

リーマン予想の図的証明

要 旨

- (1) リーマンゼータ関数の零点を求める問題は、関数等式により、2つの実変数を持つ4式から成る連立超越方程式に帰着する。
- (2) 臨界線上では、ある2式は恒等的に0になり、残りの2式が連立解を持つ。
- (3) 臨界線外では、ある2式は臨界領域内で連立解を持たない。このことは等高線の上下からの遷移図で説明できる。このような遷移は変数の虚部が大きいところではより顕著になる。
- (4) (3)の結果、(1)の連立超越方程式は臨界線を除く臨界領域内で解を持たない。かくしてリーマン予想は成立する。

1 序 論

リーマゼータ関数

リーマゼータ関数 $\zeta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z \log r} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots \quad \text{Re}(z) > 1 \quad (1.\zeta)$$

この関数は $\text{Re}(z) < 1$ に解析接続され、自明な零点 $z = -2n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) と **非自明な零点** $z = 1/2 \pm b_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を持つ。そして、非自明な零点はこれ以外には存在しないであろうと言うのがリーマン仮説である。なお、非自明な零点は **臨界領域 $0 < \text{Re}(z) < 1$** 内にもみ存在することが知られている。また、その中心線 **$\text{Re}(z) = 1/2$** は **臨界線** と呼ばれている。

ディリクレイータ関数

ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z \log r} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (1.\eta)$$

この関数は $\text{Re}(z) \leq 0$ に解析接続され、 $\zeta(z)$ と次の関係がある。

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \eta(z) \quad z \neq 1$$

それ故、 $\zeta(z)$ と $\eta(z)$ は自明な零点と非自明な零点を共有する。加えて $\eta(z)$ には **$\eta(z)$ 固有の零点 $z = 1 \pm 2n\pi / \log 2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)** が存在する。これらは $1-2^{1-z} = 0$ の零点である。

使用するディリクレ級数

(1. ζ) や (1. η) の右辺はディリクレ級数と呼ばれている。 $\zeta(z)$ の定義式 (1. ζ) は臨界領域内の解析には不適である。それはオイラー変換などを施しても漸近展開にしかならないからである。これに対して $\eta(z)$ の定義式 (1. η) はそのまま臨界領域内で使用できる。よって本稿では、(1. η) を用いてリーマゼータ関数 $\zeta(z)$ の零点を解析する。

2 $\eta(z)$ の零点と連立方程式

本章では、ディリクレータ関数 $\eta(z)$ の零点を求める問題を連立方程式の観点から考察する。

補題 2・1

実数の集合を R とし、ディリクレータ関数を $\eta(z)$ ($z = x + iy$, $x, y \in R$) とするとき、 $0 < x < 1$ において $\eta(z) = 0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z \log r} = 0 \\ \eta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1-z) \log r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1_+)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z \log r} = 0 \\ \eta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1-z) \log r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1_-)$$

証明

ディリクレータ関数 $\eta(z)$ については次の関数等式が成立する。

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-\frac{z}{2}} (1-2^z) \eta(z) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{-\frac{1-z}{2}} (1-2^{1-z}) \eta(1-z) \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

ここで、ガンマ関数及び π のべき関数は零点を持たず、 $1-2^z$, $1-2^{1-z}$ は $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ では零点を持たない。従って $\eta(z)$ の零点においては、

$$\eta(z) = \eta(1-z) = 0 \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

$\eta(z)$, $\eta(1-z)$ をそれぞれディリクレ級数で表示して与式を得る。

Note 1

この補題においては1個の複素変数に対し2個の方程式があるから、この連立方程式は過剰決定系である。このような連立方程式は一般的には解を持たない。この過剰決定系を強いているのは明らかに関数等式である。

Note 2

(1) $x=1/2$ のとき、この過剰決定の特性は消失する。何故ならば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(1/2 + iy) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1/2 + iy) \log r} = 0 \\ \eta(1/2 - iy) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1/2 - iy) \log r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1_+)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(1/2 + iy) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1/2 + iy) \log r} = 0 \\ \eta(1/2 - iy) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1/2 - iy) \log r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1_-)$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(1/2 + iy) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cos(y \log r) - i \sin(y \log r) \} = 0 \\ \eta(1/2 - iy) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cos(y \log r) + i \sin(y \log r) \} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1_+)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(1/2 + iy) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cos(y \log r) - i \sin(y \log r) \} = 0 \\ \eta(1/2 - iy) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cos(y \log r) + i \sin(y \log r) \} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1_-)$$

零点 $(1/2, y)$ においては

$$-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sin(y \log r) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sin(y \log r) = 0$$

であるから、(2.1+) と (2.1-) は実質的に同一の式になる。

(2) $x \neq 1/2$ のとき、この連立方程式は過剰決定系である。

(2.1+) と (2.1-) は異なる式であるのに、1つの複素数解を共有しなければならない。そのようなことはないであろうと言うのがリーマン予想である。

補題 2・1 において z を $1/2+z$ に置換すればこれと同値な次の補題を得る。

補題 2・1'

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ ($z = x+iy$, $x, y \in R$) とするとき、
 $-1/2 < x < 1/2$ において $\eta(1/2+z) = 0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{-z \log r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1'_{+})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{z \log r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1'_{-})$$

Note

(1) 過剰決定性は 補題 2・1 と同じである。

(2) 既知の非自明零点は新しい臨界線 $Re(z) = 0$ 上に平行移動される。

(3) $x=0$ のとき、この過剰決定の特性は消失する。

(4) $x \neq 0$ のとき、零点が存在するとすれば、その1組は次の4個からなる。

$$a \pm ib, \quad -a \pm ib \quad (-1/2 < a < 1/2)$$

双曲線関数項級数

補題 2・1' は次と同値である。

補題 2・2

実数の集合を R とし、ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z = x+iy$, $x, y \in R$) とするとき、
 $-1/2 < x < 1/2$ において $\eta(1/2+z) = 0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_c(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(z \log r) = 0 \end{array} \right. \quad (2.2c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_s(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(z \log r) = 0 \end{array} \right. \quad (2.2s)$$

証明

(2.1'-), (2.1'+) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) + \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) \right\} &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \frac{e^{z \log r} + e^{-z \log r}}{2} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(z \log r) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - z \right) - \eta \left(\frac{1}{2} + z \right) \right\} &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \frac{e^{z \log r} - e^{-z \log r}}{2} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh \{z \log r\} = 0 \end{aligned}$$

これらをそれぞれ $\eta_c(z)$, $\eta_s(z)$ と記述して与式を得る。
逆にこれらを加減すれば (2.1'-), (2.1'+) が得られる。

Note

$\eta_c(z)$, $\eta_s(z)$ はディリクレ級数同士の和及び差である。それ故、その収束域は $-1/2 < x < 1/2$ となる。

双曲線関数項級数 (実部虚部別)

定理 2・3

実数の集合を R とし、ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z = x + iy$, $x, y \in R$) とするとき、
 $-1/2 < x < 1/2$ において $\eta(1/2 + z) = 0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式が
この定義域上で解を持つことである。

$$\left\{ \begin{aligned} u_c(x, y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x \log r) \cos(y \log r) = 0 \\ v_c(x, y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) = 0 \\ u_s(x, y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) = 0 \\ v_s(x, y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x \log r) \sin(y \log r) = 0 \end{aligned} \right.$$

証明

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

であるから、 x を $x \log r$ に y を $y \log r$ にそれぞれ置換すると

$$\cosh(z \log r) = \cosh(x \log r) \cos(y \log r) + i \sinh(x \log r) \sin(y \log r)$$

$$\sinh(z \log r) = \sinh(x \log r) \cos(y \log r) + i \cosh(x \log r) \sin(y \log r)$$

これらを補題 2・2の (2.2c), (2.2s) にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} \eta_c(z) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(z \log r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cosh(x \log r) \cos(y \log r) + i \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_s(z) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(z \log r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \sinh(x \log r) \cos(y \log r) + i \cosh(x \log r) \sin(y \log r) \}\end{aligned}$$

実部と虚部をそれぞれ $u_c(x,y)$, $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$, $v_s(x,y)$ と記述して与式を得る。

過剰決定系

定理 2・3 においては2個の実変数に対して4個の式があるから、この連立方程式は過剰決定系である。このような連立方程式は一般的には解を持たない。

臨界線上の零点

しかしながら、この連立方程式が例外的に解を持つ場合がある。それは $x=0$ の場合である。 $x=0$ は関数 $\eta(1/2+z)$ の臨界線である。定理2・3の各式に $x=0$ を代入すれば

$$\left\{ \begin{aligned} u_c(0,y) &= 1 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cos(y \log r) = 0 \\ v_c(0,y) &= 0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sin(y \log r) = 0 \\ u_s(0,y) &= 0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cos(y \log r) = 0 \\ v_s(0,y) &= 1 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sin(y \log r) = 0 \end{aligned} \right.$$

$v_c(0,y)$, $u_s(0,y)$ は存在しないことに等しいから、過剰決定性は消失する。その結果、

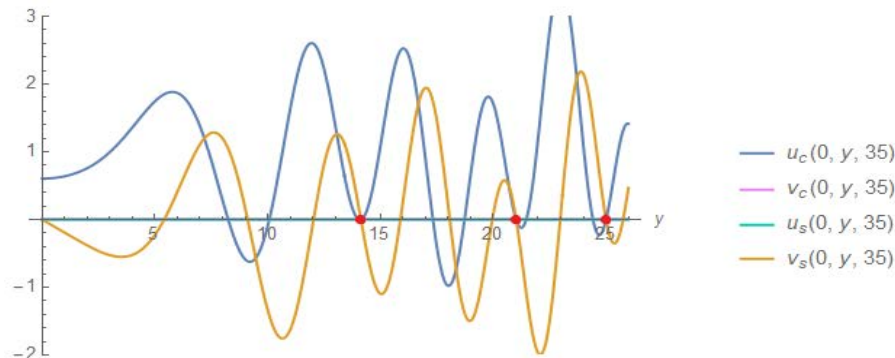
$$\begin{aligned} 0 &= u_c(0,y) - i v_s(0,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cos(y \log r) - i \sin(y \log r) \} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \{ \cos(y \log r) + i \sin(y \log r) \} \end{aligned}$$

i.e.

$$0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{-y \log r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{y \log r}$$

即ち 補題 2・1' における $x=0$ の場合に帰着する。これらの解は臨界線上の零点である。

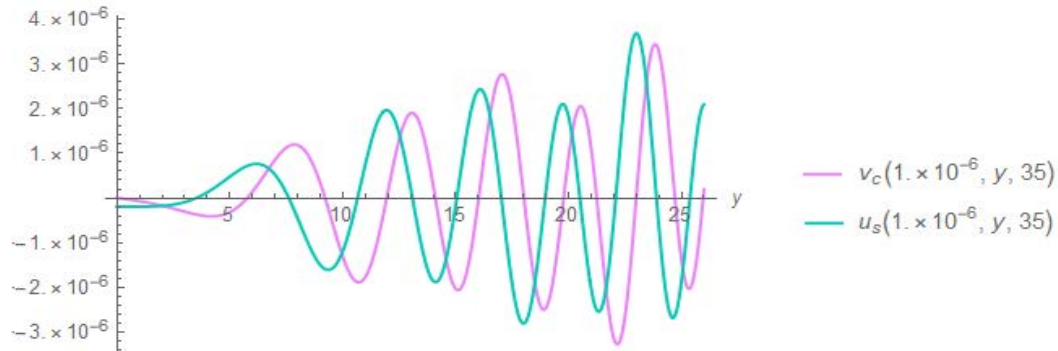
$x=0$ のとき、 $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。青は u_c 、橙は v_s で、これらが y 軸上で交わる



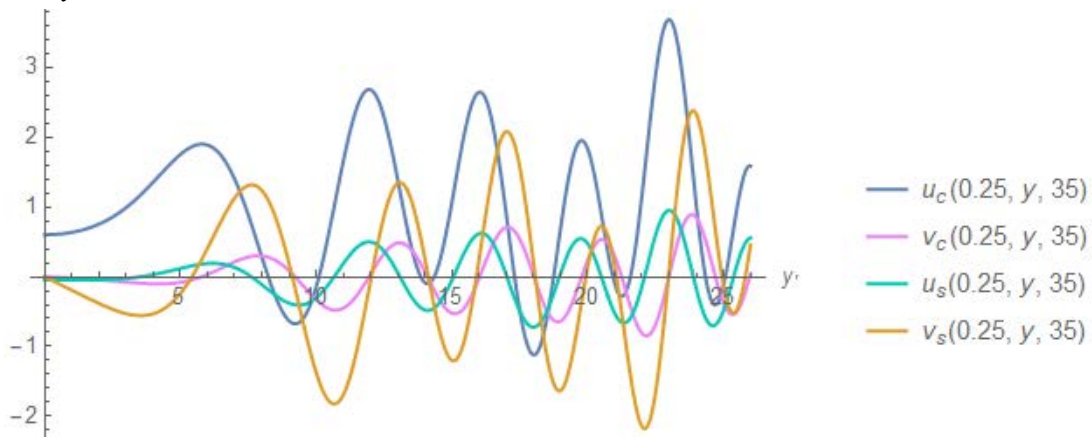
点(赤点)が $\eta(1/2 \pm z)$ の零点である。シアンは v_c 、マゼンタは u_s であるが、これらは y 軸に重なっている。勿論この2直線も赤点を通っている。

臨界線外

x がほんの僅かでも 0 から外れれば v_c, u_s は直線ではなくなる。例えば $x = 0.000001$ のとき



この結果、過剰決定性は回復する。例えば $x = 0.25$ のとき $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。4曲線が y 軸上の1点で交わることなどありそうには見えない。



リーマン仮説と同値な命題

定理 2・3 は次の6つのペアが共通解を持つことと同値である。各ペアは $\eta(1/2+z)$ が零点を持つための必要条件の1つである。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c = 0 \\ v_c = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} u_c = 0 \\ u_s = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} u_c = 0 \\ v_s = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} v_c = 0 \\ u_s = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} v_c = 0 \\ v_s = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} u_s = 0 \\ v_s = 0 \end{array} \right\}$$

従って、リーマン仮説を証明するには、これらの何れか1ペアが $x \neq 0$ なる解を持たないことを示せば良い。

これらの中でも特に興味深いのは $v_c = 0$ と $u_s = 0$ のペアである。このペアは上の2D図で見たように $x \neq 0$ では y 軸上の1点で交わりそうにない。そこでリーマン仮説と同値な次の命題が提示できる。

命題 2・4

y は実数、 x は $-1/2 < x < 1/2$ なる実数とするとき、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) = 0 \\ u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.4c) \\ (2.4s) \end{array}$$

この命題が証明されれば、定理 2・3 により、 $\eta(1/2+z)$ は $x \neq 0$ なる零点を持たないことになる。

オイラー変換と η 関数による表示

定理 2・3 の級数は収束が遅いので y が小さいところでは正確な計算や描画が困難である。これに対処するため、本稿では級数にオイラー変換を施す。この変換により、級数は収束が加速され、総和法までも適用される。具体的には次のとおり。

$$\begin{aligned} u_c(x, y, m) &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x \log r) \cos(y \log r) \\ v_c(x, y, m) &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \\ u_s(x, y, m) &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) \\ v_s(x, y, m) &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x \log r) \sin(y \log r) \end{aligned}$$

また、 $v_c(x, y)$, $u_s(x, y)$ についてはこれらをディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ で表示し、数式処理ソフト *Mathematica* の $\eta(z)$ 計算ルーチンを利用する。これらは次式で表される。

$$v_c(x, y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - x - i y \right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} + x + i y \right) \right\} \right] \quad (2.4c')$$

$$u_s(x, y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - x - i y \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} + x + i y \right) \right\} \right] \quad (2.4s')$$

3 $v_c(x, y)$ の y に関する振幅

命題 2・4 の連立方程式のうち、 $v_c(x, y)$ は次のようであった。

$$v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \quad (2.4c)$$

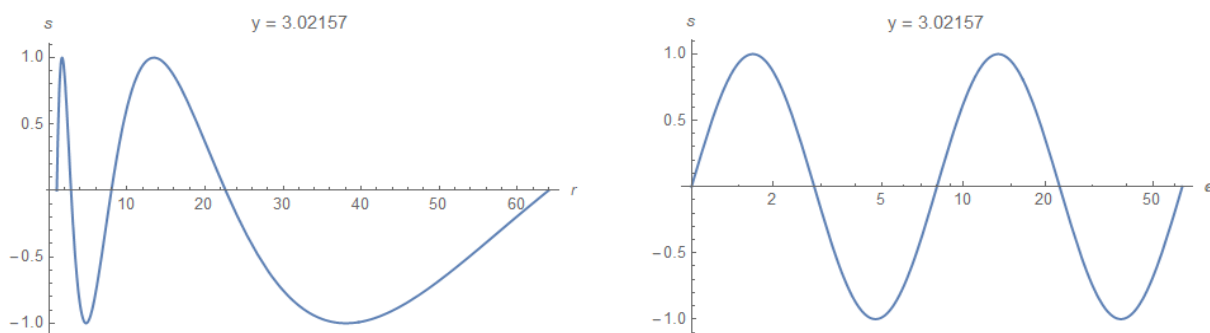
本章では、この関数の y に関する振幅を考察する。

3・1 $\sin(y \log r)$

r, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $s(r, y)$ を考える。

$$s(r, y) = \sin(y \log r) \quad (3.1.1)$$

$y = 3.02157$ のとき、 $r=1 \sim 64$ についてこれの2D図を描くと次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。



これらを観察すると、 $s(r, y)$ は r に関して可変周期関数であることが分かる。但し、右図は 一見固定周期関数のように見える。

振幅 (A)

