

15 臨界線上における李の係数

15・1 アダマール積からの李係数

前章「14 李の係数のポリガンマ関数による表現」では、李係数 λ_n をリーマン ξ 関数のマクローリン級数から導出した。本章では李係数 λ_n をリーマン ξ 関数のアダマール積から導出する。そのためには 先ず、李の基準から述べねばならない。

李の基準 ($z=0$)

リーマン仮説は次の不等式と同値である。

$$\lambda_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{n-1} \log \xi(z)] \Big|_{z=0} \geq 0 \quad \text{for } n=1, 2, 3, \dots \quad (1.0)$$

但し、

$$\xi(z) = -z(1-z) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right) \quad (1.\xi)$$

$$\rho_k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \text{ は } \xi(z) \text{ の零点。} \quad (1.\rho)$$

この李係数 λ_n に関して、次の補題が成立する。

補題 15・1・1

λ_n は (1.0) で定義される係数、 ρ_k は (1. ρ) で定義される零点であるとき、次式が成立する。

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^s} \quad (1.1)$$

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho_k} \right)^n \right) \quad (1.1')$$

証明

(1) $(1-z)^{n-1}$ の高階導関数

$$\frac{d^1}{dz^1} (1-z)^{n-1} = -(n-1)(1-z)^{n-2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} (1-z)^{n-1} = (n-2)(n-1)(1-z)^{n-3}$$

$$\frac{d^3}{dz^3} (1-z)^{n-1} = -(n-3)(n-2)(n-1)(1-z)^{n-4}$$

⋮

$$\frac{d^s}{dz^s} (1-z)^{n-1} = (-1)^s \{ (n-s) \cdots (n-2)(n-1) \} (1-z)^{n-1-s}$$

ポツホハマー記号

$$(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$$

を用いると

$$(n-s)_k = (n-s)(n-s+1) \cdots (n-s+k-1)$$

より

$$(n-s)_s = (n-s)(n-s+1) \cdots (n-1) = (n-s) \cdots (n-2)(n-1)$$

よって

$$\frac{d^s}{dz^s} (1-z)^{n-1} = (-1)^s (n-s)_s (1-z)^{n-1-s} \quad (1.d1)$$

(2) $\log \xi(z)$ の高階導関数

(1. ξ) の両辺の対数を取ると

$$\log \xi(z) = \log \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z}{\rho_k} \right)$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{d}{dz} \log \xi(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z}{\rho_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1/\rho_k}{1-z/\rho_k}$$

i.e.

$$\frac{d^1}{dz^1} \log \xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - \rho_k}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(z - \rho_k)^2}$$

$$\frac{d^3}{dz^3} \log \xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(z - \rho_k)^3}$$

⋮

$$\frac{d^s}{dz^s} \log \xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(s-1)!}{(z - \rho_k)^s} \quad (1.d2)$$

(3) $(1-z)^{n-1} \log \xi(z)$ の n 階導関数

ライプニッツ則は

$$\{f(z)g(z)\}^{(n)} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} f^{(s)}(z) g^{(n-s)}(z)$$

これを (1.d1) と (1.d2) に適用すれば、

$$\frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{n-1} \log \xi(z) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \{ (-1)^s (n-s)_s (1-z)^{n-1-s} \} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-s-1} \frac{(n-s-1)!}{(z - \rho_k)^{n-s}}$$

ここで $\log \xi(z)$ の 0 階微分は収束しないから Σ の上限を n から $n-1$ に変更し、ついでに (-1) の冪を整理して

$$\frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{n-1} \log \xi(z) = (-1)^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \{ (n-s)_s (1-z)^{n-1-s} \} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-s-1)!}{(z - \rho_k)^{n-s}}$$

更に

$$(n-s)_s = \frac{\Gamma(n-s+s)}{\Gamma(n-s)} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-s)} = \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}$$

を $\{ \}$ 内に代入すれば

$$\frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{n-1} \log \xi(z) = (-1)^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!} (1-z)^{n-1-s} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-s-1)!}{(z - \rho_k)^{n-s}}$$

i.e.

$$\frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{n-1} \log \xi(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} (1-z)^{n-1-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - \rho_k)^{n-s}}$$

$z=0$ におけるこの微係数は

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{n-1} \log \xi(z) \right|_{z=0} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-\rho_k)^{n-s}}$$

(4) 李係数

よって李係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left. \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{n-1} \log \xi(z)] \right|_{z=0} \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^{n-s} \rho_k^{n-s}} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^{n-s}} \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^s} \quad (1.1)$$

これは更に次のようになる。

$$\lambda_n = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} \left(-\frac{1}{\rho_k} \right)^s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \left(-\frac{1}{\rho_k} \right)^s \right)$$

二項定理により

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho_k} \right)^n \right) \quad (1.1')$$

これは周知の式である。 Q.E.D.

