リーマン予想の解析的証明

要　旨

(1) リーマンゼータ関数の零点を求める問題は、関数等式により、2つの実変数を持つ4式から成る連立超越方程式に帰着する。
(2) 臨界線上では、ある2式は恒等的に0になり、残りの2式が連立解を持つ。
(3) 臨界線外では、ある2式は臨界領域内で連立解を持たない。このことはこれらの式の原始関数を媒介することによって解析的に証明できる。
(4) (3)の結果、(1)の連立超越方程式は臨界線を除く臨界領域内で解を持たない。 かくしてリーマン予想は成立する。

1 序　論

リーマゼータ関数

リーマゼータ関数 $\zeta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z) > 1 \qquad (1.\zeta)$$

この関数は $Re(z) < 1$ に解析接続され、自明な零点 $z = -2n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と**非自明な零点** $z = 1/2 \pm b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を持つ。そして、非自明な零点はこれ以外には存在しないであろうと言うのがリーマン仮説である。なお、非自明な零点は **臨界領域 $0 < Re(z) < 1$** 内にのみ存在することが知られている。また、その中心線 **$Re(z) = 1/2$** は**臨界線** と呼ばれている。

ディリクレイータ関数

ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+-\cdots \qquad Re(z) > 0 \qquad (1.\eta)$$

この級数は $0 < Re(z) \le 1$ のとき条件収束することが知られている。

この関数は $Re(z) \le 0$ に解析接続され、$\zeta(z)$ と次の関係がある。

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}}\eta(z) \qquad z\neq 1$$

それ故、 $\zeta(z)$ と $\eta(z)$ は自明な零点と非自明な零点を共有する。加えて $\eta(z)$ には **$\eta(z)$ 固有の零点 $z = 1\pm 2n\pi/\log 2$ $(n=1,2,3,\cdots)$** が存在する。これらは $1-2^{1-z}=0$ の零点である。

使用するディリクレ級数

$(1.\zeta)$ や $(1.\eta)$ の右辺はディリクレ級数と呼ばれている。$\zeta(z)$ の定義式 $(1.\zeta)$ は臨界領域内の解析には不適である。それはオイラー変換などを施しても漸近展開にしかならないからである。これに対して $\eta(z)$ の定義式 $(1.\eta)$ はそのまま臨界領域内で使用できる。よって本稿では、$(1.\eta)$ を用いてリーマゼータ関数 $\zeta(z)$ の零点を解析する。

2 $\eta(z)$ の零点と連立方程式

本章では、ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ の零点を求める問題を連立方程式の観点から考察する。

補題 2･1

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$0<x<1$ において $\eta(z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log r} = 0 & (2.1_+) \\ \eta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-(1-z)\log r} = 0 & (2.1_-) \end{cases}$$

証明

ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ については次の関数等式が成立する。

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}}\left(1-2^{z}\right)\eta(z)=\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\left(1-2^{1-z}\right)\eta(1-z) \qquad 0<Re(z)<1$$

ここで、ガンマ関数及び π のベキ関数は零点を持たず、$1-2^{z}$, $1-2^{1-z}$ は $0<Re(z)<1$ では零点を持たない。従って $\eta(z)$ の零点においては、

$$\eta(z)=\eta(1-z)=0 \qquad 0<Re(z)<1$$

$\eta(z)$, $\eta(1-z)$ をそれぞれディリクレ級数で表示して与式を得る。

***Note* 1**

この補題においては1個の複素変数に対し2個の方程式があるから、この連立方程式は過剰決定系である。このような連立方程式は一般的には解を持たない。この過剰決定系を強いているのは明らかに関数等式である。

***Note* 2**

(1) $x=1/2$ のとき、この過剰決定の特性は消失する。何故ならば、

$$\begin{cases} \eta(1/2+iy) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-(1/2+iy)\log r} = 0 & (2.1_+) \\ \eta(1/2-iy) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-(1/2-iy)\log r} = 0 & (2.1_-) \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \eta(1/2+iy) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\{\cos(y\log r) - i\sin(y\log r)\} = 0 & (2.1_+) \\ \eta(1/2-iy) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\{\cos(y\log r) + i\sin(y\log r)\} = 0 & (2.1_-) \end{cases}$$