この関数の振幅は $A = 1$ である。

周期 (P)

この関数は周期関数である。最初の周期は 0π から始って 2π で終わり、次の周期は 2π から始って 4π で終わるから、

$$y \log r_0 = 0\pi, \quad y \log r_1 = 2\pi, \quad y \log r_2 = 4\pi, \quad \dots, \quad y \log r_n = 2n\pi, \quad \dots$$

より

$$r_0 = e^{0\pi/y}, \quad r_1 = e^{2\pi/y}, \quad r_2 = e^{4\pi/y}, \quad \dots, \quad r_n = e^{2n\pi/y}, \quad \dots$$

従って関数 $s(r, y)$ は単位区間

$$[e^{0\pi/y}, e^{2\pi/y}), [e^{2\pi/y}, e^{4\pi/y}), \dots, [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y}), \dots$$

で区切られ、これらの中に山と谷がそれぞれ1個ずつ存在する。これらを第1周期、第2周期、…、第 n 周期と呼ぶことにする。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期と第2周期はそれぞれ

$$P(1, 3.02157) = [1, 8), \quad P(2, 3.02157) = [8, 64)$$

波長 (λ)

波長はこれらの周期の長さ

$$e^{0\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1), e^{2\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1), \dots, e^{(2n-2)\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1), \dots$$

で、周期毎に前周期の $e^{2\pi/y}$ 倍になる。つまり、この関数は**可変周期関数**である。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の波長はそれぞれ

$$\lambda(1, 3.02157) = 7, \quad \lambda(2, 3.02157) = 56$$

$n = 1$ のとき、 λ から y を逆算できる。即ち、

$$y = \frac{2\pi}{\log(\lambda+1)}$$

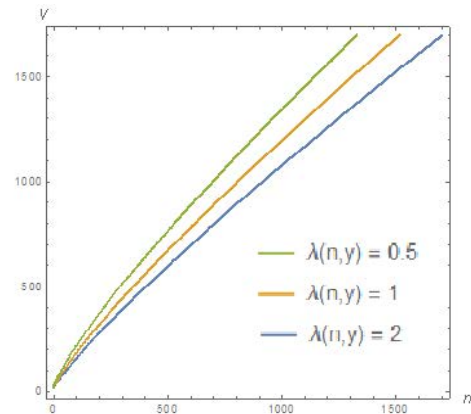
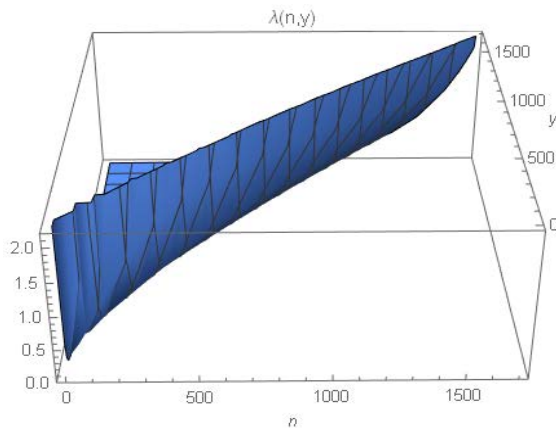
これより、

$$\lambda(1, y) = 7 \text{ のとき} \quad y = \frac{2\pi}{\log 8} = 3.02157$$

$$\lambda(1, y) = 1 \text{ のとき} \quad y = \frac{2\pi}{\log 2} = 9.06472$$

$$\lambda(1, y) = 0.559743 \text{ のとき} \quad y = \frac{2\pi}{\log 1.559743} = 14.1347$$

$n \neq 1$ のとき、 $\lambda(n, y)$ の3D図は左のとおり。また、 $\lambda=0.5$, $\lambda=1.0$, $\lambda=2.0$ の等高線図は右のとおり。



これらの図から、 $\lambda(n, y)$ の等高線の勾配は n の増加に伴い減少することが分かる。何故ならば

$$\frac{\partial}{\partial n} \lambda(n, y) = \frac{2\pi}{y} e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1) > 0 \quad \text{for } n, y > 0$$

この等高線図を用いて、所望の λ を与える n, y のペアを見出すことができる。

山 (Ms)

$s(r, y)$ は正弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の $1/4$ の所に存在する。即ち、

$$Ms(n, y) = e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の山はそれぞれ

$$Ms(1, 3.02157) = 1.68179 \quad , \quad Ms(2, 3.02157) = 13.4544$$

谷 (Vs)

$s(r, y)$ は正弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の $3/4$ の所に存在する。即ち、

$$Vs(n, y) = e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}}$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の谷はそれぞれ

$$Vs(1, 3.02157) = 4.75684 \quad , \quad Vs(2, 3.02157) = 38.0548$$

零点 (Zs)

$s(r, y)$ は正弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の左端 と中央 に存在する。

$$Zs(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}} , e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の零点はそれぞれ

$$Zs(1, 3.02157) = \{1, 2.82843\} \quad , \quad Zs(2, 3.02157) = \{8, 22.6275\}$$

零点近傍 (Xs)

関数 $s(r, y)$ の変数 r を離散変数とすると、零点から ± 0.5 以内の整数 r を **零点近傍** と呼ぶことにする。即ち、

$$Xs(n, y) = \left\{ \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}\right) , \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}}\right) \right\}$$

上図の例では

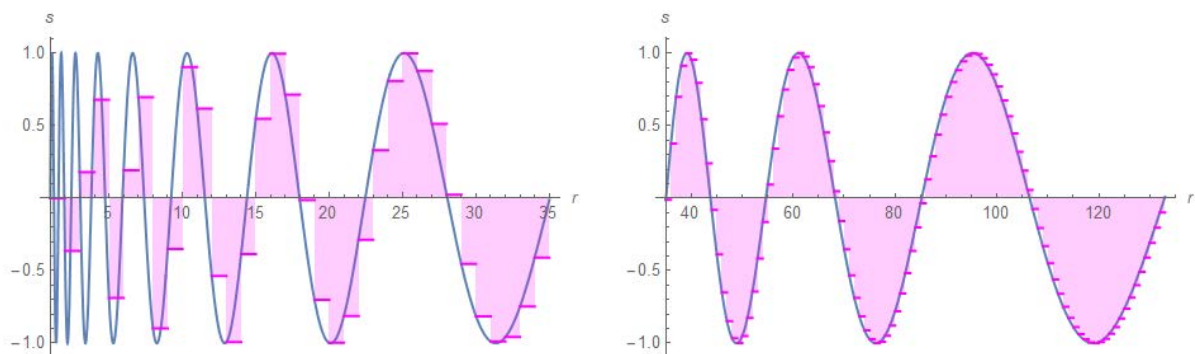
$$Xs(1, 3.02157) = \{1, 3\} \quad , \quad Xs(2, 3.02157) = \{8, 23\}$$

リーマン・ゼータ型正弦級数 ($y=14.1347\dots$ のとき)

次のようなリーマン・ゼータ型正弦級数を考える。

$$v(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(y \log r) \tag{3.1.2}$$

これは $s(r, y)$ (3.1.1) を項とする級数である。例えば、 $y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 34$ および $r=35, 36, \dots, 132$ について $s(r, y)$ の図を並べて示せば



マゼンタの面積の和が (3.1.2) の関数値となる。左図ではこの和は (3.1.1) の積分値とは大きく異なっている。これに対し右図ではこの和は (3.1.1) の積分値に近い。

発散

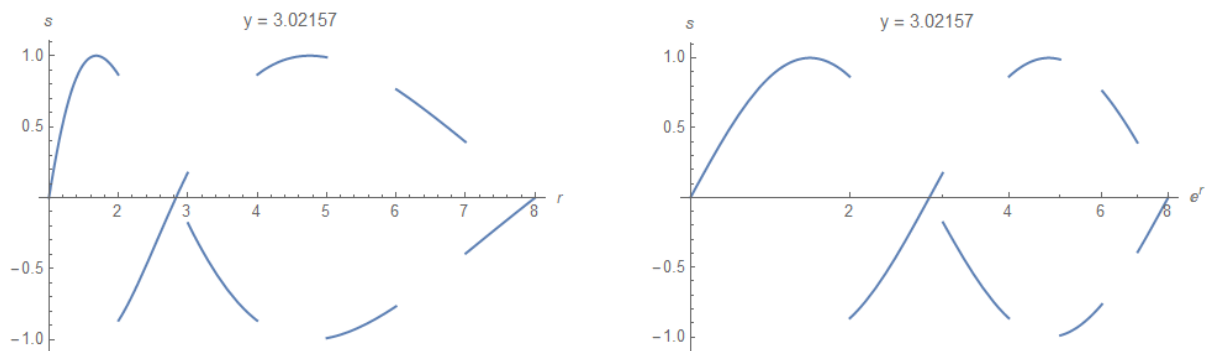
右図において、面積は正負が相殺して0になりそうに思えるがそうはならない。波の間隔がどんどん広がって遂には無限大になるからである。この故に (3.1.2) の級数は発散する。

3・2 ± sin(y log r)

r, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $s(r, y)$ を考える。

$$s(r, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{は床関数。}) \quad (3.2.1)$$

$y = 3.02157$ のとき、 $r=1 \sim 8$ についてこれの2D図を描くと次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。



前節とは異なり、 $s(r, y)$ は r に関して不連続関数である。

振幅 (A)

この関数の振幅は

$$A(r) = |(-1)^{\lfloor r-1 \rfloor}| = 1$$

周期 (P)

この関数の周期は前節と同じである。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

上図の例では、

$$P(1, 3.02157) = [1, 8)$$

波長 (λ)

この関数の波長は前節と同じである。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、

$$\lambda(1, 3.02157) = 7$$

山または谷 (MV_s)

前節と異なり、この関数 $s(r, y)$ は符号が交代する。このため山と谷は前節の関数の最大2倍となる。

$$MV_s(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}, e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

山か谷かは $r = MV_s(n, y)$ における $s(r, y)$ の符号により判別する。

上図の例では

$$MV_s(1, 3.02157) = \{1.68179, 4.75684\}$$

$$\{s(1.68179, 3.02157), s(4.75684, 3.02157)\} = (1, 1)$$

であるから、前者も後者も山である。

零点 (Z_s)

この関数の零点も前節と同じである。即ち、

$$Z_s(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}, e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では

$$Z_s(1, 3.02157) = \{1, 2.82843\}$$

くびれ (X_s)

この関数 $s(r, y)$ は符号が交代するため、零点がくびれて見える。そこで零点から ± 0.5 以内の整数点をくびれと呼ぶことにする。即ち、

$$X_s(n, y) = \left\{ \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}\right), \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}}\right) \right\}$$

上図の例では

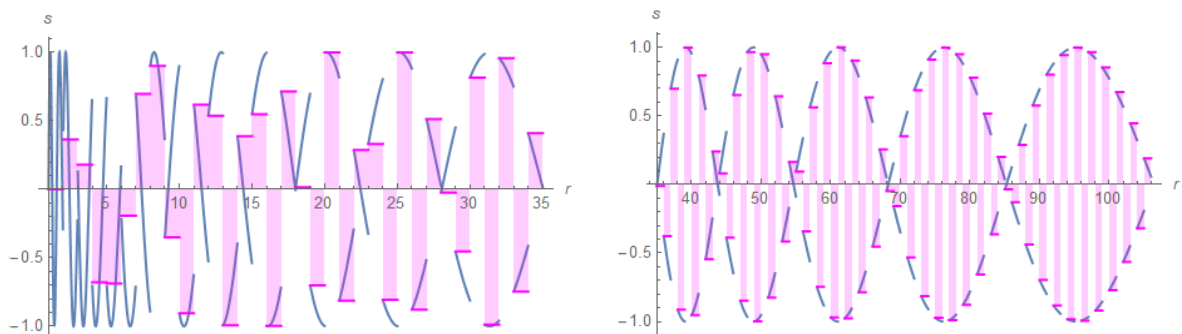
$$X_s(1, 3.02157) = \{1, 3\}$$

ディリクレ・イータ型正弦級数 ($y=14.1347\dots$ のとき)

次のようなディリクレ・イータ型正弦級数を考える。

$$v(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \sin(y \log r) \tag{3.2.2}$$

これは $s(r, y)$ (3.2.1) を項とする級数である。例えば、 $y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 34$ および $r=35, 36, \dots, 105$ について $s(r, y)$ の図を並べて示せば



マゼンタの面積の和が (3.2.2) の関数値となる。左図ではこの和は (3.2.1) の積分値とは大きく

異なっている。これに対し右図ではこの和は (3.2.1) の積分値に近い。

収束?

右図の最後の2つのくびれは第11周期に属する。このくびれ間の面積は相殺して0になりそうに思える。試に $y_1=14.1347\dots$ のときの第11周期、第25周期のくびれ間の面積を計算すると次のようになる。

$$\text{第11周期} \quad X_s(11, y_1) = (85, 106) \quad , \quad \lambda(11, y_1) = 47.7$$

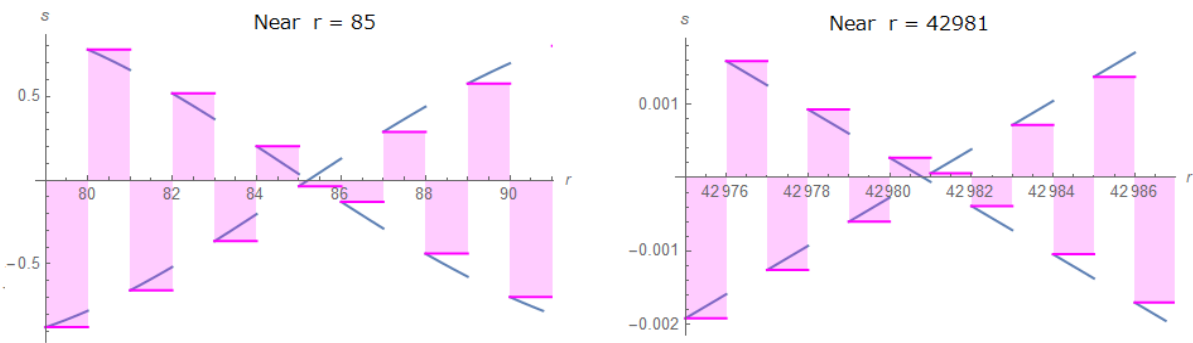
$$v_{11}(y_1) = \sum_{r=85}^{105} (-1)^{r-1} \sin(y_1 \log r) = 0.00208785$$

$$\text{第25周期} \quad X_s(25, y_1) = (42981, 53679) \quad , \quad \lambda(25, y_1) = 24058.2$$

$$v_{25}(y_1) = \sum_{r=42981}^{53678} (-1)^{r-1} \sin(y_1 \log r) = -0.0000684506$$

確かに r が大きくなるほど2つのくびれ間の面積は0に近づいている。

この原因を探るため $r=85$ と $r=42981$ 付近の拡大図を比べてみる。



すると、一見して縦軸のスケールが桁違いであることが判る。何故か? 理由は簡単である。 r が原点から遠ざかるほど波長が長くなるからである。振幅は1であるから、波長が長くなれば可変長正弦曲線の勾配も緩くならざるを得ない。しかしそうであっても、この級数 $v(y)$ は発散級数である。即ち、これは振動するばかりで決して収束しない。それ故、この級数が山や谷で打ち切られれば最大で ± 0.5 の誤差が生じる。即ち、この級数 (3.2.2) は ± 0.5 の範囲で振動する。

総和法

このような場合、 ± 0.5 の誤差は平均して0と見做すべしと言うのが総和法である。

総和法の最も簡単な1つはオイラー変換である。オイラー変換は級数の収束を加速する上に総和法をも適用する。(3.2.2) にオイラー変換を施せば次のようになる。

$$v(y, m) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} (-1)^{r-1} \sin(y \log r) \quad (3.2.2')$$

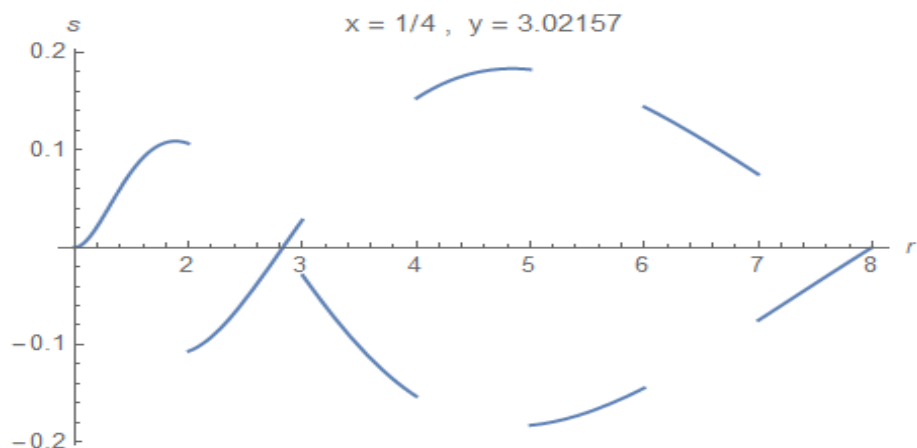
この式を用いれば、この級数は収束する。

3.3 $v_c(x, y)$

r, x, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $s(r, x, y)$ を考える。

$$s(r, x, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{ は床関数。}) \quad (3.3.1)$$