実際、(1.1) に従い、数式処理ソフト *Mathematica* で最初の幾つかを計算すると次のとおり。

$$\begin{aligned} \lambda_{n_} &:= \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \text{Binomial}[n, s] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^s} \\ \lambda_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \\ \text{Expand}[\lambda_2] &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \\ \text{Expand}[\lambda_3] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^3} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \\ \text{Expand}[\lambda_4] &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^4} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^3} - 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \end{aligned}$$

15・2 $x_r \pm iy_r$ の逆数の冪和

共役複素数の逆数の冪和は、その多項式の係数が全て二項係数で表される。本節ではこのことを補題として提示し証明する。

補題 15・2・1

共役複素数 $x_r \pm iy_r$ について次が成立する。

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^1 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^1 = \frac{(2x_r)^1}{x_r^2 + y_r^2} \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^2 = \frac{(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^2} - \frac{2(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^1} \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^3 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^3 = \frac{(2x_r)^3}{(x_r^2 + y_r^2)^3} - \frac{3(2x_r)^1}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^4 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^4 = \frac{(2x_r)^4}{(x_r^2 + y_r^2)^4} - \frac{4(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^3} + \frac{2(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^5 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^5 = \frac{(2x_r)^5}{(x_r^2 + y_r^2)^5} - \frac{5(2x_r)^3}{(x_r^2 + y_r^2)^4} + \frac{5(2x_r)^1}{(x_r^2 + y_r^2)^3} \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^6 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^6 = \frac{(2x_r)^6}{(x_r^2 + y_r^2)^6} - \frac{6(2x_r)^4}{(x_r^2 + y_r^2)^5} + \frac{9(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^4} - \frac{2(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^3} \quad (2.6)$$

⋮

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s = \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left\{ \binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right\} \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2 + y_r^2)^{s-t}} \quad (2.s)$$

証明

1乗和と1乗積

$$\frac{1}{x_r + iy_r} + \frac{1}{x_r - iy_r} = \frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{x_r + iy_r} \frac{1}{x_r - iy_r} = \frac{1}{x_r^2 + y_r^2} \quad (2.1p)$$

2乗和

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} + \frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 = \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^2 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 + 2 \frac{1}{x_r + iy_r} \frac{1}{x_r - iy_r}$$

(2.1) と (2.1p) を両辺に代入すれば

$$\left(\frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^2 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 + 2 \frac{1}{x_r^2 + y_r^2}$$

これより

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^2 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 = \frac{(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^2} - 2 \frac{(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^1} \quad (2.2)$$

3乗和

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x_r + iy_r} + \frac{1}{x_r - iy_r} \right)^3 &= \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^3 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^3 \\ &\quad + 3 \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^2 \frac{1}{x_r - iy_r} + 3 \frac{1}{x_r + iy_r} \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^3 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^3 + 3 \frac{1}{x_r + iy_r} \frac{1}{x_r - iy_r} \left(\frac{1}{x_r + iy_r} + \frac{1}{x_r - iy_r} \right) \end{aligned}$$

(2.1) と (2.1p) を両辺に代入すれば

$$\left(\frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2} \right)^3 = \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^3 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^3 + 3 \frac{1}{x_r^2 + y_r^2} \left(\frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2} \right)$$

これより

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^3 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^3 = \frac{(2x_r)^3}{(x_r^2 + y_r^2)^3} - 3 \frac{(2x_r)^1}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.3)$$