零点 $(1/2\ ,y)$ においては

$$-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sin(y\log r)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sin(y\log r)=0$$

であるから、(2.1_+) と (2.1_-) は実質的に同一の式になる。

(2) $x \neq 1/2$ のとき、この連立方程式は過剰決定系である。

(2.1+) と (2.1-) は異なる式であるのに、1つの複素数解を共有しなければならない。そのようなことはないであろう と言うのが リーマン予想である。

補題 2･1 において z を $1/2+z$ に置換すればこれと同値な次の補題を得る。

補題 2･1'

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \eta\left(\dfrac{1}{2}+z\right) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}e^{-z\log r} = 0 & (2.1'_{+}) \\ \eta\left(\dfrac{1}{2}-z\right) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}e^{z\log r} = 0 & (2.1'_{-}) \end{cases}$$

Note

(1) 既知の非自明零点は新しい臨界線 $Re(z)=0$ 上に平行移動される。

(2) これらの級数は $-1/2<x<1/2$ において条件収束する。

(3) $x=0$ のとき、この過剰決定の特性は消失する。

(4) $x\neq 0$ のとき、零点が存在するとすれば、その1組は次の4個からなる。

$$a\pm ib\ ,\quad -a\pm ib \qquad (-1/2<a<1/2)$$

双曲線関数項級数

補題 2･1' は次と同値である。

補題 2･2

実数の集合を R とし、ディリクレ･イータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \eta_c(z) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(z\log r) = 0 & (2.2c) \\ \eta_s(z) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(z\log r) = 0 & (2.2s) \end{cases}$$

証明

(2.1'-) , (2.1'+) より

$$\frac{1}{2}\left\{\eta\left(\frac{1}{2}-z\right)+\eta\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\frac{e^{z\log r}+e^{-z\log r}}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(z\log r) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left\{\eta\left(\frac{1}{2}-z\right)-\eta\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\frac{e^{z\log r}-e^{-z\log r}}{2}$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh\{z\log r\} = 0$$

これらをそれぞれ $\eta_c(z), \eta_s(z)$ と記述して与式を得る。
逆にこれらを加減すれば (2.1'₋) , (2.1'₊) が得られる。

双曲線関数項級数 (実部虚部別)

定理 2･3

実数の集合を R とし、ディリクレ･イータ関数を $\eta(z)$ ($z=x+iy$, $x,y\in R$) とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} u_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \\ u_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \end{cases}$$

証明

$$\cosh(x+iy) = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$$
$$\sinh(x+iy) = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$$

であるから、x を $x\log r$ に y を $y\log r$ にそれぞれ置換すると

$$\cosh(z\log r) = \cosh(x\log r)\cos(y\log r) + i\sinh(x\log r)\sin(y\log r)$$
$$\sinh(z\log r) = \sinh(x\log r)\cos(y\log r) + i\cosh(x\log r)\sin(y\log r)$$

これらを補題 2･2の (2.2c) , (2.2s) にそれぞれ代入すると

$$\eta_c(z) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(z\log r)$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\{\cosh(x\log r)\cos(y\log r) + i\sinh(x\log r)\sin(y\log r)\}$$
$$\eta_s(z) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(z\log r)$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\{\sinh(x\log r)\cos(y\log r) + i\cosh(x\log r)\sin(y\log r)\}$$

実部と虚部をそれぞれ $u_c(x,y)$, $v_c(x,y)$, $u_s(x,y)$, $v_s(x,y)$ と記述して与式を得る。

過剰決定系

定理 2･3 においては2個の実変数に対して4個の式があるから、この連立方程式は過剰決定系である。このような連立方程式は一般的には解を持たない。

臨界線上の零点

しかしながら、この連立方程式が例外的に解を持つ場合がある。それは $x=0$ の場合である。$x=0$ は 関数 $\eta(1/2+z)$ の臨界線である。定理2･3 の各式に $x=0$ を代入すれば

$$\begin{cases} u_c(0,y) = 1\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cos(y\log r) = 0 \\ v_c(0,y) = 0\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sin(y\log r) = 0 \\ u_s(0,y) = 0\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cos(y\log r) = 0 \\ v_s(0,y) = 1\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sin(y\log r) = 0 \end{cases}$$