$x = 1/4, y = 3.02157$ のとき、 $r=1\sim 8$ についてこの2D図を描くと次のようになる。



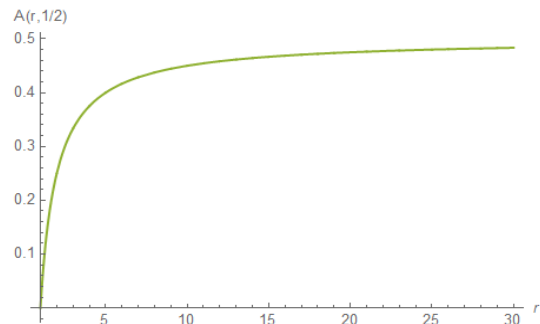
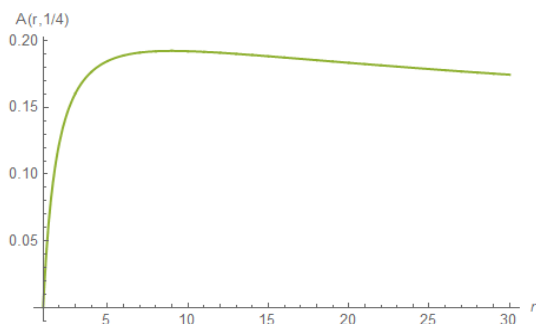
振幅 (A)

この関数の振幅は

$$A(r, x) = \left| (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}} \right| = \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}}$$

(1) $0 < x < 1/2$ のとき $\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh(x \log r) / \sqrt{r} = 0$ 。但し、左図のようになる。

(2) $x = 1/2$ のとき $\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh(x \log r) / \sqrt{r} = 1/2$ 。これは右図のようになる。



周期 (P)

この関数の周期は前節と同じである。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y}]$$

上図の例では、

$$P(1, 3.02157) = [1, 8]$$

波長 (λ)

この関数の波長は前節と同じである。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、

$$\lambda(1, 3.02157) = 7$$

山または谷 (MV_s)

この関数の山または谷の位置は前節と同じである。即ち、

$$MV_s(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}, e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

上図の例では、

$$\begin{aligned} MV_s(1, 3.02157) &= \{1.68179, 4.75684\} \\ \{s(1.68179, 1/4, 3.02157), s(4.75684, 1/4, 3.02157)\} \\ &= \{0.100499, 0.183332\} \end{aligned}$$

であるから、前者も後者も山である。

零点 (Z_s)

この関数の零点も前節と同じである。即ち、

$$Z_s(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}, e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では、

$$Z_s(1, 3.02157) = \{1, 2.82843\}$$

くびれ (X_s)

この関数のくびれも前節と同じである。即ち、

$$X_s(n, y) = \left\{ \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-2)\pi}{2y}}\right), \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2y}}\right) \right\}$$

上図の例では、

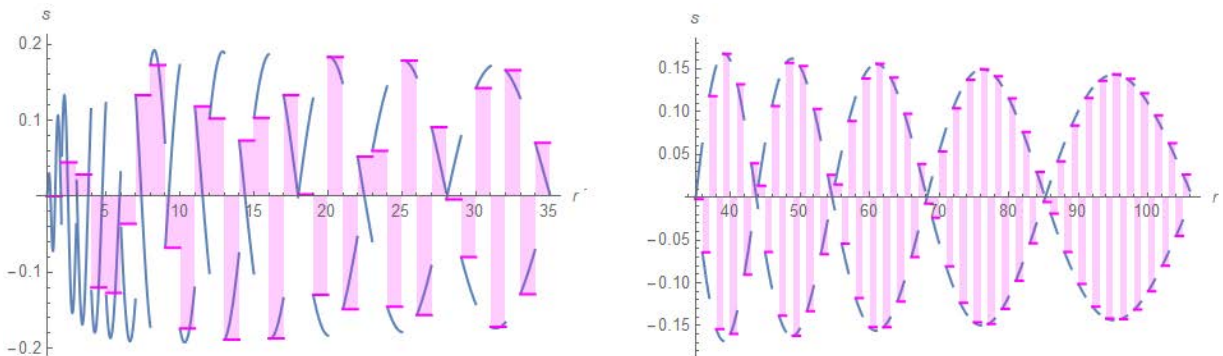
$$X_s(1, 3.02157) = \{1, 3\}$$

正弦級数 $v_c(x, y)$ ($x=1/4, y=14.1347\dots$ のとき)

次のような正弦級数を考える。

$$v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \quad (2.4c)$$

これは $s(r, x, y)$ (3.3.1) を項とする級数である。例えば $x=1/4, y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 34$ および $r=35, \dots, 105$ について $s(r, x, y)$ の図を並べて示せば



マゼンタの面積の和が (2.4c) の関数値となる。左図ではこの和は (3.3.1) の積分値とは大きく異なっている。これに対し右図ではこの和は (3.3.1) の積分値に近い。

収束

右図の最後の2つのくびれは第11周期に属する。このくびれ間の面積は相殺して0になりそうに思える。試に $x=1/4, y_1=14.1347\dots$ のときの第11周期と第25周期のくびれ間の面積を計算すると次のようになる。

第11周期 $Xs(11, y_1) = \{85, 106\}$, $\lambda(11, y_1) = 47.7$

$$v_{11}\left(\frac{1}{4}, y_1\right) = \sum_{r=85}^{105} (-1)^{r-1} \frac{\sinh(y_1 \log r)}{\sqrt{r}} \sin(y_1 \log r) = -0.0000708924$$

第25周期 $Xs(25, y_1) = (42981, 53679)$, $\lambda(25, y_1) = 24058.2$

$$v_{25}\left(\frac{1}{4}, y_1\right) = \sum_{r=42981}^{53678} (-1)^{r-1} \frac{\sinh(y_1 \log r)}{\sqrt{r}} \sin(y_1 \log r) = -0.00000233757$$

両者を比べると r の増加に伴い2つのくびれ間の面積はに0に収束している。この原因は明らかである。振幅が1のときでさえ、くびれ間の面積は r が増加するほど小さくなる。その上に振幅が0に近づくのである。これらの相乗効果により、くびれ間の面積は更に0に近づかざるを得ない。但し、 $x \geq 1/2$ のときは振幅が0に近づかないから、収束のためには総和法の助けが必要である。

3.4 $v_c(x, y)$ の y に関する振幅

3.3 で扱った正弦関数および級数は次のようなものであった。

$$s(r, x, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{は床関数。}) \quad (3.3.1)$$

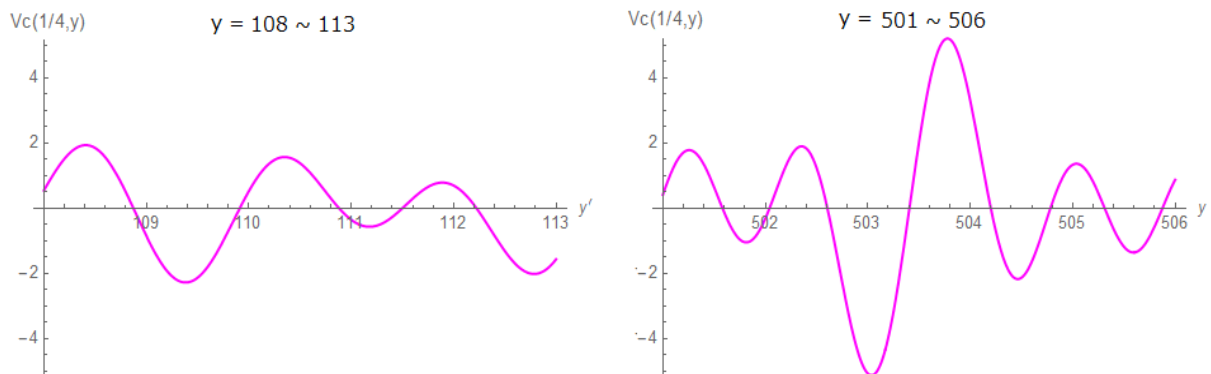
$$v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \quad (2.4c)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (2.4c')$$

本節では (3.3.1) を用いて、(2.4c) の y に関する振幅(山、谷)について研究する。なお、精度確保のため、計算及び描画は (2.4c') により行う。

x が与えられたとき $v_c(x, y)$ は y に関する可変周期関数となる。

例えば $x=1/4$ のとき、 $y=108 \sim 113$ と $y=501 \sim 506$ での2D図を描くと次のようになる。



左図よりも右図の方が y の値は大きい、右図の山が左図の山よりも高いとか、右図の谷が左図

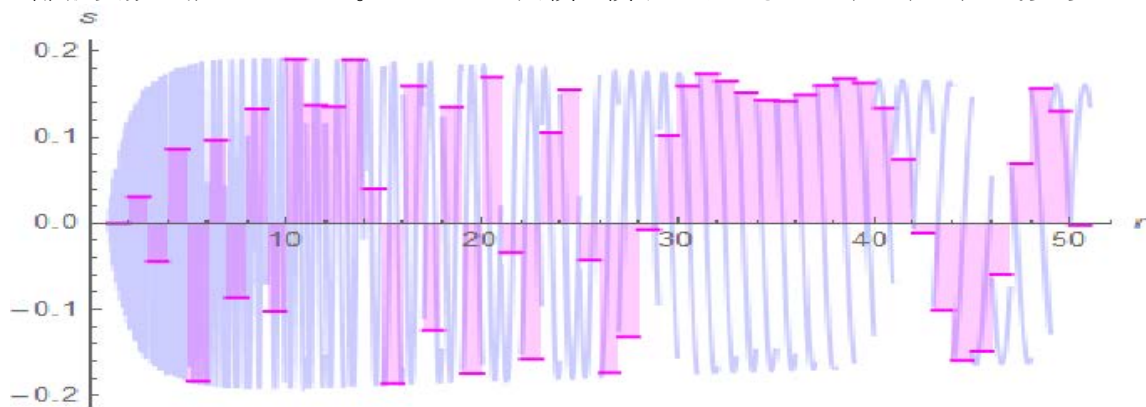
の谷よりも深いとは言えない。しかし、右図の最も高い山は左図の最も高い山よりも高く、右図の最も深い谷は左図の最も深い谷よりも深い。つまり、右図の振幅は左図の振幅よりも概して大きいと言うことは出来る。以下、そのことを図的に例証する。

3.4.1 $v_c(1/4, y)$ の山 ($y=108.4$ 付近)

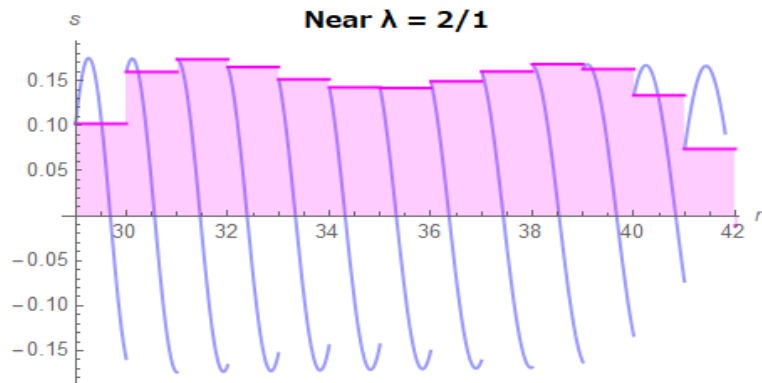
$y = 108 \sim 113$ においてはこの付近の山が最も高い。(2.4c') を用いてこの付近の山を正確に計算すると次のようになる。

```
FindMaximum[v_c[1/4, y], {y, 108.5}]
{1.92904, {y -> 108.409}}      y_M := 108.409
```

(3.3.1) により $s(r, 1/4, y_M)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (2.4c) の山 1.929 となる。



この図を見ると、正項が連続した区間が2か所あり、これらが山の高さに寄与していることが分かる。(1) 波長が $2/1$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 29 \sim 41$ は 13 項連続で正である。この辺りと思われるくびれを試行錯誤で計算すると

```
{Xs[59, y_M], Xs[65, y_M]}
{{29, 30}, {41, 42}}
```

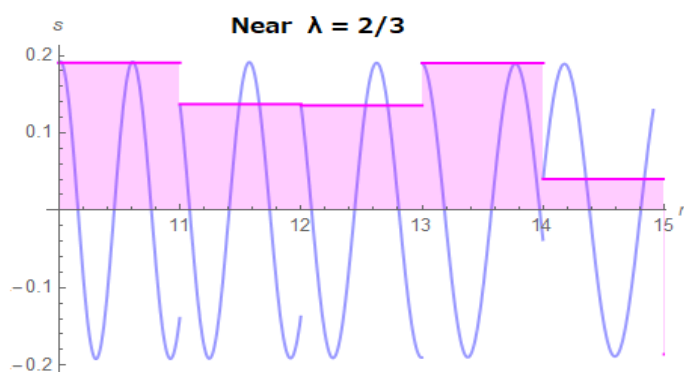
よって $r = 29 \sim 41$ は 第 59 ~ 65 周期に含まれることが分かる。そこで、これらの周期の波長を計算すると

```
Table[lambda[n, y_M], {n, 59, 65}]
{1.72054, 1.82321, 1.932, 2.04728, 2.16944, 2.29889, 2.43607}
```

即ち、 $r = 29 \sim 41$ の波長は 1.72 ~ 2.44 である。

以下、計算の結果のみを記述する。

(2) 波長が $2/3 (=0.67)$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 10 \sim 14$ は 5 項連続で正である。

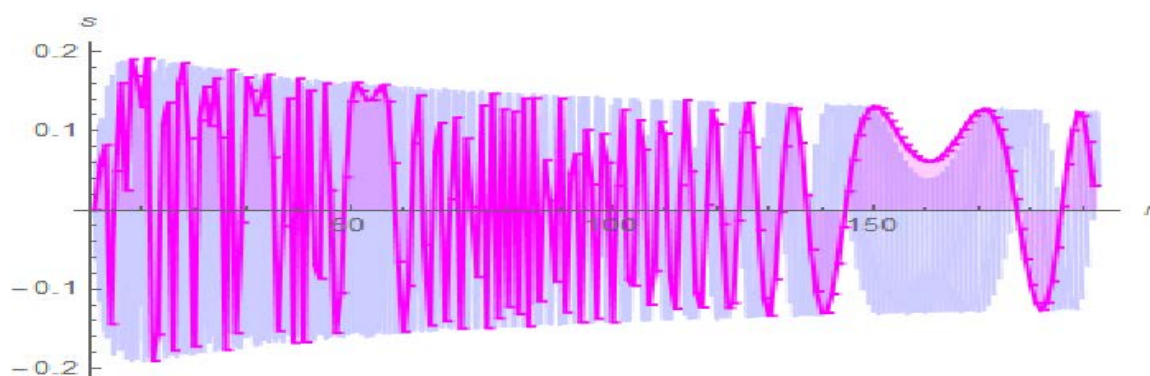
これらは第 42 ~ 46 周期に含まれ、波長は $0.64 \sim 0.81$ である。

3・4・2 $v_c(1/4, y)$ の山 ($y=503.8$ 付近)

$y = 501 \sim 506$ においてはこの付近の山が最も高い。(2.4c') を用いてこの付近の山を正確に計算すると次のようになる。

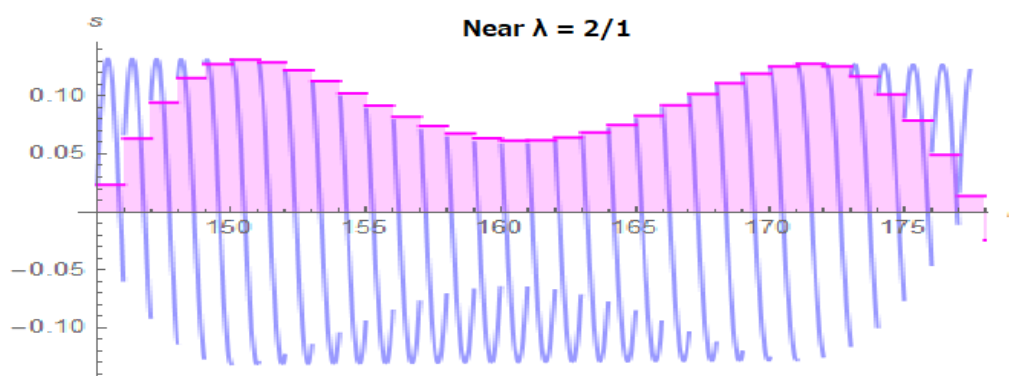
```
FindMaximum[v_c[1/4, y], {y, 503.8}]
{5.19826, {y -> 503.778}}      y_M := 503.778
```

(3.3.1) により $s(r, 1/4, y_M)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (2.4c) の山 5.198 となる。



この図を見ると、正項が連続した区間が5か所あり、これらが山の高さに寄与していることが分かる。

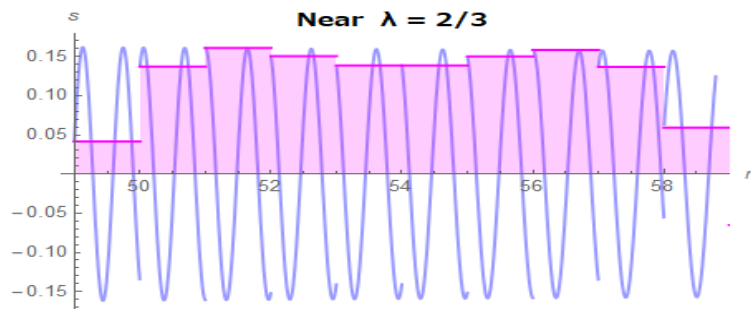
(1) 波長が $2/1$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