4～6乗和

同様に、

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^4 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^4 = \frac{(2x_r)^4}{(x_r^2 + y_r^2)^4} - 4 \frac{(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^3} + 2 \frac{(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^5 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^5 = \frac{(2x_r)^5}{(x_r^2 + y_r^2)^5} - 5 \frac{(2x_r)^3}{(x_r^2 + y_r^2)^4} + 5 \frac{(2x_r)^1}{(x_r^2 + y_r^2)^3} \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^6 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^6 = \frac{(2x_r)^6}{(x_r^2 + y_r^2)^6} - 6 \frac{(2x_r)^4}{(x_r^2 + y_r^2)^5} + 9 \frac{(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^4} - 2 \frac{(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^3} \quad (2.6)$$

これら右辺の係数の絶対値は

1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 1, 5, 5, 1, 6, 9, 2, ...

この数列を「オンライン整数列大辞典」(OEIS)で検索するとA034807が見つかった。

これらは *Lucas* 多項式の係数であり、次式で与えられる。

$$T(s, t) = C(s - t, t) + C(s - t - 1, t - 1)$$

よって、*s* 乗和は床関数 $\lfloor x \rfloor$ を用いて次のように表される。

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s = \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left\{ \binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right\} \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2 + y_r^2)^{s-t}} \quad (2.s)$$

Q.E.D.

補題 15・2・1 は更に簡単に次のように表すことができる。

補題 15・2・2

共役複素数 $x_r \pm iy_r$ について次が成立する。

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^1 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^1 = \frac{2(x_r^1)}{x_r^2 + y_r^2} \quad (2.1')$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^2 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^2 = \frac{2(x_r^2 - y_r^2)}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.2')$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^3 = \frac{2(x_r^3 - 3x_r^1 y_r^2)}{(x_r^2 + y_r^2)^3} \quad (2.3')$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^4 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^4 = \frac{2(x_r^4 - 6x_r^2 y_r^2 + y_r^4)}{(x_r^2 + y_r^2)^4} \quad (2.4')$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^5 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^5 = \frac{2(x_r^5 - 10x_r^3 y_r^2 + 5x_r^1 y_r^4)}{(x_r^2 + y_r^2)^5} \quad (2.5')$$

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^6 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^6 = \frac{2(x_r^6 - 15x_r^4 y_r^2 + 15x_r^2 y_r^4 - y_r^6)}{(x_r^2 + y_r^2)^6} \quad (2.6')$$

⋮

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^s = \frac{2}{(x_r^2 + y_r^2)^s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t} x_r^{s-2t} y_r^{2t} \quad (2.s')$$

証明

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^1 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^1 = \frac{(2x_r)^1}{x_r^2 + y_r^2} = \frac{2(x_r^1)}{x_r^2 + y_r^2} \quad (2.1')$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^2 = \frac{(2x_r)^2}{(x_r^2 + y_r^2)^2} - \frac{2(2x_r)^0}{(x_r^2 + y_r^2)^1} \quad (2.2)$$

$$= \frac{(2x_r)^2 - 2(x_r^2 + y_r^2)}{(x_r^2 + y_r^2)^2} = \frac{2(x_r^2 - y_r^2)}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.2')$$

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^3 = \frac{(2x_r)^3}{(x_r^2 + y_r^2)^3} - 3 \frac{(2x_r)^1}{(x_r^2 + y_r^2)^2} \quad (2.3)$$

$$= \frac{(2x_r)^3 - 3(2x_r)(x_r^2 + y_r^2)}{(x_r^2 + y_r^2)^3} = \frac{2(x_r^3 - 3x_r^1 y_r^2)}{(x_r^2 + y_r^2)^3} \quad (2.3')$$

同様にして

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^4 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^4 = \frac{2(x_r^4 - 6x_r^2 y_r^2 + y_r^4)}{(x_r^2 + y_r^2)^4} \quad (2.4')$$

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^5 + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^5 = \frac{2(x_r^5 - 10x_r^3 y_r^2 + 5x_r^1 y_r^4)}{(x_r^2 + y_r^2)^5} \quad (2.5')$$

$$\left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^6 + \left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^6 = \frac{2(x_r^6 - 15x_r^4 y_r^2 + 15x_r^2 y_r^4 - y_r^6)}{(x_r^2 + y_r^2)^6} \quad (2.6')$$

これら右辺の()内の係数の絶対値は

1, 1, 1, 1, 3, 1, 6, 1, 1, 10, 5, 1, 15, 15, 1, ...