$v_c(0,y)$, $u_s(0,y)$ は存在しないことに等しいから、過剰決定性は消失する。その結果、

$$0 = u_c(0,y) - i\,v_s(0,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\{\cos(y\log r) - i\sin(y\log r)\}$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\{\cos(y\log r) + i\sin(y\log r)\}$$

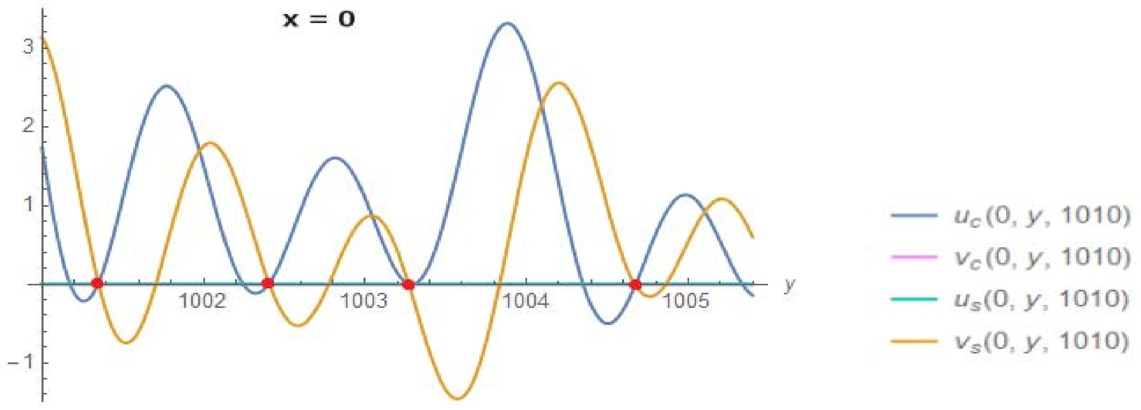
i.e.

$$0 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}e^{-y\log r} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}e^{y\log r}$$

即ち 補題 2･1' における $x=0$ の場合に帰着する。これらの解は臨界線上の零点である。

リーマンゼータ関数の非自明な零点は臨界領域(本稿では $-1/2 < x < 1/2$)の非常に大きな y の値まで存在しないことが知られている。そこで、以下の諸例では、 y=1001~1005.4 が使用される。

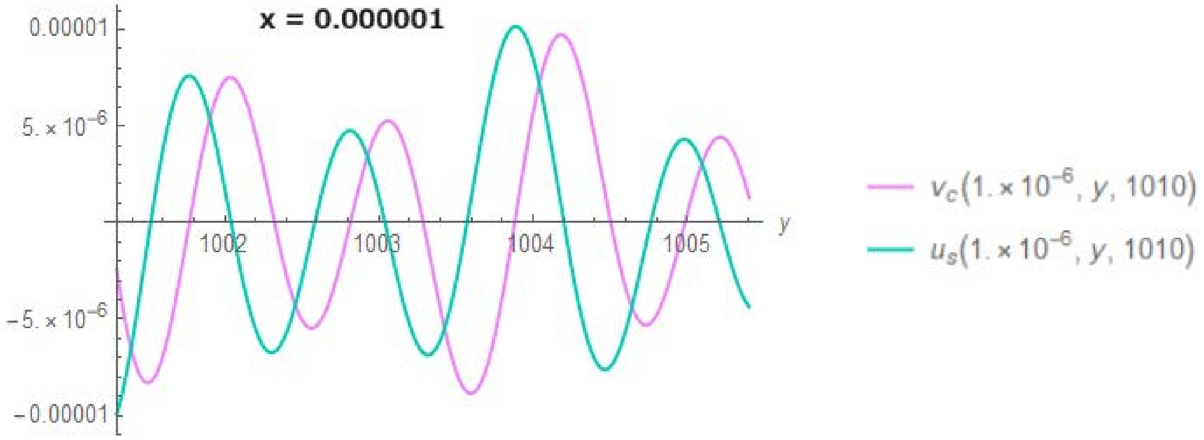
$x=0$ のとき、$u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。青は u_c、橙は v_s で、これらが y 軸上で交わる