$r = 145 \sim 177$ は 33 項連続で正である。これは 3・4・1 (1) の 2.54 倍である。

これらは第 400 ~ 416 周期に含まれ、波長は $1.82 \sim 2.22$ である。

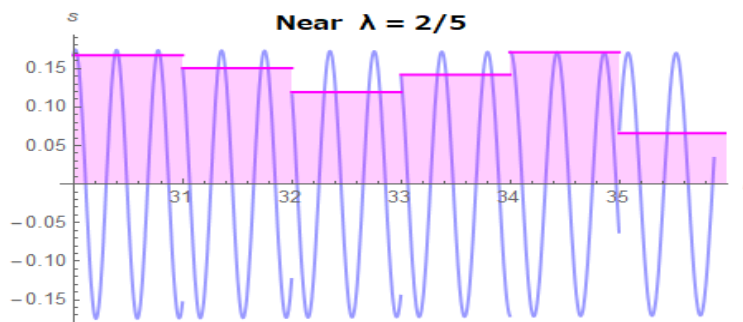
(2) 波長が $2/3 (=0.67)$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



$r = 49 \sim 58$ は 10 項連続で正である。これは $3 \cdot 4 \cdot 1$ (2) の 2 倍である。

これらは第 312 ~ 326 周期に含まれ、波長は $0.61 \sim 0.71$ である。

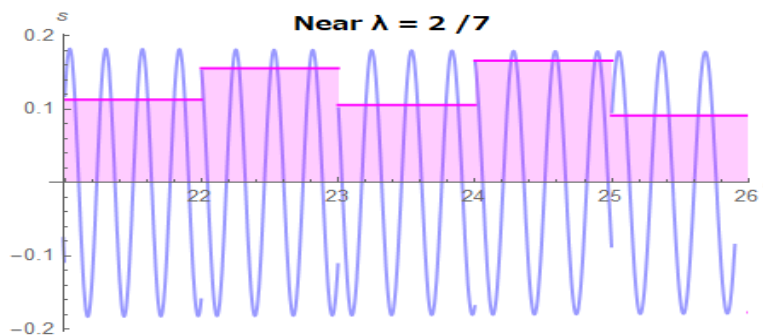
(3) 波長が $2/5 (=0.4)$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



$r = 30 \sim 35$ は 6 項連続で正である。この区間は $3 \cdot 4 \cdot 1$ では存在しない。

これらは第 272 ~ 285 周期に含まれ、波長は $0.37 \sim 0.43$ である。

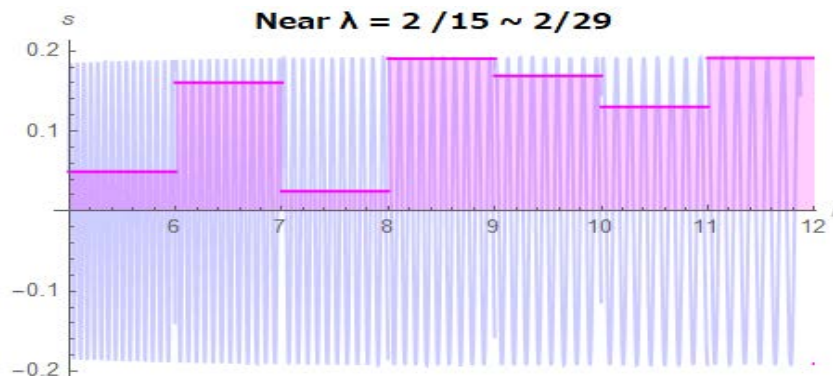
(4) 波長が $2/7 (=0.29)$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



$r = 21 \sim 25$ は 5 項連続で正である。この区間は $3 \cdot 4 \cdot 1$ では存在しない。

これらは第 246 ~ 257 周期に含まれ、波長は $0.27 \sim 0.31$ である。

(5) 波長が $2/15 \sim 2/29$ ($0.07 \sim 0.13$) 付近の拡大図を描くと次のようである。



$r = 5 \sim 11$ は 7 項連続で正である。この区間は $3 \cdot 4 \cdot 1$ では存在しない。

これらは第 137 ~ 190 周期に含まれ、波長は 0.07 ~ 0.13 である。

3・4・3 $y=503.8$ 付近 と $y=108.4$ 付近の山の高さ

$y=503.8$ 付近の山は $y=108.4$ 付近の山よりも高い。何故ならば、

(1) 波長が $2/1, 2/3$ 付近の 正項の連続区間が前者は後者の約 2~2.5 倍長い。

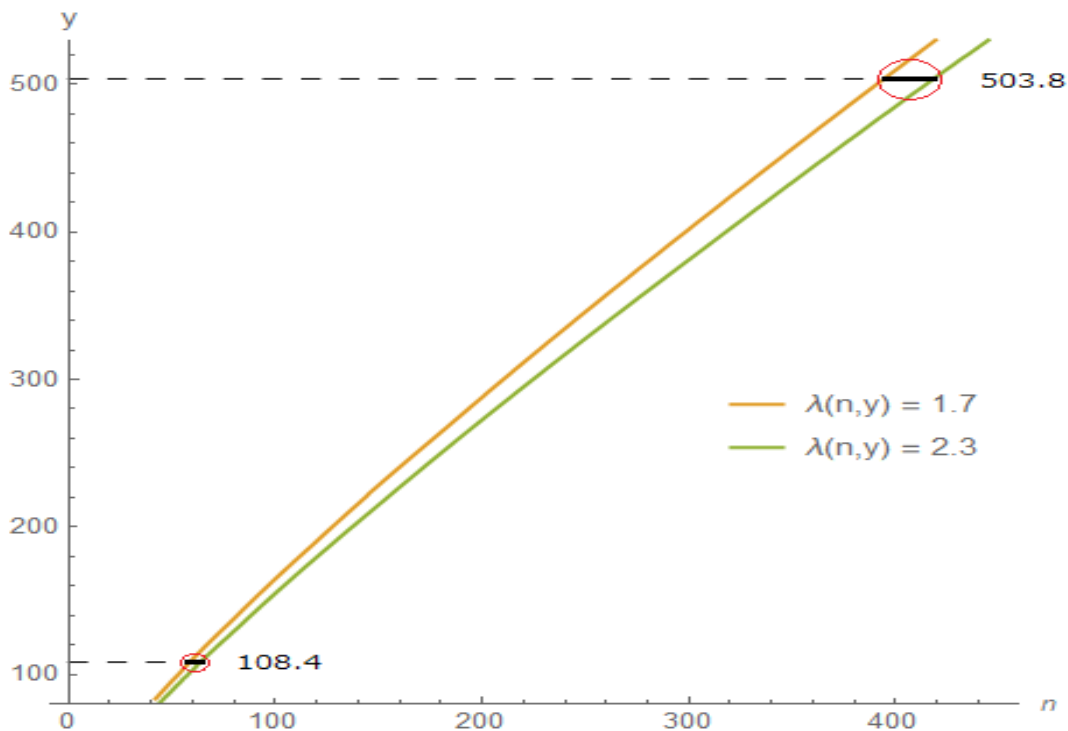
(2) 波長が $2/5 \sim 2/29$ の 正項の連続区間が前者に加わっている。

(1) の原因は波長の定義式にある。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

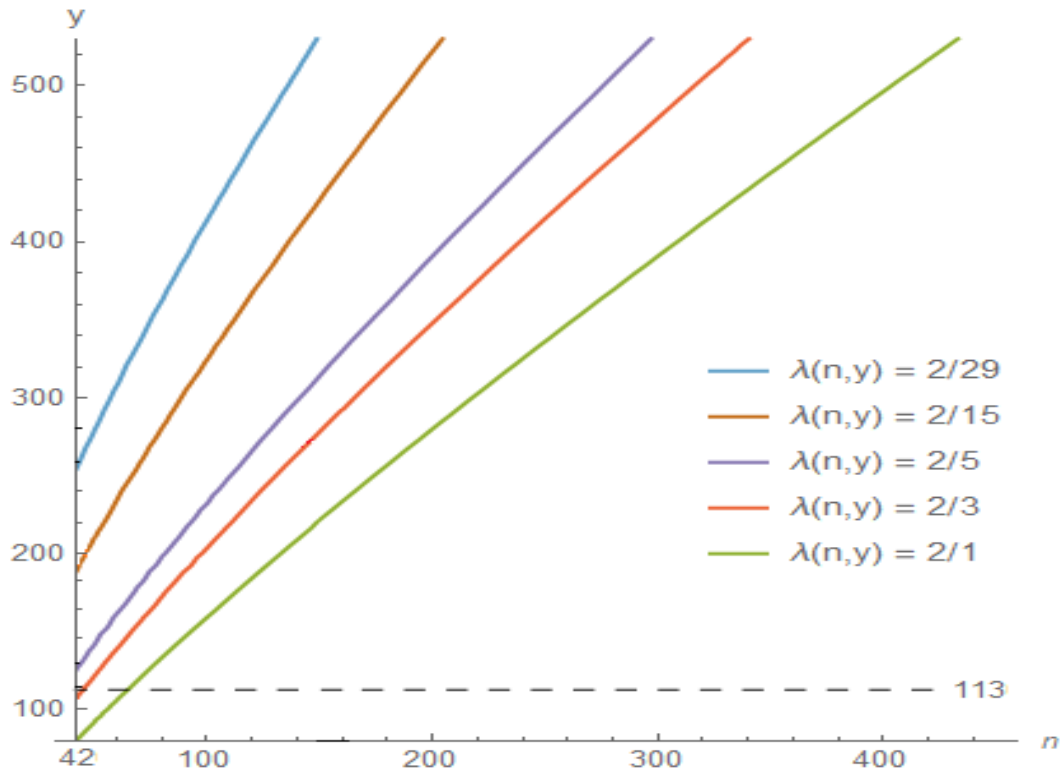
$\lambda = 2$ の近傍を ± 0.3 とし、 $\lambda(n, y) = 1.7$ と $\lambda(n, y) = 2.3$ の等高線図を描くと次のようになる。

縦軸は y で横軸は周期番号 n である。



$y=108.4$ 付近の波長 λ の許容範囲は左下の黒い横線であり、 $y=503.8$ 付近の λ の許容範囲は右上の黒い横線である。すると $y=503.8$ 付近の許容範囲が $y=108.4$ 付近のそれよりも広いことが分かる。これは 波長 λ が増大するとその等高線の勾配 y/n が減少する ためである。このことは $\lambda = 2/3, 2/5, \dots$ についても同様である。かくして $y=503.8$ 付近の正の連続項数は $y=108.4$ 付近の正のそれよりも多くなる。以上が (1) の理由である。

(2) の原因も波長の定義式にある。 $\lambda = 2/1, 2/3, 2/5, 2/15, 2/29$ について等高線を描くと次のようになる。 $y=108.4$ 付近でこれらを与える周期番号の最小値は 42 である ($3 \cdot 4 \cdot 1(2)$) から、横軸は $n \geq 42$ で描かれている。



ここで高さ113の水平線を引くと鎖線のようになる。 $y=108.4$ 付近は $y=108\sim 113$ であるから、この鎖線より下であり、ここには $\lambda=2/5, 2/15, 2/29$ は存在できない。その理由は、**周期番号 n が所与のとき、波長 λ が減少すれば等高線が上方にシフトすることにある**。かくて y が増大すれば $\lambda(42, y) = 2/(2k-1)$ の k も増加する。以上が(2)の理由である。

3・4・4 $y=503$ 付近と $y=109.4$ 付近の谷の深さ

$y=503$ 付近の谷は $y=109.4$ 付近の谷よりも深い。何故ならば、 $3\cdot 4\cdot 1\sim 3\cdot 4\cdot 3$ は谷についても成立するからである。

$3\cdot 4\cdot 3$ と $3\cdot 4\cdot 4$ より、 $y=501\sim 506$ の振幅は $y=108\sim 113$ の振幅よりも大きいとの結論が得られる。このことはより一般的に次のように記述できる。

法則 3・4・5

x, y を実数、関数 $v_c(x, y)$ を次のようであるとする。

$$v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \quad (2.4c)$$

すると、 x が与えられたとき、 $v_c(x, y)$ の振幅は概して y の絶対値に比例する。

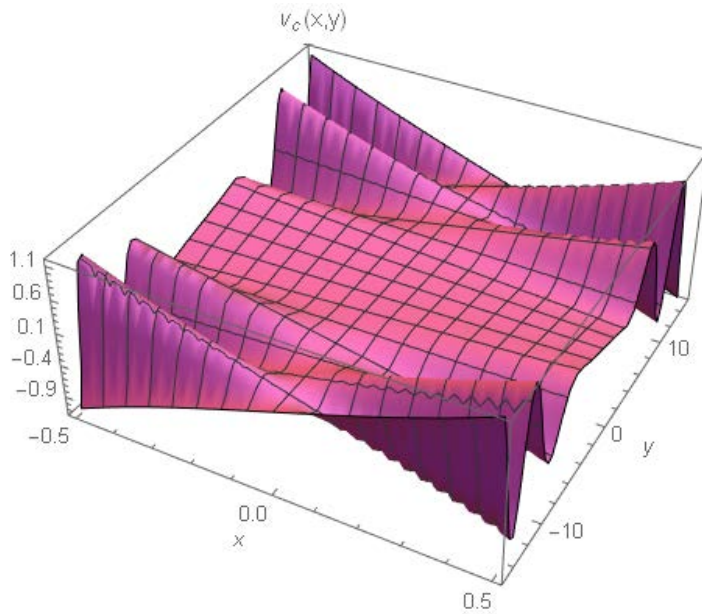
Note

これが定理として成立しないことは明らかである。例外が少なからず存在するからである。それに関わらず法則 3・4・5 は成立する。上述のとおり、それは波長 λ の等高線の勾配 y/n の変化と等高線のシフトに依るからである。

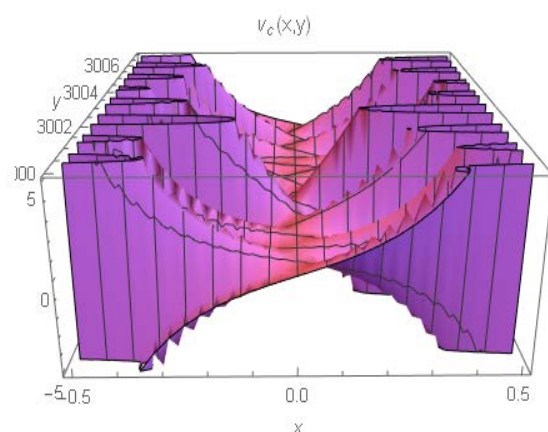
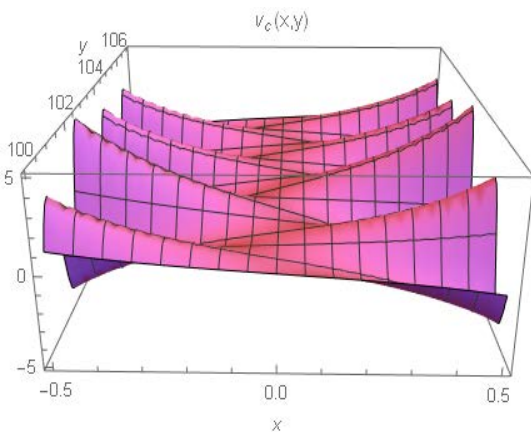
この法則は **ベルクマンの法則**(高緯度地方の熊は低緯度地方の熊よりも概して大きい) に似ている。

3・5 $v_c(x,y)$ の形状と性質

(2.4c) より、 $v_c(x,y)$ は x と y の両方に関して奇関数であることが分かる。このことは、 $v_c(x,y)$ は x と y の両方に関して点対象であることを示している。



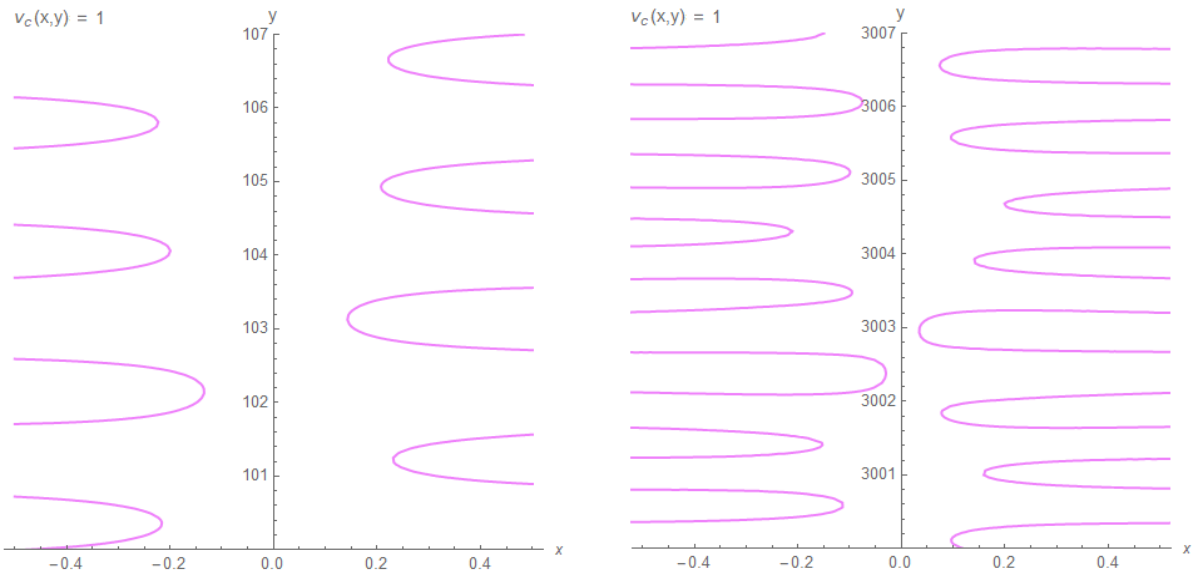
次に、 $-1/2 \leq x \leq 1/2$ について $v_c(x,y)$ の、 $y = 100 \sim 107$ と $y = 3000 \sim 3007$ での3D図を描くとそれぞれ次のようになる。