この数列を「オンライン整数列大辞典」(OEIS)で検索するとA034839が見つかった。

これらは次式で与えられる。

$$T(s, t) = C(s, 2t) \quad s \geq 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$$

よって、 s 乗和は床関数 $\lfloor x \rfloor$ を用いて次のように表される。

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s = \frac{2}{(x_r^2 + y_r^2)^s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t} x_r^{s-2t} y_r^{2t} \quad (2.s')$$

Q.E.D.

15・3 李係数の $x_r \pm iy_r$ による表示

補題 15・1・1 と 補題 15・2・1 または 15・2・2 を組み合わせれば、李係数を共役複素数で表示することが出来る。

補題 15・3・1

(1.ξ) で定義された関数 $\xi(z)$ の零点を $x_r \pm iy_r$ $r=1, 2, 3, \dots$ とするとき、
李係数 λ_n $n=1, 2, 3, \dots$ は次式で表される、

$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left\{ \binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right\} \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2 + y_r^2)^{s-t}} \right) \quad (3.1)$$

証明

補題 15・1・1 において

$$\rho_1 = x_1 - iy_1, \rho_2 = x_1 + iy_1, \rho_3 = x_2 - iy_2, \rho_4 = x_2 + iy_2, \rho_5 = x_3 - iy_3, \rho_6 = x_3 + iy_3, \dots$$

と置換すれば、(1.1) は

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^s} \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s \right) \end{aligned}$$

他方、補題 15・2・1 は

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s = \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left\{ \binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right\} \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2 + y_r^2)^{s-t}} \quad (2.s)$$

これを上に代入すれば

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left\{ \binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right\} \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2 + y_r^2)^{s-t}} \right)$$

i.e.

$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left\{ \binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right\} \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2 + y_r^2)^{s-t}} \right) \quad (3.1)$$

Q.E.D.

(3.1) の最初の幾つかを展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{2x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{2x_3}{x_3^2 + y_3^2} + \dots \\ \lambda_2 &= -\frac{(2x_1)^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{2(2x_1)^0}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{2(2x_1)^1}{x_1^2 + y_1^2} \\ &\quad - \frac{(2x_2)^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} + \frac{2(2x_2)^0}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{2(2x_2)^1}{x_2^2 + y_2^2} \\ &\quad - \frac{(2x_3)^2}{(x_3^2 + y_3^2)^2} + \frac{2(2x_3)^0}{x_3^2 + y_3^2} + \frac{2(2x_3)^1}{x_3^2 + y_3^2} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = & \frac{(2x_1)^3}{(x_1^2+y_1^2)^3} - \frac{3(2x_1)^1}{(x_1^2+y_1^2)^2} - \frac{3(2x_1)^2}{(x_1^2+y_1^2)^2} + \frac{6(2x_1)^0}{x_1^2+y_1^2} + \frac{3(2x_1)^1}{x_1^2+y_1^2} \\
& + \frac{(2x_2)^3}{(x_2^2+y_2^2)^3} - \frac{3(2x_2)^1}{(x_2^2+y_2^2)^2} - \frac{3(2x_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^2} + \frac{6(2x_2)^0}{x_2^2+y_2^2} + \frac{3(2x_2)^1}{x_2^2+y_2^2} \\
& + \frac{(2x_3)^3}{(x_3^2+y_3^2)^3} - \frac{3(2x_3)^1}{(x_3^2+y_3^2)^2} - \frac{3(2x_3)^2}{(x_3^2+y_3^2)^2} + \frac{6(2x_3)^0}{x_3^2+y_3^2} + \frac{3(2x_3)^1}{x_3^2+y_3^2} \\
& \vdots \\
\lambda_4 = & -\frac{(2x_1)^4}{(x_1^2+y_1^2)^4} + \frac{4(2x_1)^2}{(x_1^2+y_1^2)^3} + \frac{4(2x_1)^3}{(x_1^2+y_1^2)^3} - \frac{2(2x_1)^0}{(x_1^2+y_1^2)^2} - \frac{12(2x_1)^1}{(x_1^2+y_1^2)^2} - \frac{6(2x_1)^2}{(x_1^2+y_1^2)^2} \\
& + \frac{12(2x_1)^0}{x_1^2+y_1^2} + \frac{4(2x_1)^1}{x_1^2+y_1^2} \\
& - \frac{(2x_2)^4}{(x_2^2+y_2^2)^4} + \frac{4(2x_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^3} + \frac{4(2x_2)^3}{(x_2^2+y_2^2)^3} - \frac{2(2x_2)^0}{(x_2^2+y_2^2)^2} - \frac{12(2x_2)^1}{(x_2^2+y_2^2)^2} - \frac{6(2x_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^2} \\
& + \frac{12(2x_2)^0}{x_2^2+y_2^2} + \frac{4(2x_2)^1}{x_2^2+y_2^2} \\
& - \frac{(2x_3)^4}{(x_3^2+y_3^2)^4} + \frac{4(2x_3)^2}{(x_3^2+y_3^2)^3} + \frac{4(2x_3)^3}{(x_3^2+y_3^2)^3} - \frac{2(2x_3)^0}{(x_3^2+y_3^2)^2} - \frac{12(2x_3)^1}{(x_3^2+y_3^2)^2} - \frac{6(2x_3)^2}{(x_3^2+y_3^2)^2} \\
& + \frac{12(2x_3)^0}{x_3^2+y_3^2} + \frac{4(2x_3)^1}{x_3^2+y_3^2} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