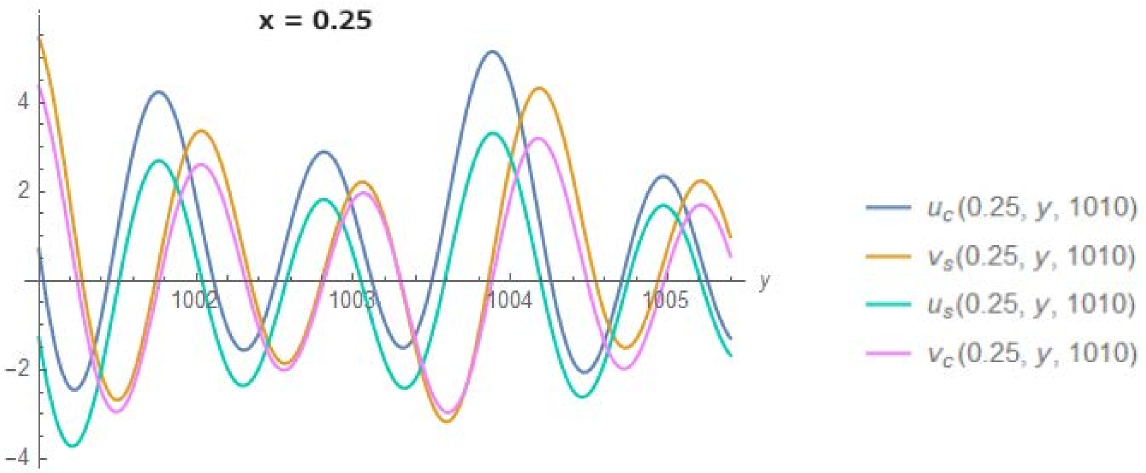
点(赤点)が $\eta(1/2\pm z)$ の零点である。シアンは v_c、マゼンタは u_s であるが、これらは y 軸に重なっている。勿論この2直線も赤点を通過している。

臨界線外

x がほんの僅かでも 0 から外れれば v_c, u_s は直線ではなくなる。例えば $x=0.000001$ のとき

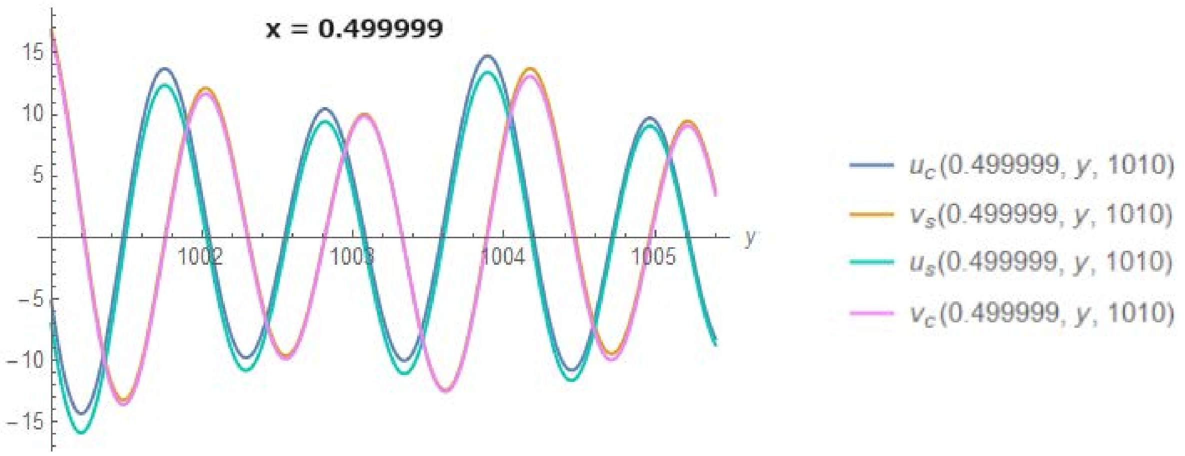


この結果、過剰決定性は回復する。例えば $x=0.25$ のとき $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。