両図において上方は \cup 、下方は \cap に見えているが、 \cup も \cap も右図が左図よりも概して曲率が大きいことが分かる。これは **法則 3・4・5** により右図の方が左図よりも山や谷が険しいことによる。なお、右図の方が左図よりも山や谷が多い(約2倍)が、何故そうなるかは不明である。

3・6 $v_c(x,y)$ の高さ1の等高線

前節の $v_c(x,y)$ の2枚の3D図の高さ1の等高線図を描くとそれぞれ次のようになる。左図が $y = 100 \sim 107$ で右図が $y = 3000 \sim 3007$ である。



両図において等高線はつとつ のように見えているが、つもつ も右図が左図よりも概して y 軸に近いことが分かる。これも 法則 3・4・5 により右図の方が左図よりも山や谷が概して険しいことによる。従って、 $|y|$ が増大するほど 等高線の先端つとつ は両側から y 軸に接近する。

4 $u_s(x, y)$ の y に関する振幅

命題 2・4 の連立方程式のうち、 $u_s(x, y)$ は次のようであった。

$$u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) \quad (2.4s)$$

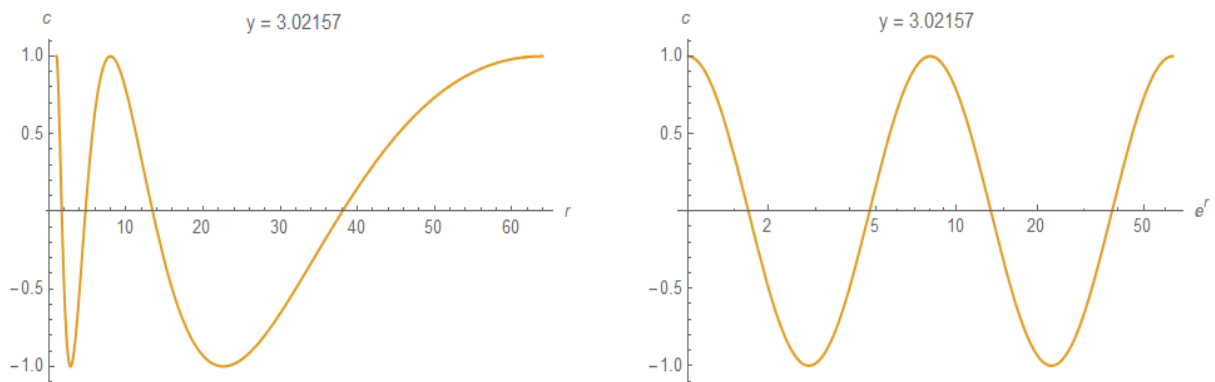
本章では、この関数の y に関する振幅を考察する。

4・1 $\cos(y \log r)$

r, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $c(r, y)$ を考える。

$$c(r, y) = \cos(y \log r) \quad (4.1.1)$$

$y = 3.02157$ のとき、 $r=1 \sim 64$ についてこれの2D図を描くと次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。



これらを観察すると、 $c(r, y)$ は r に関して可変周期関数であることが分かる。但し、右図は一見固定周期関数のように見える。

振幅 (A)

この関数の振幅は $A = 1$ である。

周期 (P)

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

上図の例では、 $c(r, y)$ の第1周期と第2周期の周期はそれぞれ

$$P(1, 3.02157) = [1, 8), \quad P(2, 3.02157) = [8, 64)$$

波長 (λ)

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、 $c(r, y)$ の第1周期と第2周期の波長はそれぞれ

$$\lambda(1, 3.02157) = 7, \quad \lambda(2, 3.02157) = 56$$

山 (Mc)

$c(r, y)$ は余弦関数なので山は周期の両端に半分ずつ存在するが、先頭のものを採用する。

$$Mc(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y}$$

上図の例では、 $c(r, y)$ の第1周期 と第2周期の山はそれぞれ

$$Mc(1, 3.02157) = 1 \quad , \quad Mc(2, 3.02157) = 8$$

谷 (Vc)

$c(r, y)$ は余弦関数なので谷は片対数目盛で描かれた周期の中央に存在する。即ち、

$$Vc(n, y) = e^{(2n-1)\pi/y}$$

上図の例では、 $c(r, y)$ の第1周期 と第2周期の谷はそれぞれ

$$Vc(1, 3.02157) = 2.82843 \quad , \quad Vc(2, 3.02157) = 22.6275$$

零点 (Zc)

$c(r, y)$ は余弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の $1/4$ と $3/4$ の所に存在する。

$$Zc(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}} , e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

上図の例では、 $c(r, y)$ の第1周期 と第2周期の零点はそれぞれ

$$Zc(1, 3.02157) = \{1.68179, 4.75684\}$$

$$Zc(2, 3.02157) = \{13.4544, 38.0548\}$$

零点近傍 (Xc)

関数 $c(r, y)$ の変数 r を離散変数とすると、零点から ± 0.5 以内の整数 r を **零点近傍** と呼ぶことにする。即ち、

$$Xc(n, y) = \left\{ \text{Round}\left(e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}\right) , \text{Round}\left(e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}}\right) \right\}$$

上図の例では

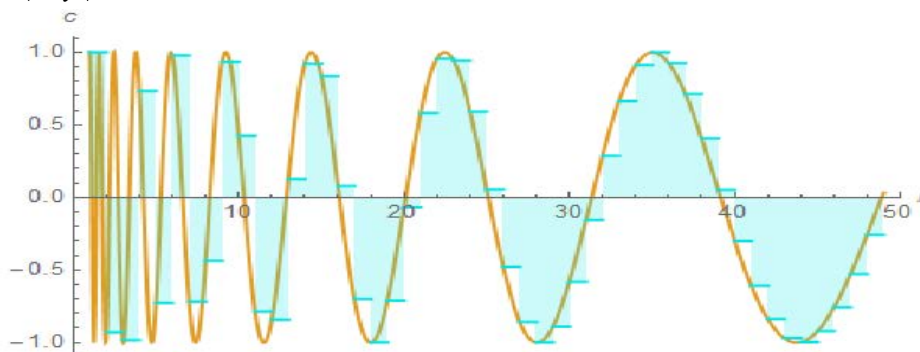
$$Xc(1, 3.02157) = \{2, 5\} \quad , \quad Xc(2, 3.02157) = \{13, 38\}$$

リーマン・ゼータ型余弦級数

次のようなリーマン・ゼータ型余弦級数を考える。

$$u(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \cos(y \log r) \tag{4.1.2}$$

これは $c(r, y)$ (4.1.1) を項とする級数である。例えば、 $y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 49$ について $c(r, y)$ の図を示せば次のようになる。



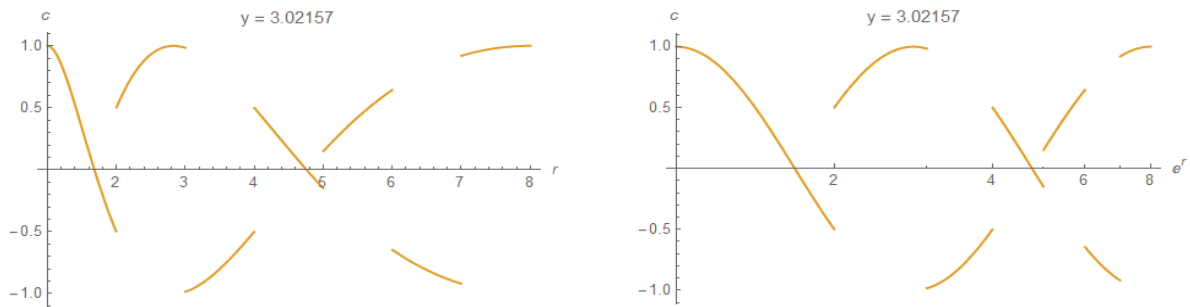
シアンの面積の和が (4.1.2) の関数値となる。
 この級数は発散し、総和法を適用しても漸近展開にしかならない。

4.2 ± cos (y log r)

r, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $c(r, y)$ を考える。

$$c(r, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \cos(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{は床関数。}) \quad (4.2.1)$$

$y = 3.02157$ のとき、 $r=1 \sim 8$ についてこれの2D図を描くと次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。



前節とは異なり、 $c(r, y)$ は r に関して不連続関数である。

振幅 (A)

この関数の振幅は

$$A(r) = |(-1)^{\lfloor r-1 \rfloor}| = 1$$

周期 (P)

この関数の周期は前節と同じである。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

上図の例では、

$$P(1, 3.02157) = [1, 8)$$

波長 (λ)

この関数の波長は前節と同じである。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、

$$\lambda(1, 3.02157) = 7$$

山または谷 (MVc)

前節と異なり、この関数 $c(r, y)$ は符号が交代する。このため山と谷は前節の関数の最大2倍となる。

$$MVc(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}, e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

山か谷かは $r = MVc(n, y)$ における $c(r, y)$ の符号により判別する。

上図の例では

$$MVc(1, 3.02157) = \{1, 2.8284\}$$

$$\{c(1, 3.02157), c(2.8284, 3.02157)\} = (1, 1)$$

であるから、前者も後者も山である。

零点 (Zc)

この関数の零点も前節と同じである。即ち、

$$Zc(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}, e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

上図の例では

$$Zc(1, 3.02157) = \{1.68179, 4.75684\}$$

くびれ (Xc)

この関数 $c(r, y)$ は符号が交代するため、零点がくびれて見える。そこで零点から ± 0.5 以内の整数点をくびれと呼ぶことにする。即ち、

$$Xc(n, y) = \left\{ \text{Round}\left(e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}\right), \text{Round}\left(e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}}\right) \right\}$$

上図の例では

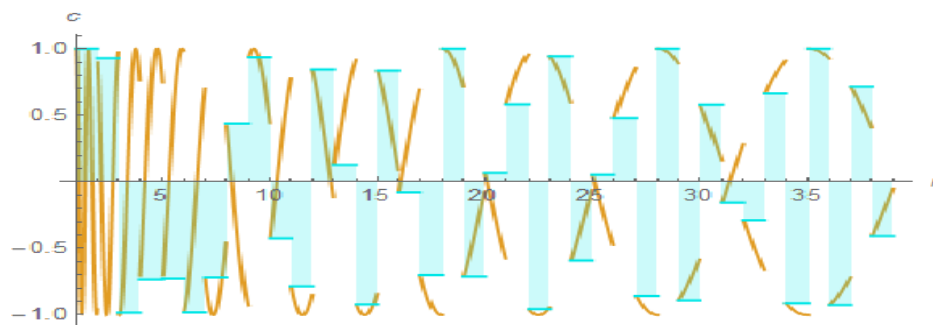
$$Xc(1, 3.02157) = \{2, 5\}$$

ディリクレ・イータ型余弦級数 ($y=14.1347\dots$ のとき)

次のようなディリクレ・イータ型余弦級数を考える。

$$u(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \cos(y \log r) \tag{4.2.2}$$

これは $c(r, y)$ (4.2.1) を項とする級数である。例えば、 $y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 38$ について $c(r, y)$ の図を示せば次のようになる。



シアンの面積の和が (4.2.2) の関数値となる。

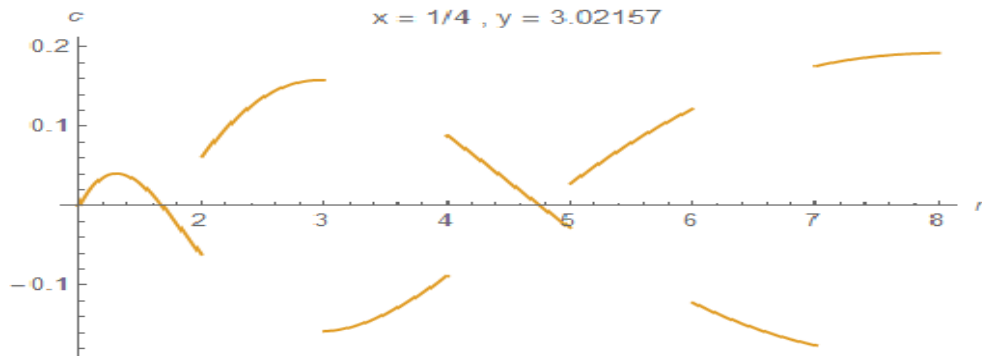
この級数は発散するが、総和法を適用すれば収束する。

4・3 $u_s(x, y)$

r, x, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $c(r, x, y)$ を考える。

$$c(r, x, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}} \cos(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{は床関数。}) \quad (4.3.1)$$

$x = 1/4, y = 3.02157$ のとき、 $r=1 \sim 8$ についてこの2D図を描くと次のようになる。



振幅 (A)

この関数の振幅は

$$A(r, x) = \left| (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}} \right| = \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}}$$

(1) $0 < x < 1/2$ のとき $0 \leq A(r, x) < 1/2$ for $r=2, 3, 4, \dots$

(2) $x = 1/2$ のとき $\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh(x \log r) / \sqrt{r} = 1/2$ 。

周期 (P)

この関数の周期は前節と同じである。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

上図の例では、

$$P(1, 3.02157) = [1, 8)$$

波長 (λ_n)

この関数の波長は前節と同じである。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、

$$\lambda(1, 3.02157) = 7$$

山または谷 (MVC)

この関数の山または谷の位置は前節とは少し異なる。即ち、

$$MVC(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}, e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では、

$$MVC(1, 3.02157) = \{1, 2.8284\}$$

$$\left\{ c\left(1, \frac{1}{4}, 3.02157\right), c\left(2.8284, \frac{1}{4}, 3.02157\right) \right\} = \{0, 0.156302\}$$

0 は山ではないとし、正数のみ山とする。なお、このような例外は第1周期でのみ生じる。

零点 (Zc)

この関数の零点も前節と同じである。即ち、

$$Zc(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}, e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

上図の例では、

$$Zc(1, 3.02157) = \{1.68179, 4.75684\}$$

くびれ (Xc)

この関数のくびれも前節と同じである。即ち、

$$Xc(n, y) = \left\{ \text{Round} \left(e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}} \right), \text{Round} \left(e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right) \right\}$$

上図の例では、

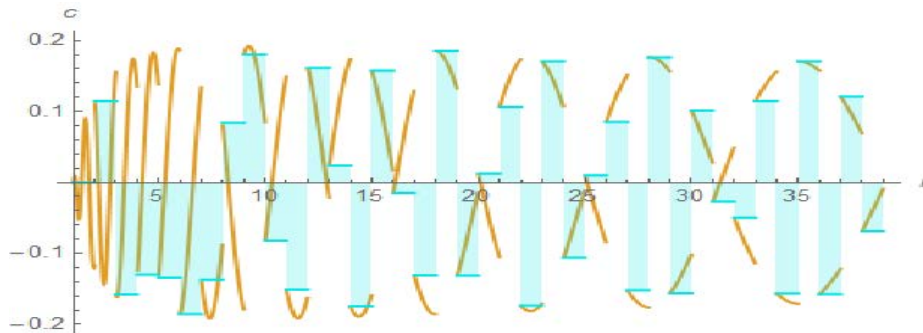
$$Xc(1, 3.02157) = \{2, 5\}$$

余弦級数 $u_s(x, y)$ ($x=1/4, y=14.1347\dots$ のとき)

次のような余弦級数を考える。

$$u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) \quad (2.4s)$$

これは $c(r, x, y)$ (4.3.1) を項とする級数である。例えば、 $x=1/4, y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 38$ について $c(r, x, y)$ の図を示せば次のようになる。



シアン面積の和が (2.4s) の関数値となる。この級数は $0 < x < 1/2$ においては収束する。 $x \geq 1/2$ のときは総和法を適用すれば収束する。

4.4 $u_s(x, y)$ の y に関する振幅

4.3 で扱った余弦関数および級数は次のようなものであった。

$$c(r, x, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \frac{\sinh(x \log r)}{\sqrt{r}} \cos(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{ は床関数。}) \quad (4.3.1)$$

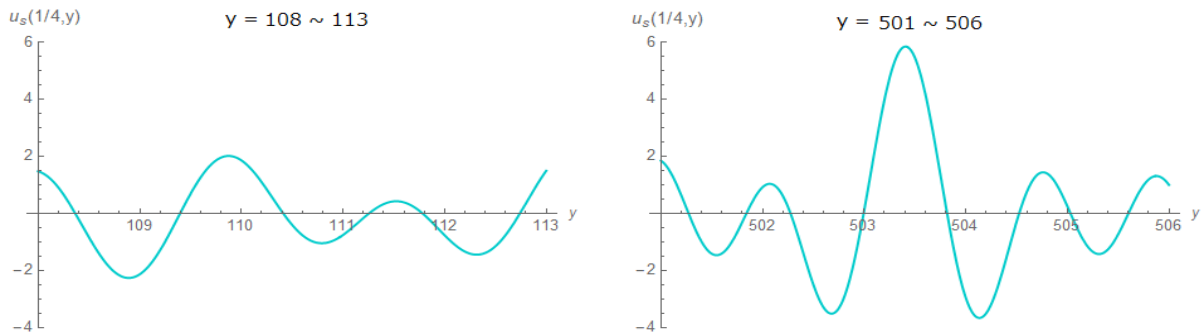
$$u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) \quad (2.4s)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{Re} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} - \text{Re} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (2.4s')$$