補題 15・2・2 を用いれば、これらはもっと簡約できる。

定理 15・3・2

(1.ξ) で定義された関数 $\xi(z)$ の零点を $x_r \pm iy_r$ $r=1, 2, 3, \dots$ とするとき、
李係数 λ_n $n=1, 2, 3, \dots$ は次式で表される、

$$\lambda_n = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n \binom{n}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{(x_r^2+y_r^2)^s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t} x_r^{s-2t} y_r^{2t} \right) \quad (3.2)$$

証明

補題 15・1・1 において

$\rho_1 = x_1 - iy_1$, $\rho_2 = x_1 + iy_1$, $\rho_3 = x_2 - iy_2$, $\rho_4 = x_2 + iy_2$, $\rho_5 = x_3 - iy_3$, $\rho_6 = x_3 + iy_3$, ...
と置換すれば、(1.1) は

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s \right)$$

他方、補題 15・2・2 は

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r} \right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r} \right)^s = \frac{2}{(x_r^2+y_r^2)^s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t} x_r^{s-2t} y_r^{2t} \quad (2.s')$$

これを上に代入すれば

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(x_r^2 + y_r^2)^s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t} x_r^{s-2t} y_r^{2t} \right)$$

i.e.

$$\lambda_n = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n \binom{n}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{(x_r^2 + y_r^2)^s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t} x_r^{s-2t} y_r^{2t} \right)$$

Q.E.D.

(3.2) の最初の幾つかを展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{2x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{2x_3}{x_3^2 + y_3^2} + \dots \\ \lambda_2 &= 2 \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{x_1^2 - y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \right) + 2 \left(\frac{2x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_2^2 - y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} \right) + 2 \left(\frac{2x_3}{x_3^2 + y_3^2} - \frac{x_3^2 - y_3^2}{(x_3^2 + y_3^2)^2} \right) + \dots \\ \lambda_3 &= 2 \left(\frac{3x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{3x_1^2 - 3y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{x_1^3 - 3x_1^1 y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^3} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{3x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{3x_2^2 - 3y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} + \frac{x_2^3 - 3x_2^1 y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^3} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{3x_3}{x_3^2 + y_3^2} - \frac{3x_3^2 - 3y_3^2}{(x_3^2 + y_3^2)^2} + \frac{x_3^3 - 3x_3^1 y_3^2}{(x_3^2 + y_3^2)^3} \right) \\ &\quad \vdots \\ \lambda_4 &= 2 \left(\frac{4x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{6x_1^2 - 6y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{4x_1^3 - 12x_1^1 y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^3} - \frac{x_1^4 - 6x_1^2 y_1^2 + y_1^4}{(x_1^2 + y_1^2)^4} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{4x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{6x_2^2 - 6y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} + \frac{4x_2^3 - 12x_2^1 y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^3} - \frac{x_2^4 - 6x_2^2 y_2^2 + y_2^4}{(x_2^2 + y_2^2)^4} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{4x_3}{x_3^2 + y_3^2} - \frac{6x_3^2 - 6y_3^2}{(x_3^2 + y_3^2)^2} + \frac{4x_3^3 - 12x_3^1 y_3^2}{(x_3^2 + y_3^2)^3} - \frac{x_3^4 - 6x_3^2 y_3^2 + y_3^4}{(x_3^2 + y_3^2)^4} \right) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

cf.

