 \zeta[3]}{8}$$

$$\text{Expand}[\lambda_4] \quad 1 - 4 \text{Log}[2] - 2 \text{Log}[\pi] + 2 \gamma_0 - 6 \gamma_0^2 + 4 \gamma_0^3 - \gamma_0^4 - 12 \gamma_1 + 12 \gamma_0 \gamma_1 - 4 \gamma_0^2 \gamma_1 - 2 \gamma_1^2 + 6 \gamma_2 - 2 \gamma_0 \gamma_2 - \frac{2 \gamma_3}{3} + \frac{9 \zeta[2]}{2} - \frac{7 \zeta[3]}{2} + \frac{15 \zeta[4]}{16}$$

Coffey's recurrence relation (numeric) λ_n

$$\zeta[n_] := \text{Zeta}[n]$$

$$\gamma_{n_} := \text{StieltjesGamma}[n]$$

$$\text{SetPrecision}[\{\lambda_5, \lambda_{10}, \lambda_{15}, \lambda_{20}, \lambda_{25}\}, 14]$$

$$\{0.57554271446, 2.2793393632, 5.04507937, 8.7692769, 13.32098\}$$

当然であるが、これらの数値は 定理 14・3・3 の数値 と完全に一致している。

定理 14・3・3 との関係

定理 14・3・3 とコフィーの漸化式の λ_n 表示を幾つか対比すると次のようである。

定理 14・3・3

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \gamma_0 \\ \lambda_2 &= -\log \pi + \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + 2\gamma_0 - \gamma_0^2 - 2\gamma_1 \\ \lambda_3 &= -\frac{3}{2} \log \pi + \frac{3}{2} \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{4} \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{16} \psi_2\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\quad + 3\gamma_0 - 3\gamma_0^2 + \gamma_0^3 - 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3}{2} \gamma_2 \\ \lambda_4 &= -2 \log \pi + 2 \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} \psi_2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{96} \psi_3\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\quad + 4\gamma_0 - 6\gamma_0^2 + 4\gamma_0^3 - \gamma_0^4 - 12\gamma_1 + 12\gamma_0\gamma_1 - 4\gamma_0^2\gamma_1 - 2\gamma_1^2 + 6\gamma_2 - 2\gamma_0\gamma_2 - \frac{2}{3} \gamma_3\end{aligned}$$

コフィーの再帰式

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \log 2 - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma_0}{2} \\ \lambda_2 &= 1 - 2 \log 2 - \log \pi + \gamma_0 - \gamma_0^2 - 2\gamma_1 + \frac{3}{4} \zeta(2) \\ \lambda_3 &= 1 - 3 \log 2 - \frac{3 \log \pi}{2} + \frac{3\gamma_0}{2} - 3\gamma_0^2 + \gamma_0^3 - 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3\gamma_2}{2} + \frac{9}{4} \zeta(2) - \frac{7}{8} \zeta(3) \\ \lambda_4 &= 1 - 4 \log 2 - 2 \log \pi + 2\gamma_0 - 6\gamma_0^2 + 4\gamma_0^3 - \gamma_0^4 - 12\gamma_1 + 12\gamma_0\gamma_1 \\ &\quad - 4\gamma_0^2\gamma_1 - 2\gamma_1^2 + 6\gamma_2 - 2\gamma_0\gamma_2 - \frac{2\gamma_3}{3} + \frac{9}{2} \zeta(2) - \frac{7}{2} \zeta(3) - \frac{15}{16} \zeta(4)\end{aligned}$$

定理 14・3・3 における λ_n は $\log \pi$, $\psi_n(3/2)$, γ_n の 3 種類から成っている。

他方、コフィーの漸化式における λ_n は $\log \pi$, $\log 2$, $\zeta(n)$, γ_n の 4 種類から成っている。

これらのうち、 $\log 2$, $\zeta(n)$ は次の 2 つの関係式から出現したものである。

$$\begin{aligned}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) &= 2 - 2 \log 2 - \gamma_0 = 0.036489973 \dots \\ \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right) &= (-1)^n (n-1)! (2^n - 1) \zeta(n) - (-1)^n (n-1)! 2^n \quad n=2, 3, 4, \dots\end{aligned}$$

定理 14・3・3 の ν_n とコフィーの漸化式の η_n も 2 項目以降は同じである。つまり、定理 14・3・3 とコフィーの漸化式とは互換性がある。

いづれにしても、李係数 λ_n が正であることの証明は困難である。 λ_n を構成する多項式の各項の変動が気まぐれな上に偏差が大きすぎるのである。李の基準そのものは素晴らしいが、これに対する正面攻撃は成功の可能性が低いように思われる。

2025.06.19

河野 和
広島市

宇宙人の数学