本節では (4.3.1) を用いて、(2.4s) の y に関する振幅(山、谷)について研究する。なお、精度確保のため、計算及び描画は (2.4s') により行う。

x が与えられたとき $u_s(x, y)$ は y に関する可変周期関数となる。

例えば $x = 1/4$ のとき、 $y = 108 \sim 113$ と $y = 501 \sim 506$ での2D図を描くと次のようになる。



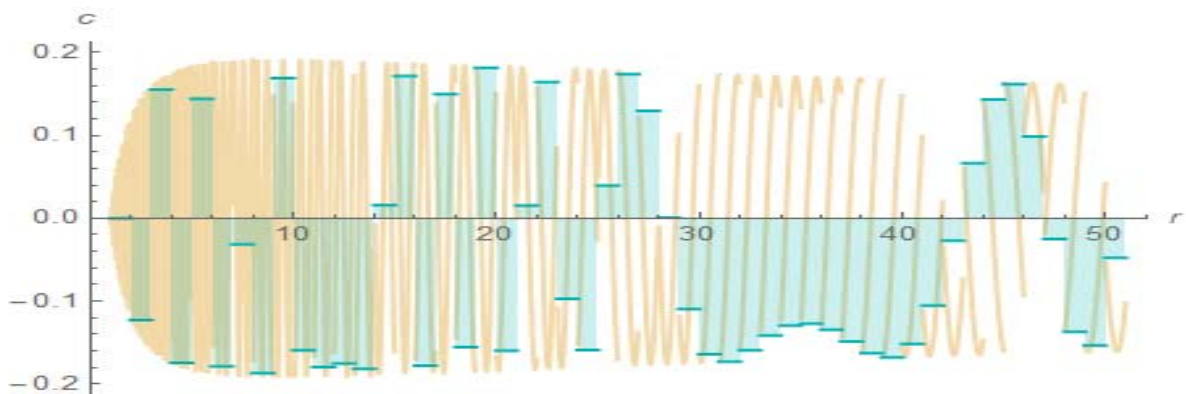
左図よりも右図の方が y の値は大きいですが、右図の谷が左図の谷よりも深いとか右図の山が左図の山よりも高いとは言えない。しかし、右図の最も深い谷は左図の最も深い谷よりも深く、右図の最も深い谷は左図の最も深い谷よりも深いとは言える。以下、そのことを図的に例証する。

4.4.1 $u_s(1/4, y)$ の谷 ($y=108.9$ 付近)

$y = 108 \sim 113$ においてはこの付近の谷が最も深い。(2.4s') を用いてこの付近の谷を正確に計算すると次のようになる。

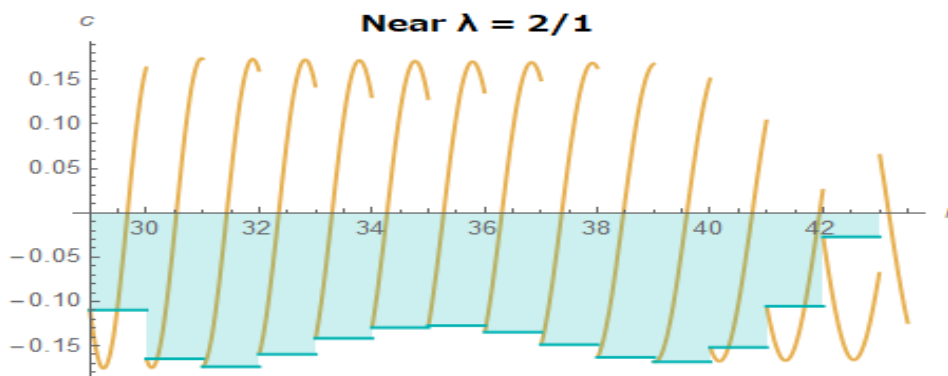
```
FindMinimum[u_s[1/4, y], {y, 108.9}]
{-2.25541, {y -> 108.892}}      y_v := 108.892
```

(4.3.1) により $c(r, 1/4, y_v)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、橙は連続変数、シアンは離散変数で描かれている。シアンの面積を積み上げたものが (2.4s) の谷 -2.255 となる。



この図を見ると、負項が連続した区間が3か所あり、これらが谷の深さに寄与していることが分かる。

(1) 波長が $2/1$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 29 \sim 42$ は 14 項連続で負である。この辺りと思われるくびれを試行錯誤で計算すると

```
{Xc[59, yv], Xc[65, yv]}
{{29, 30} , {41, 42}}
```

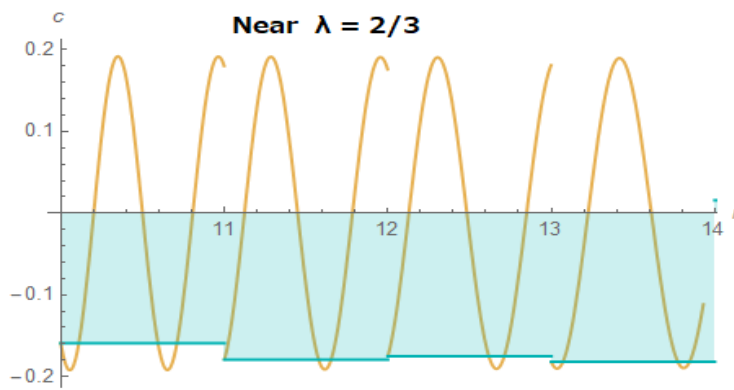
よって $r = 29 \sim 42$ は 第 59 ~ 65 周期に含まれることが分かる。そこで、これらの周期の波長を計算すると

```
Table[λ[n, yv], {n, 59, 65}]
{1.68739, 1.78762, 1.8938, 2.00629, 2.12546, 2.25171, 2.38545}
```

即ち、 $r = 29 \sim 42$ の波長は 1.69 ~ 2.39 である。

以下、計算の結果のみを記述する。

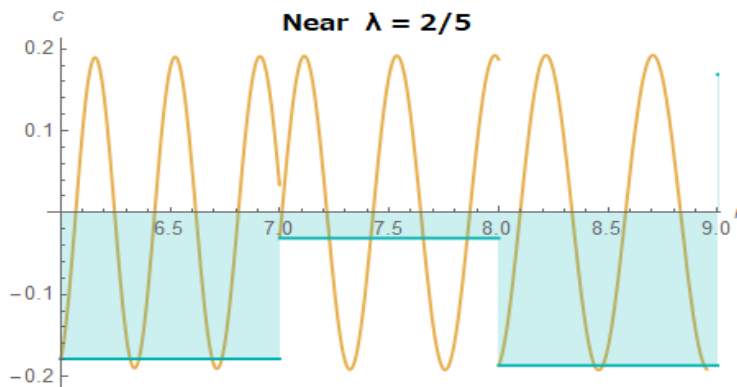
(2) 波長が $2/3 (=0.67)$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 10 \sim 13$ は 4 項連続で負である。

これらは第 41 ~ 45 周期に含まれ、波長は 0.63 ~ 0.71 である。

(3) 波長が $2/5 (=0.4)$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 6 \sim 8$ は 3 項連続で負である。

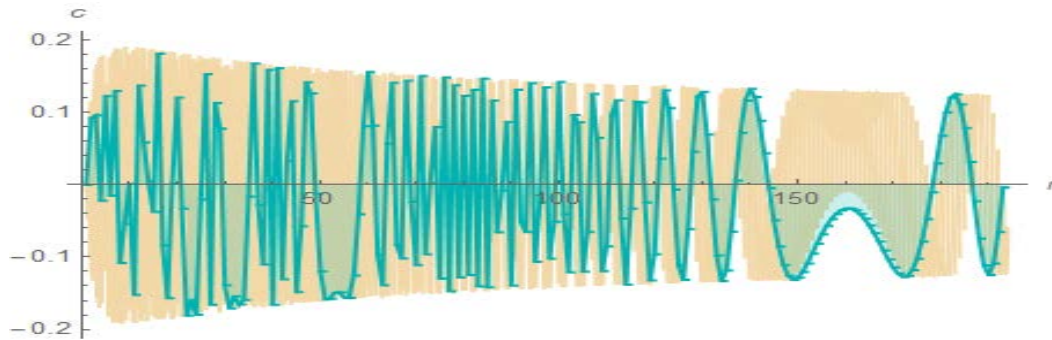
これらは第 33 ~ 36 周期に含まれ、波長は 0.38 ~ 0.42 である。

4・4・2 $u_s(1/4, y)$ の谷 ($y=504.1$ 付近)

$y = 501 \sim 506$ においてはこの付近の谷が最も深い。(2.4s') を用いてこの付近の谷を正確に計算すると次のようになる。

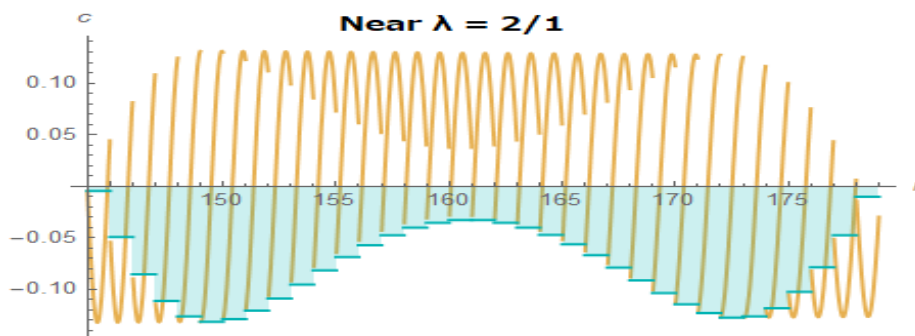
```
FindMinimum[u_s[1/4, y], {y, 504.1}]
{-3.65549, {y → 504.135}}      yv := 504.135
```

(4.3.1) により $c(r, 1/4, y_v)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、橙は連続変数、シアンは離散変数で描かれている。シアンを積み上げたものが (2.4s) の谷 -3.655 となる。



この図を見ると、負項が連続した区間が4か所あり、これらが谷の深さに寄与していることが分かる。

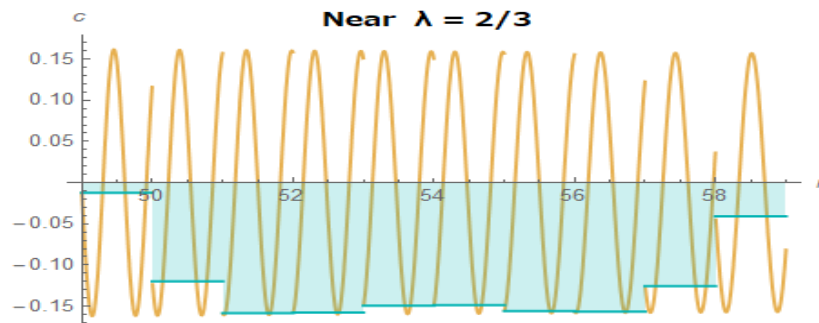
(1) 波長が $2/1$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 144 \sim 178$ は 35 項連続で負である。これは $4 \cdot 4 \cdot 1$ (1) の 2.5 倍である。

これらは第 399 ~ 416 周期に含まれ、波長は $1.79 \sim 2.21$ である。

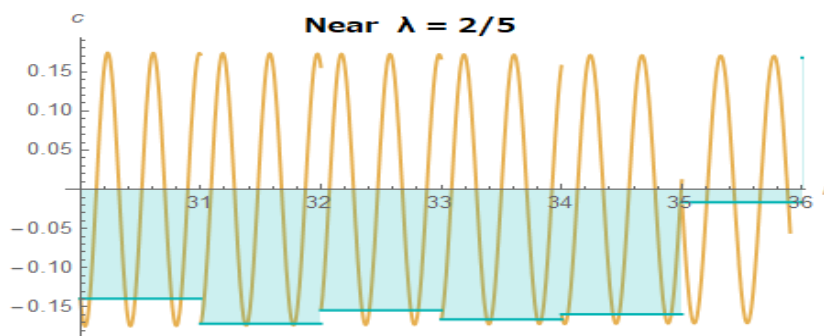
(2) 波長が $2/3 (=0.67)$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 49 \sim 58$ は 10 項連続で負である。これは $4 \cdot 4 \cdot 1$ (2) の 2.5 倍である。

これらは第 312 ~ 326 周期に含まれ、波長は $0.60 \sim 0.71$ である。

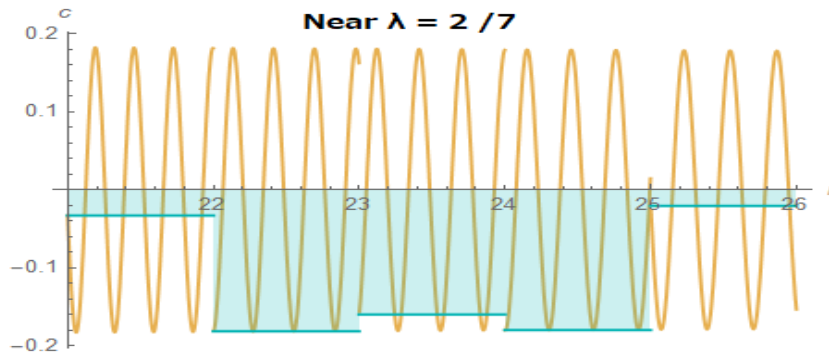
(3) 波長が $2/5 (=0.40)$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 30 \sim 35$ は 6 項連続で負である。これは $4 \cdot 4 \cdot 1$ (3) の 2 倍である。

これらは第 272 ~ 285 周期に含まれ、波長は 0.37 ~ 0.43 である。

(4) 波長が $2/7 (=0.294)$ 付近の拡大図を描くと次のようになる。



$r = 21 \sim 25$ は 5 項連続で負である。この区間は $4 \cdot 4 \cdot 1$ では存在しない。

これらは第 246 ~ 257 周期に含まれ、波長は 0.27 ~ 0.30 である。

4・4・3 $y=504.1$ 付近 と $y=108.9$ 付近の谷の深さ

$y=504.1$ 付近の谷は $y=108.9$ 付近の谷よりも深い。何故ならば、

(1) 波長が $2/1, 2/3, 2/5$ 付近の 負項の連続区間が前者は後者の 2~2.5 倍長い。

(2) 波長が $2/7$ の 負項の連続区間が前者に加わっている。

これらの原因は $3 \cdot 4 \cdot 3$ で見たとおりである。

4・4・4 $y=503.4$ 付近 と $y=109.9$ 付近の山の高さ

$y=503.4$ 付近の山は $y=109.9$ 付近の山よりも高い。何故ならば、 $4 \cdot 4 \cdot 1 \sim 4 \cdot 4 \cdot 3$ は山についても成立するからである。

$4 \cdot 4 \cdot 3$ と $4 \cdot 4 \cdot 4$ より、 $y = 501 \sim 506$ の振幅は $y = 108 \sim 113$ の振幅よりも大きいとの結論が得られる。このことはより一般的に次のように記述できる。

法則 4・4・5

x, y を実数、関数 $u_s(x, y)$ を次のようであるとする。

$$u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) \quad (2.4s)$$

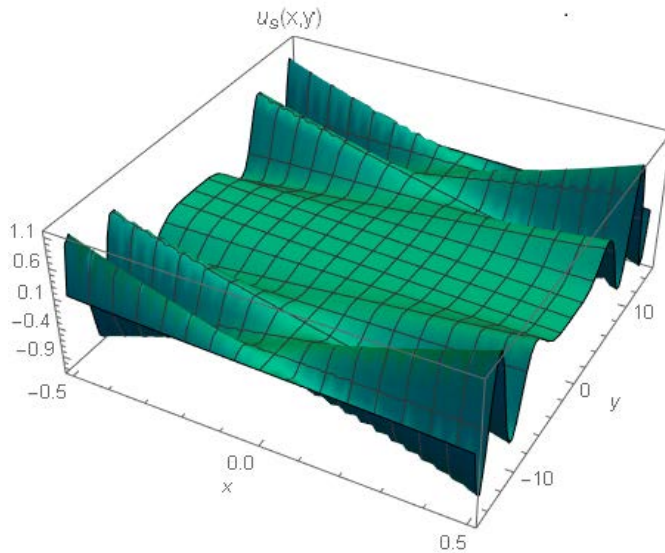
すると、 x が与えられたとき、 $u_s(x, y)$ の振幅は概して y の絶対値に比例する。

Note

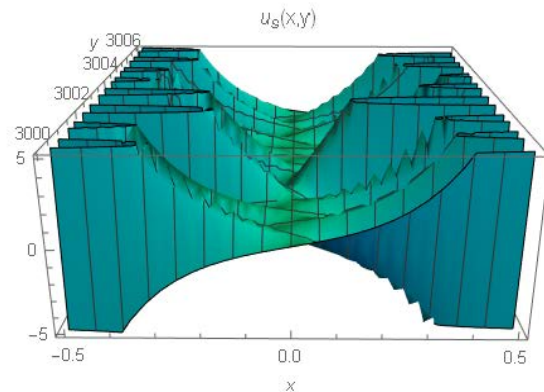
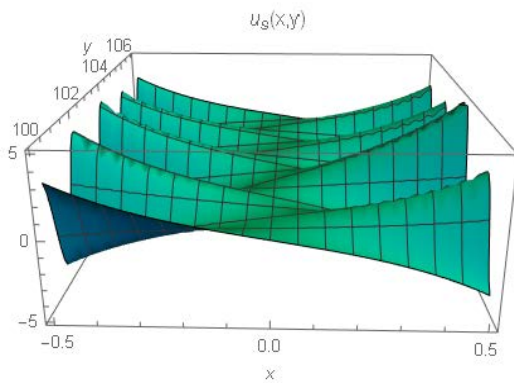
これは定理として成立しないが法則としては成立する。前章で述べたとおり、それは波長 λ の等高線の勾配 y/n の変化と等高線のシフトに依るからである。この法則は **ベルクマンの法則** (高緯度地方の熊は低緯度地方の熊よりも概して大きい) に似ている。