これらは補題 15・3・1 よりも簡素であるので、定理とした。なお、この定理は本章中で最も重要である。

15・4 臨界線上の李係数

本節では前節の特殊ケースとして、李係数 λ_n を臨界線上の零点 $1/2 \pm i y_r$ により表示する。

補題 15・4・1

(1. ξ) で定義された関数 $\xi(z)$ の零点を $1/2 \pm i y_r$ $r=1, 2, 3, \dots$ とするとき、
李係数 λ_n $n=1, 2, 3, \dots$ は次式で表される、

$$\lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{(1/4 + y_r^2)^{n-t}} \quad (4.1)$$

証明

補題 15・3・1 の展開例において $x_r = 1/2$ $r=1, 2, 3, \dots$ と置けば $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{1/4 + y_1^2} + \frac{1}{1/4 + y_2^2} + \frac{1}{1/4 + y_3^2} + \dots \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{(1/4 + y_1^2)^2} + \frac{4}{1/4 + y_1^2} \\ &\quad - \frac{1}{(1/4 + y_2^2)^2} + \frac{4}{1/4 + y_2^2} \\ &\quad - \frac{1}{(1/4 + y_3^2)^2} + \frac{4}{1/4 + y_3^2} \\ &\quad \vdots \\ \lambda_3 &= \frac{1}{(1/4 + y_1^2)^3} - \frac{6}{(1/4 + y_1^2)^2} + \frac{9}{1/4 + y_1^2} \\ &\quad + \frac{1}{(1/4 + y_2^2)^3} - \frac{6}{(1/4 + y_2^2)^2} + \frac{9}{1/4 + y_2^2} \\ &\quad + \frac{1}{(1/4 + y_3^2)^3} - \frac{6}{(1/4 + y_3^2)^2} + \frac{9}{1/4 + y_3^2} \\ &\quad \vdots \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{(1/4 + y_1^2)^4} + \frac{8}{(1/4 + y_1^2)^3} - \frac{20}{(1/4 + y_1^2)^2} + \frac{16}{1/4 + y_1^2} \\ &\quad - \frac{1}{(1/4 + y_2^2)^4} + \frac{8}{(1/4 + y_2^2)^3} - \frac{20}{(1/4 + y_2^2)^2} + \frac{16}{1/4 + y_2^2} \\ &\quad - \frac{1}{(1/4 + y_3^2)^4} + \frac{8}{(1/4 + y_3^2)^3} - \frac{20}{(1/4 + y_3^2)^2} + \frac{16}{1/4 + y_3^2} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

これらの右辺の係数の絶対値は **Lucas** 多項式の係数 A061896 の一部(赤字)である。

1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 1, 5, 5, 1, 6, 9, 2, 1, 4, 7, 14, 7, 1, 8, 20, 16, 2,

この赤字の数値は次式によって得られる。

$$T(2n, t) = C(2n - t, t) + C(2n - t - 1, t - 1) \quad t=0, 1, \dots, n-1$$

そこで、 λ_n の第 r 行を $\phi_n(y_r)$ とすれば、

$$\begin{aligned}
\phi_2(y_r) &= -\frac{1}{(1/4+y_r^2)^2} + \frac{4}{1/4+y_r^2} \\
&= (-1)^{2-1} \sum_{t=0}^{2-1} (-1)^t \left(\binom{4-t}{t} + \binom{4-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{(1/4+y_r^2)^{2-t}} \\
\phi_3(y_r) &= \frac{1}{(1/4+y_r^2)^3} - \frac{6}{(1/4+y_r^2)^2} + \frac{9}{1/4+y_r^2} \\
&= (-1)^{3-1} \sum_{t=0}^{3-1} (-1)^t \left(\binom{6-t}{t} + \binom{6-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{(1/4+y_r^2)^{3-t}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

以下、帰納法により、

$$\phi_n(y_r) = (-1)^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{(1/4+y_r^2)^{n-t}} \quad (4.\phi)$$

これより

$$\lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{(1/4+y_r^2)^{n-t}} \quad (4.1)$$

Q.E.D.

cf.

これは前節の一般式

$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^t \left(\binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1} \right) \frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2+y_r^2)^{s-t}} \right) \quad (3.1)$$

よりも著しく簡素になっている。これは $2x_r=1$ $r=1,2,3,\dots$ により多項式の分子が整数となり、分母毎に纏められたためである。

李係数を構成する多項式

そもそも李係数 λ_n はその符号を判定するためにある。そのためには λ_n の各行

$$\phi_n(y_r) = (-1)^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{(1/4+y_r^2)^{n-t}} \quad (4.\phi)$$

の符号を調べることから始めるべきであろう。

ここで任意の実数 y_r に対して $(1/4+y_r^2)^n > 0$ であるから、 $\phi_n(y_r)$ からこれを除いた多項式を

$$g_n(y_r) = (-1)^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) (1/4+y_r^2)^t \quad (4.g)$$

とせよ。すると、 $\phi_n(y_r)$ の代わりに $g_n(y_r)$ の符号を調べればよいことになる。

補題 15・4・2

n を自然数、 y_r を実数、そして $g_n(y_r)$ を次のような多項式とする。

$$g_n(y_r) = (-1)^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) (1/4+y_r^2)^t \quad (4.g)$$

すると $g_n(y_r)$ は n が奇数か偶数かによってそれぞれ次のように変形される。

$$g_{2n-1}(y) = \frac{1}{4^{2n-2}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n-1}{2s} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1,2,3, \dots \quad (4.go)$$

$$g_{2n}(y) = \frac{y^2}{4^{2n-2}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n}{2s+1} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1,2,3, \dots \quad (4.ge)$$

証明

(1) n が奇数のとき、

$g_n(y_r)$ は次のように簡約されて変形される。

$$g_1(y_r) = 1 = \frac{1}{4^0}$$

$$g_3(y_r) = \frac{1}{16} (1 - 12y_r^2)^2 = \frac{1}{4^2} (1 - 12y_r^2)^2$$

$$g_5(y_r) = \frac{1}{256} (1 - 40y_r^2 + 80y_r^4)^2 = \frac{1}{4^4} (1 - 40y_r^2 + 80y_r^4)^2$$

$$g_7(y_r) = \frac{1}{4096} (1 - 84y_r^2 + 560y_r^4 - 448y_r^6)^2 = \frac{1}{4^6} (1 - 84y_r^2 + 560y_r^4 - 448y_r^6)^2$$

⋮

1, 84, 560, 448 を OEIS 中で検索すると A085840 が見つかった。そしてこれらは次式で与えられる。

$$T(n, s) = \frac{4^s (2n+1)!}{(2n-2s+1)! (2s)!} \quad s=0, 1, 2, \dots, n$$

右辺において n を $n-1$ に置換すると

$$T(n, s) = \frac{4^s (2n-1)!}{(2n-2s-1)! (2s)!} \quad s=0, 1, 2, \dots, n-1$$

これを用いれば

$$g_{2n-1}(y_r) = \frac{1}{4^{2n-2}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{4^s (2n-1)!}{(2n-2s-1)! (2s)!} y_r^{2s} \right)^2$$

i.e.

$$g_{2n-1}(y_r) = \frac{1}{4^{2n-2}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n-1}{2s} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1,2,3, \dots \quad (4.go)$$

(2) n が偶数のとき、

$g_n(y)$ は次のように簡約されて変形される。

$$g_2(y_r) = 4y_r^2 = \frac{y^2}{4^0} (2y_r^0)^2$$

$$g_4(y_r) = y_r^2 (1 - 4y_r^2)^2 = \frac{y^2}{4^2} (4 - 16y_r^2)^2$$

$$g_6(y_r) = \frac{y^2}{64} (3 - 40y_r^2 + 48y_r^4)^2 = \frac{y^2}{4^4} (6 - 80y_r^2 + 96y_r^4)^2$$

$$g_8(y_r) = \frac{y^2}{64} (1 - 28y_r^2 + 112y_r^4 - 62y_r^6)^2 = \frac{y^2}{4^6} (8 - 224y_r^2 + 896y_r^4 - 512y_r^6)^2$$