4・5 $u_s(x, y)$ の形状と性質

(2.4s) より、 $u_s(x, y)$ は x に関して奇関数、 y に関して偶関数あることが分かる。このことは $u_s(x, y)$ が x に関して点対象で y に関して線対照であることを示している。(次図参照。)



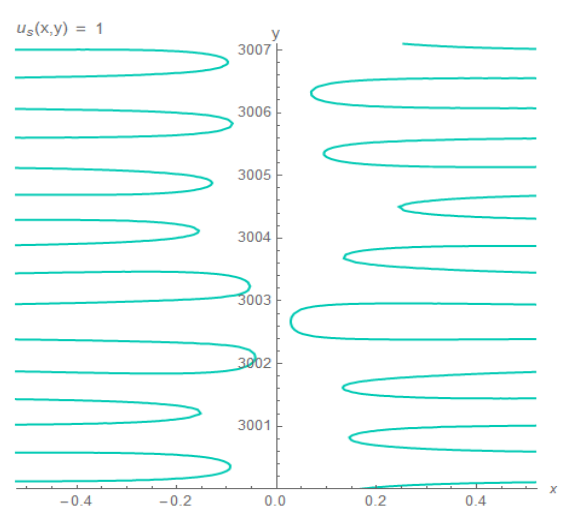
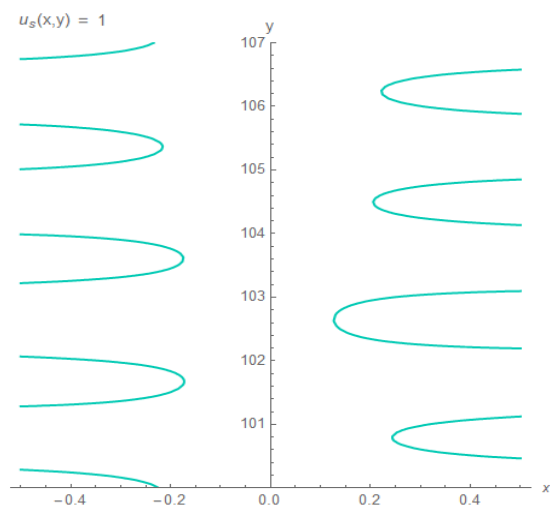
次に、 $-1/2 \leq x \leq 1/2$ について $u_s(x,y)$ の、 $y = 100 \sim 107$ と $y = 3000 \sim 3007$ での3D図を描くとそれぞれ次のようになる。



両図において上方は \cup 、下方は \cap に見えているが、 \cup も \cap も右図が左図よりも概して曲率が大きいことが分かる。これは法則 4・4・5 により右図の方が左図よりも山や谷が険しいことによる。なお、右図の方が左図よりも山や谷が多い(約2倍)が、何故そうなるかは不明である。

4・6 $u_s(x,y)$ の高さ1の等高線

前節の $u_s(x,y)$ の2枚の3D図の高さ1の等高線図を描くとそれぞれ次のようになる。



左図が $y = 100 \sim 107$ で 右図が $y = 3000 \sim 3007$ である。
両図において等高線は \cap と \cup のように見えているが、 \cap も \cup も右図が左図よりも概して y 軸に近いことが分かる。これも 法則 4・4・5 により右図の方が左図よりも山や谷が概して険しいことによる。従って、 $|y|$ が増大するほど 等高線の先端 \cap \cup は両側から y 軸に接近する。

5 $v_c(x,y), u_s(x,y)$ の等高線とその遷移

5・1 $v_c(x,y), u_s(x,y)$ の等高線

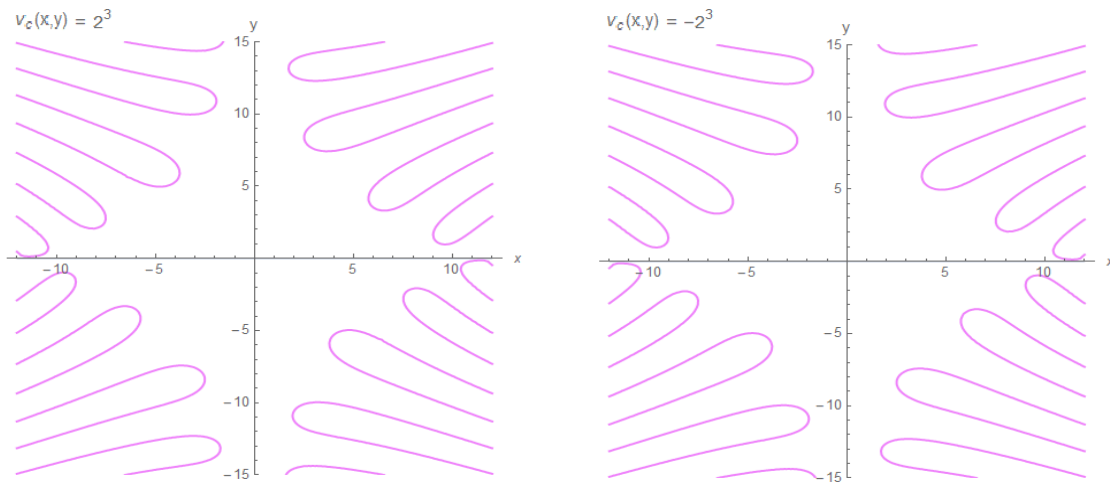
命題 2・4 の関数 $v_c(x,y), u_s(x,y)$ はそれぞれ次のようであった。

$$v_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) \quad (2.4c)$$

$$u_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) \quad (2.4s)$$

5・1・1 $v_c(x,y)$ の高さ ± 8 の等高線

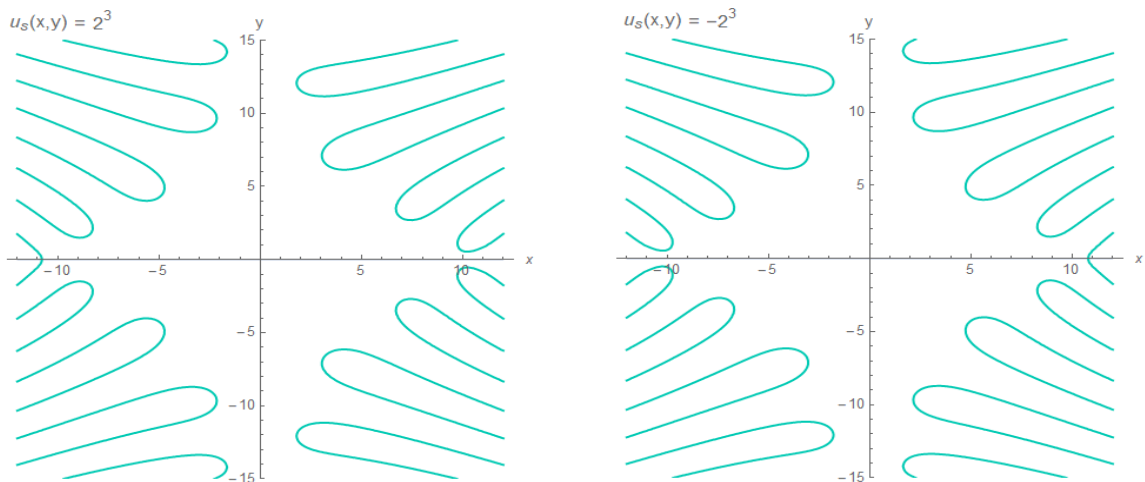
$v_c(x,y)$ の高さ ± 8 の等高線図を描くと次のようになる。左図が $+8$ で右図が -8 である。



$v_c(x,y)$ は x に関しても y に関しても奇関数であるので、左図と右図は y 軸に関しても x 軸に関しても鏡像関係にある。

5・1・2 $u_s(x,y)$ の高さ ± 8 の等高線

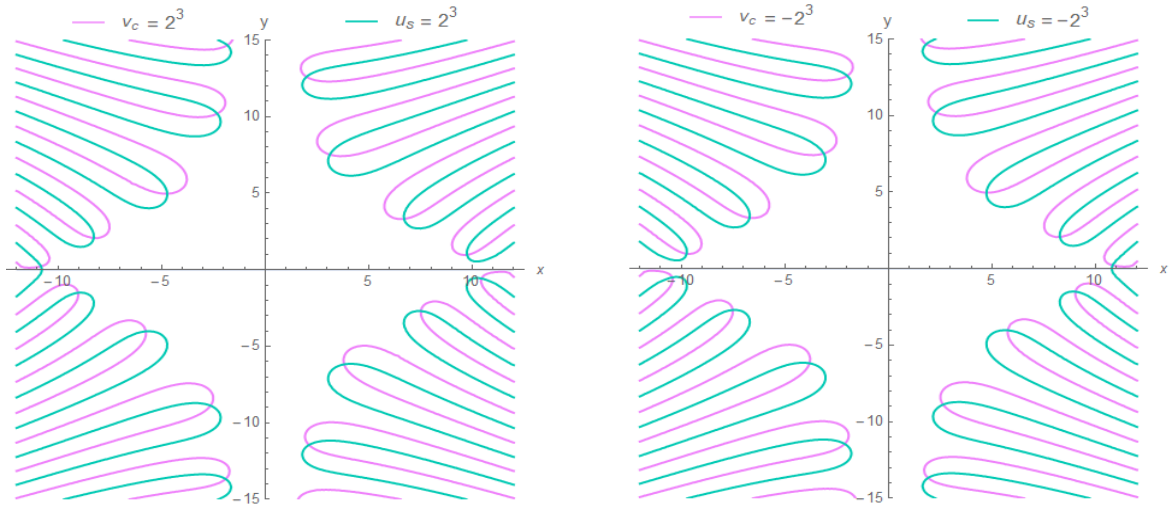
$u_s(x,y)$ の高さ ± 8 の等高線図を描くと次のようになる。左図が $+8$ で右図が -8 である。



$u_s(x,y)$ は x に関して奇関数であるので、左図と右図は y 軸に関して鏡像関係にある。

5・1・3 $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$ の高さ±8 の等高線

5・1・1 と 5・1・2 を重ねて描くと次のようになる。左図が +8 で右図が -8 である。



$v_c(x,y), u_s(x,y)$ は x に関して奇関数であるので、左図と右図は y 軸に関して鏡像関係にある。両図は、平面上での移動や回転では決して重なることが出来ない。

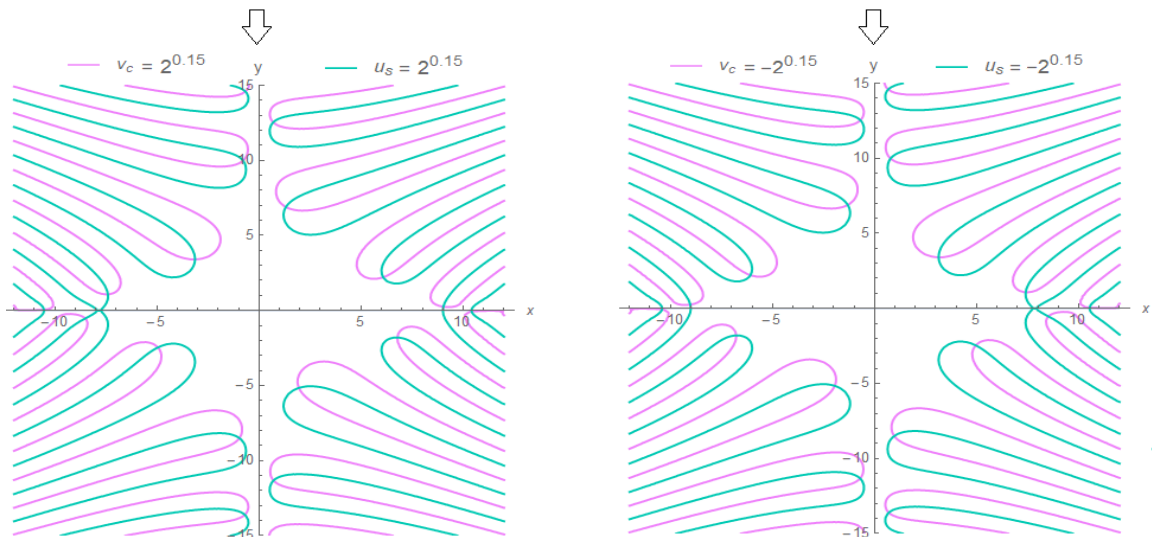
5・2 $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$ の等高線の変遷

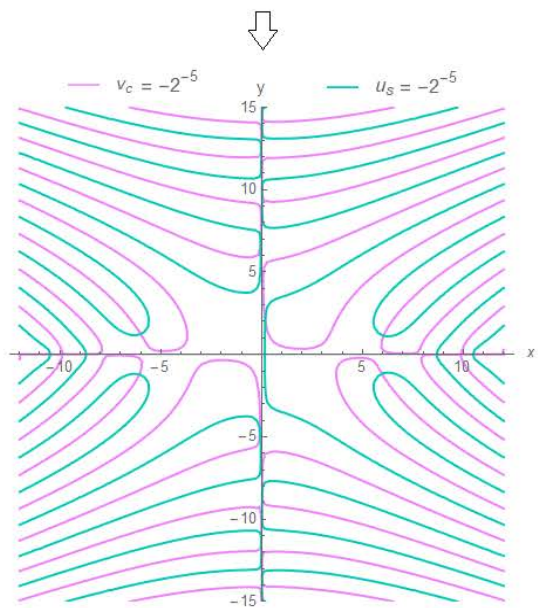
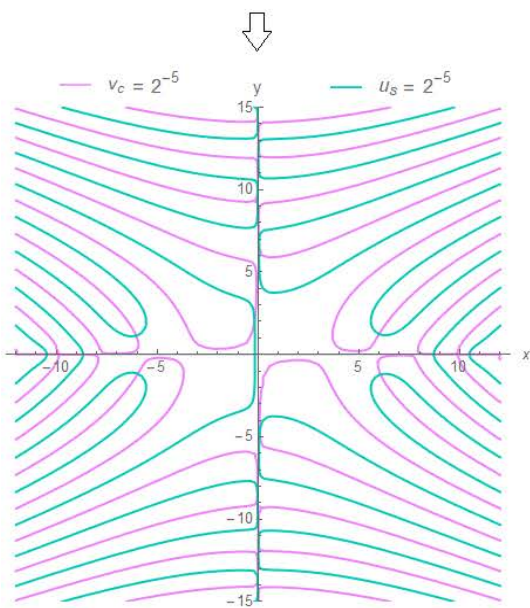
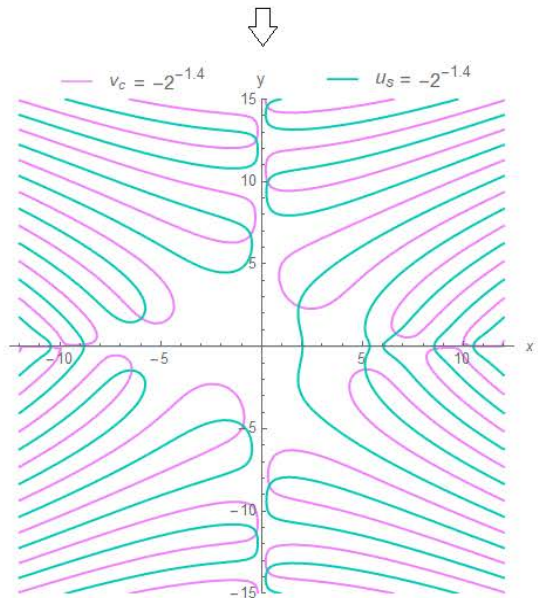
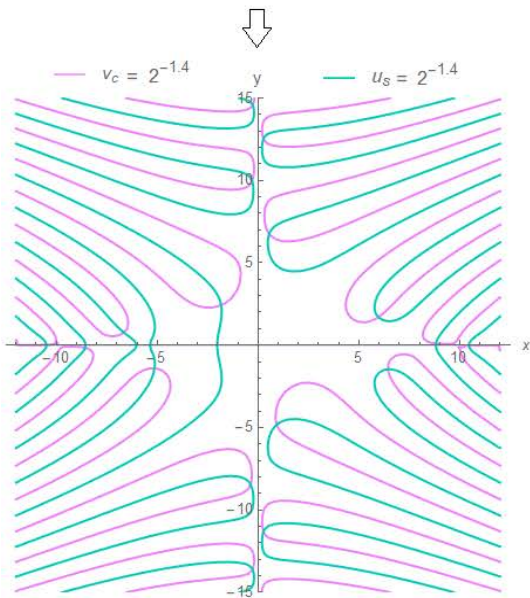
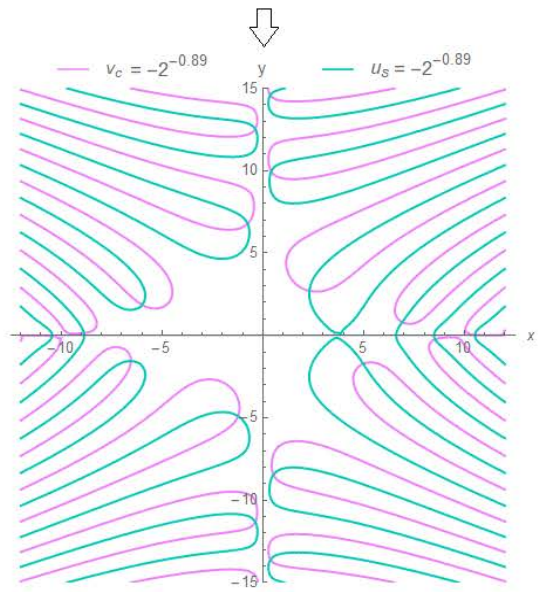
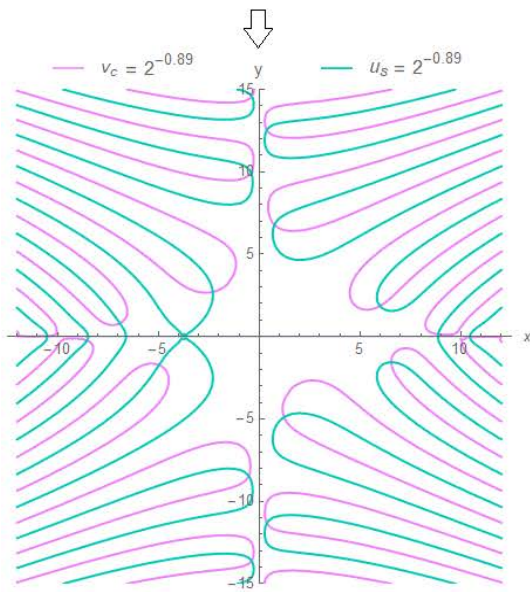
然るに、高さ±0 においては左図と右図は移動も回転も無しに重ならなければならない。そのためには、高さが上下から±0 に近づくにつれて両図の等高線が変形しなければならない。そして高さ±0 において両図は y 軸に関して x 軸に関して線対称にならねばならない。

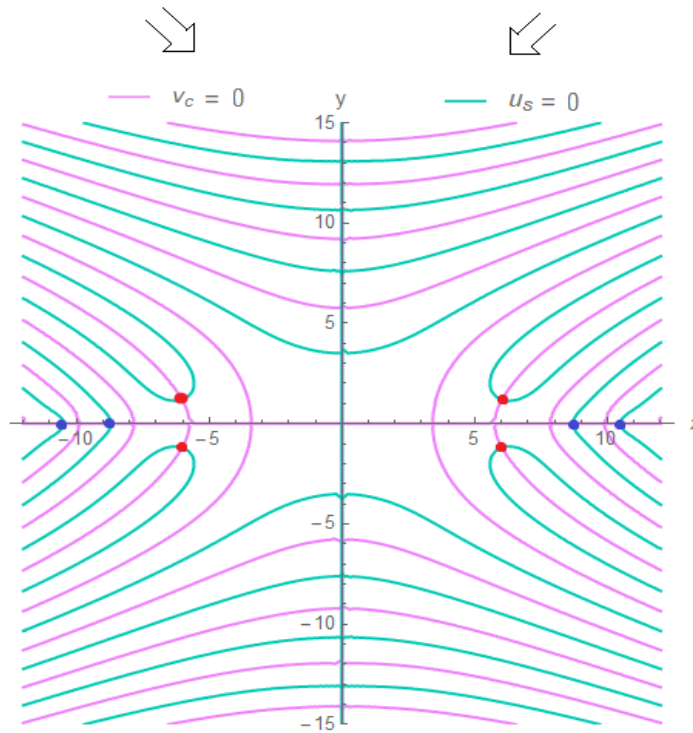
このことは高さ非ゼロでは y 軸に関して互生であった等高線が高さ±0 では対生になるべきことを強要する。このことは x 軸に関して同様である。

かくして、高さ±0 において \cup \cap の右端左端は y 軸に吸収され、 \cup \cap の下端上端は x 軸に吸収されなければならない。

実際、高さを $\pm 2^{0.15}$, $\pm 2^{0.15}$, $\pm 2^{-0.89}$, $\pm 2^{-1.4}$, $\pm 2^{-5}$ と変化させれば、上図は以下のように変形する。





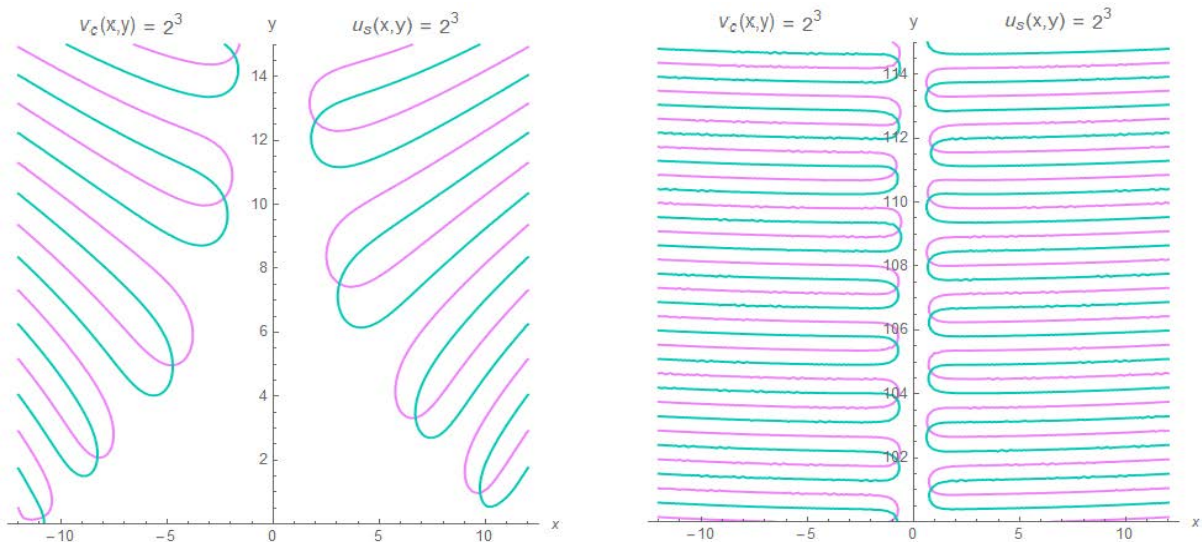


$v_c = u_s = \pm 1$ から $v_c = u_s = \pm 0$ までのアニメーションは、[ここをクリック](#) AnimZ5219.gif

理論どおり、 y 軸および x 軸に関して非線対称な等高線の部分は両軸に吸収された。結果、

- (1) $v_c = u_s = 0$ の自明な解 $(\pm 8.69593, 0)$, $(\pm 10.4734, 0)$, ... (青点) が x 軸上に無数に発生した。これらは $u_c = 0$ を満たさない。
- (2) $v_c = u_s = 0$ の非自明な解 $(\pm 6.01956, \pm 1.19483)$ (赤点) が残った。しかしこれらは臨界領域 $-1/2 < x < 1/2$ になく、しかも $v_s = u_c = 0$ も満たさない。
- (3) (1) と (2) 以外の解 (v_c と u_s の交点) は全て y 軸上に移動した。

以上で図示されたのは $|y| \leq 15$ であるが、 $|y|$ が大きいところではどうなるであろうか？
 例として $y = 0 \sim 15$ と $y = 100 \sim 115$ について v_c と u_s の高さ 8 の等高線を描くと次のようになる。
 左図が $y = 0 \sim 15$ で右図が $y = 100 \sim 115$ である。



□ も ◻ も右図が左図よりも概して y 軸に近いことが観察される。前2章で述べたように、これは法則 3・4・5 と法則 4・4・5 によるものである。

両図は、 $|y|$ が大きいところでは上記 (3) の現象がより顕著になることを示している。即ち、上記 (3) は $|y| > 1.19483\dots$ なる全域で発生する。

かくして、連立方程式 $v_c(x,y) = u_s(x,y) = 0$ は臨界領域 $-1/2 < x < 1/2$ 内では臨界線 $x=0$ 上を除いて解を持たない。

Note

$x=0$ は v_c と u_s が存在しないことと同値である。

6 リーマン予想の証明

本章では、以上を整理・要約して、リーマン予想の証明を行う。

命題 6・1 (リーマン予想)

$\zeta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される関数とする。

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z \log r} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots \quad \text{Re}(z) > 1 \quad (1.\zeta)$$

この関数は、臨界線 $\text{Re}(z) = 1/2$ 上以外では非自明な零点を持たない。

証明

ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z \log r} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (1.\eta)$$

この関数は $\text{Re}(z) \leq 0$ に解析接続され、 $\zeta(z)$ と次の関係がある。

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \eta(z) \quad z \neq 1$$

よって臨界領域 $0 < \text{Re}(z) < 1$ 内において $\zeta(z)$ と $\eta(z)$ の非自明な零点は一致する。

まず、関数等式により、 $\eta(z) = 0$ の解は次の連立方程式の解に一致する。(補題 2・1)

$$\begin{cases} \eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z \log r} = 0 \\ \eta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1-z) \log r} = 0 \end{cases} \quad 0 < \text{Re}(z) < 1$$

次に平行移動により、 $\eta(1/2+z) = 0$ の解は次の連立方程式の解に一致する。(補題 2・1')

$$\begin{cases} \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{-z \log r} = 0 \\ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{z \log r} = 0 \end{cases} \quad -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}$$

次に、加減操作により、 $\eta(1/2+z) = 0$ の解は次の連立方程式の解に一致する。(補題 2・2)

$$\begin{cases} \eta_c(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(z \log r) = 0 \\ \eta_s(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(z \log r) = 0 \end{cases} \quad -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}$$

最後に、これらを実部・虚部別に表して、次の定理が得られる。

定理 2・3 (再掲)

実数の集合を R とし、ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z = x+iy$, $x, y \in R$) とするとき、 $-1/2 < x < 1/2$ において $\eta(1/2+z) = 0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x \log r) \cos(y \log r) = 0 \\ v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) = 0 \\ u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) = 0 \\ v_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x \log r) \sin(y \log r) = 0 \end{array} \right.$$

この定理によれば、これらのうちの任意の2式からなる連立方程式が臨界線を除く臨界領域内で解を持たないならばリーマン仮説が成立することになる。そこでリーマン仮説と同値な次の命題が提示できる。

命題 2・4 (再掲)

y は実数、 x は $-1/2 < x < 1/2$ なる実数とすると、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_c(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \sin(y \log r) = 0 \quad (2.4c) \\ u_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x \log r) \cos(y \log r) = 0 \quad (2.4s) \end{array} \right.$$

3・1 から 5・2 まで主として図により証明したように、この連立方程式は非自明な解としては $(\pm 6.01956, \pm 1.19483)$ の1組4個しか持たない。つまり、この連立方程式は臨界線 $x=0$ を除く臨界領域 $-1/2 < x < 1/2$ 内では解を持たない。

かくて命題 2・4 の図的証明がなされたので、定理 2・3 により、リーマン仮説は成立する。

Q.E.D.

補遺

本論で中心となった2つの関数 $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$ はディリクレ・イータ関数 $\eta(x,y)$ を用いて次式で表された。

$$v_c(x,y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (2.4c')$$

$$u_s(x,y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \eta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (2.4s')$$

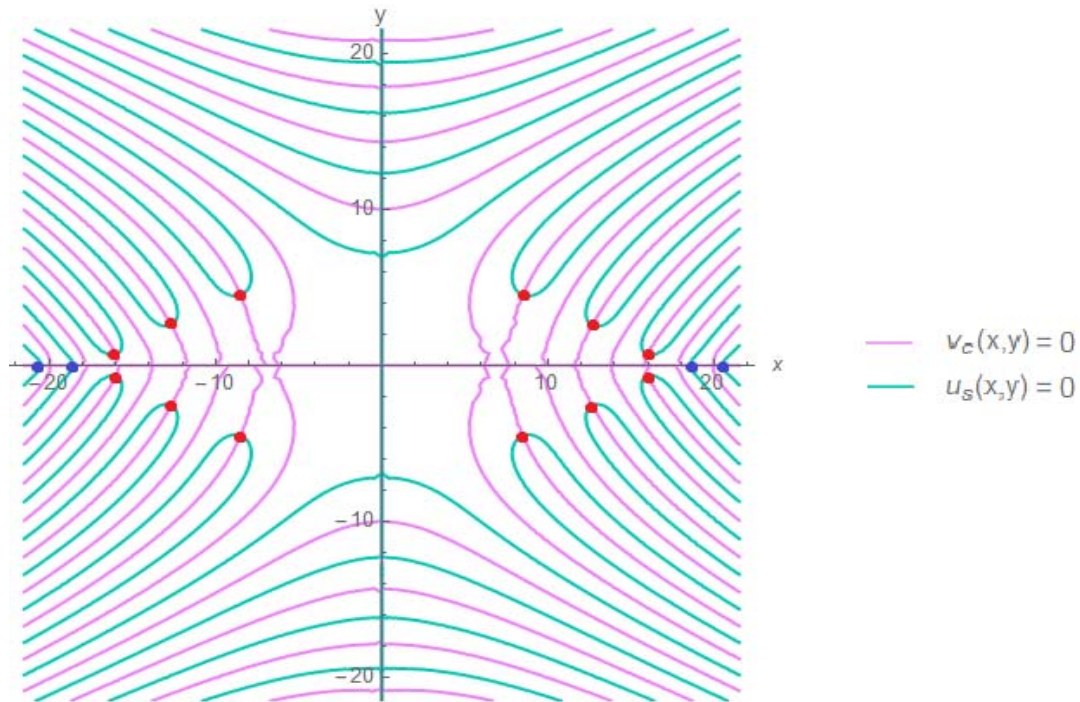
1 $\zeta(x,y)$ の場合

本論の議論は、これらの式中の関数をリーマン・ゼータ関数 $\zeta(x,y)$ に置換しても成り立つ。即ち、

$$v_c(x,y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \left\{ \zeta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \zeta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (\zeta.c')$$

$$u_s(x,y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \zeta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \zeta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (\zeta.s')$$

これらを用いて $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$ の高さ0の等高線を描いたところ、次のようになった。



青点は自明な解であり、これらは $(\pm 18.5678, 0)$, $(\pm 20.4924, 0)$, ... と x 軸上に無数に存在する。

赤点は $v_c = u_s = 0$ の非自明な解で $(\pm 8.49059, \pm 4.51058)$, $(\pm 12.6627, \pm 2.58053)$, $(\pm 15.9781, \pm 0.679408)$ の3組12個存在する。これらは双曲線と放物線の境界付近、即ち、原点の周辺に存在する。従って、この12個以外に非自明な解は存在しない。これらは臨界領域外であるから、リーマン予想は成立することになる。

2 $\beta(x,y)$ の場合

本論の議論は、(2.4c'), (2.4s') 中の関数をディリクレ・ベータ関数 $\beta(x,y)$ に置換しても成り立つ。即ち、

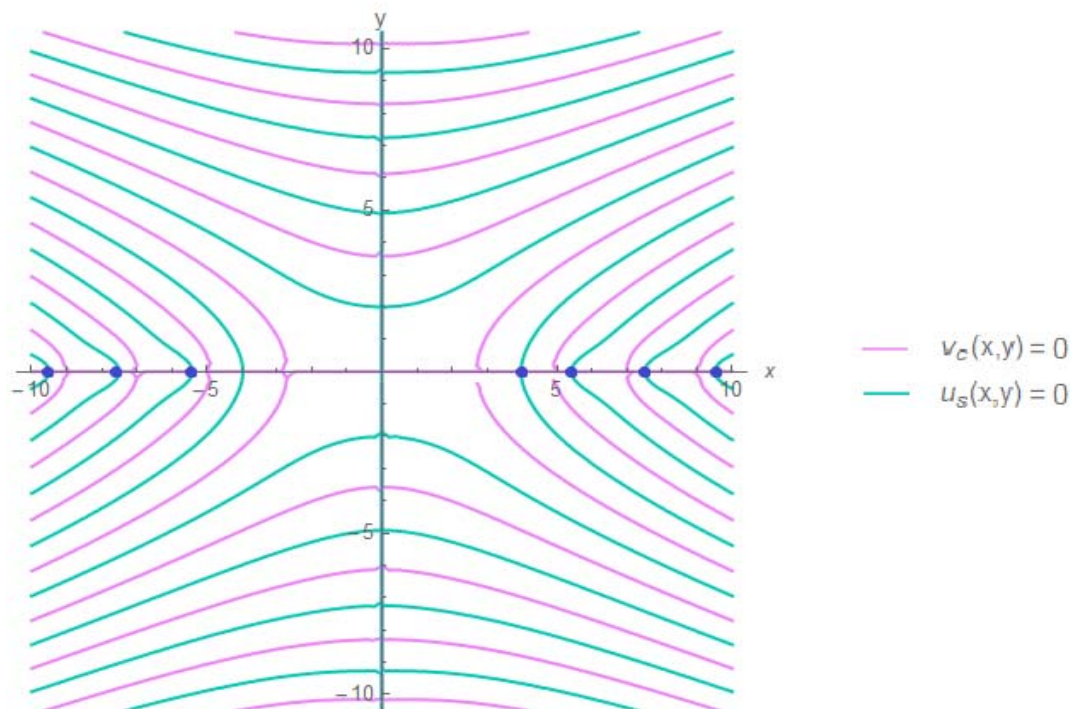
$$v_c(x,y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \left\{ \beta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \beta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (\beta.c')$$

$$u_s(x,y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \beta \left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \beta \left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right] \quad (\beta.s')$$

但し、

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z \log(2r+1)} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + \dots \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

これらを用いて $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$ の高さ 0 の等高線を描いたところ、次のようになった。



青点は自明な解であり、これらは $(\pm 3.970898, 0)$, $(\pm 5.410623, 0)$, \dots と x 軸上に無数に存在する。

双曲線と放物線の境界付近に $v_c = u_s = 0$ の非自明な解は存在しない。それらは y 軸の周囲にも存在しない。よって、ディリクレ・ベータ関数についてもリーマン予想は成立することになる。

2023.07.26

2023.08.22 Updated

河野 和
広島市

宇宙人の数学