⋮

⋮

8,224,896,512 を OEIS 中で検索すると、この数列を含む整数列 **A229032** が見つかった。
そしてこれらは次式で与えられる。

$$T(n, s) = 4^s \binom{n+1}{2s+1} \quad s=0, 1, 2, \dots, n$$

不要な数列をスキップするため、右辺において n を $2n-1$ に置換すると

$$T(n, s) = 4^s \binom{2n}{2s+1} \quad s=0, 1, 2, \dots, n$$

これを用いれば

$$g_{2n}(y_r) = \frac{y^2}{4^{2n-2}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n}{2s+1} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4.3e)$$

Q.E.D.

Note

つまり、 $g_n(y_r)$ は全て完全平方式に帰着する。これは予想外の驚くべき結果である。

臨界線上の李係数

この補題 15・4・2 を用いれば、臨界線上の李係数は次のように表される。

定理 15・4・3

(1.ξ) で定義された関数 $\xi(z)$ の零点を $1/2 \pm i y_r$ $r=1, 2, 3, \dots$ とするとき、
李係数 λ_n $n=1, 2, 3, \dots$ は次式で表される、

$$\lambda_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-2} (1/4 + y_r^2)^{2n-1}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n-1}{2s} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4.3o)$$

$$\lambda_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{y^2}{4^{2n-2} (1/4 + y_r^2)^{2n}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n}{2s+1} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4.3e)$$

証明

(4.φ) と (4.g) より

$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_n(y_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{g_n(y_r)}{(1/4 + y_r^2)^n}$$

これに 補題 15・4・2 の $g_n(y_r)$ を 奇数・偶数別に代入して 所望の式を得る。 Q.E.D.

計算例

実部が $1/2$ である零点を生成する一般式は知られていないが、数式処理ソフト *Mathematica* はこれを数値的に生成する関数 $y_n = \text{Im}[\text{ZetaZero}[n]]$ を持っている。この非自明零点 100,000 個を使って (4.3o), (4.3e) により $\lambda_1 \sim \lambda_4$ を計算したところ、次のようになった。

$y_{r_} := \text{Im}[\text{ZetaZero}[r]]$

2n-1

$$\lambda_{o_{n_}}[m_] := \sum_{r=1}^m \frac{1}{4^{2n-2} (1/4 + y_{r_}^2)^{2n-1}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \text{Binomial}[2n-1, 2s] y_{r_}^{2s} \right)^2$$

2n

$$\lambda_{e_n}[m_-] := \sum_{r=1}^m \frac{y_r^2}{4^{2n-2} (1/4 + y_r^2)^{2n}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \text{Binomial}[2n, 2s+1] y_r^{2s} \right)^2$$

N[{λ_{o1}[100000], λ_{e1}[100000], λ_{o2}[100000], λ_{e2}[100000] }]

{0.0230736, 0.0922575, 0.20744, 0.368437}

これらの結果は理論値 (OEIS A074760, A104539, A104540, A104541) に近い。

{0.0230957, 0.0923457, 0.20764, 0.368790}

参考までに、筆者のパソコン (Intel Core i7-9750H, 16GB) ではこの計算に14時間を要した。

結 語

λ_{2n} は完全平方式の和である。λ_{2n-1} も次のように平方式の和に変形できる。

$$\lambda_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-2} \left(\left(1/4 + y_r^2 \right)^{(2n-1)/2} \right)^2} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \binom{2n-1}{2s} y_r^{2s} \right)^2 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

それ故、臨界線上の李係数 λ_n n=1, 2, 3, ..., ∞ は無限個の平方和で表されることが出来る。

従って、当然に λ_n ≥ 0 n=1, 2, 3, ..., ∞ である。

更に、()² > 0 for |y_r| > n らしいことを考慮すれば、λ_n > 0 n=1, 2, 3, ..., ∞ である公算が高い。

2025.08.02

河野 和
広島市

宇宙人の数学