v_c, u_s の振幅は拡大しており、4曲線が y 軸上の1点で交わることなどありそうには見えない。

$x=0.499999$ (臨界領域の境界付近)のとき $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。



u_c (青)と u_s (シアン)は山・谷が殆ど一致し、v_c (マゼンタ)と v_s (黄色)は関数自体がほぼ一致している。これらは x の増加に伴い $cosh(x\,log\,r)$ と $sinh(x\,log\,r)$ の差が減少することに起因する。

Note

$x \geq 0.5$ のとき、y が非常に大きい区間においては、次のようになる。

$$u_c(x,y) \approx u_s(x,y) \quad , \quad v_s(x,y) \approx v_c(x,y)$$

このような描画は 定理 2･3 のような級数では不可能であるが、次式に従って 数式処理ソフト *Mathematica* の $\eta(z)$ 計算ルーチンを利用すれば可能である。

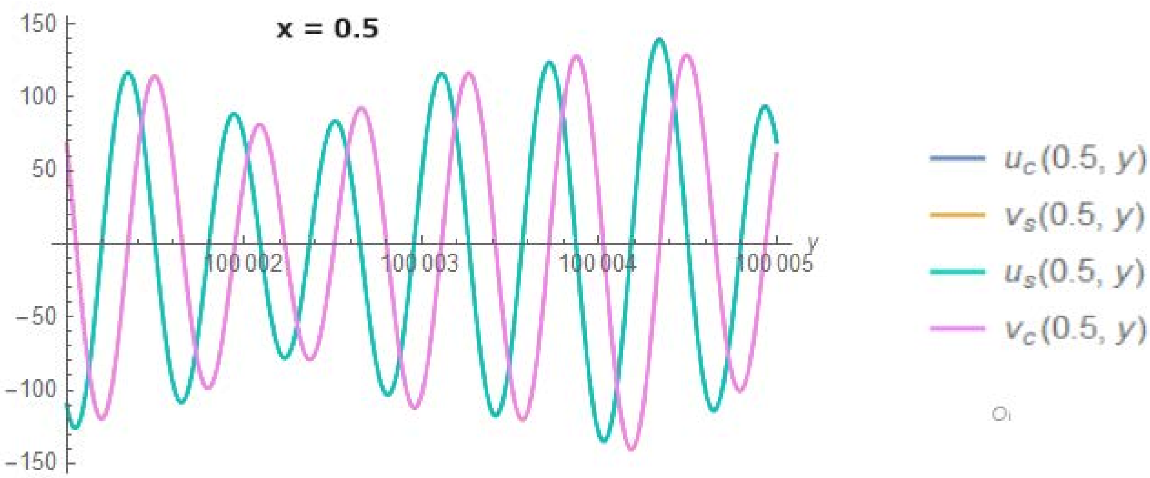
$$u_c(x,y) = \frac{1}{2}\left[Re\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} + Re\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right]$$

$$v_c(x,y) = \frac{1}{2}\left[Im\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} + Im\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right]$$

$$u_s(x,y) = \frac{1}{2}\left[Re\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} - Re\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right]$$

$$v_s(x,y) = \frac{1}{2}\left[Im\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} - x - iy \right) \right\} - Im\left\{ \eta\left(\frac{1}{2} + x + iy \right) \right\} \right]$$

$x=0.5$, $y=100001 \sim 100005$ のとき $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。



u_c と u_s はぴったり重なり、v_s と v_c もぴったり重なっている。結果、u_s (シアン)と v_c (マゼンタ)しか見えていない。

3 ある連立方程式に関する補題

定理 2･3 は次の6つのペアが共通解を持つことと同値である。各ペアは $\eta(1/2+z)$ が零点を持つための必要条件の1つである。

$$\begin{cases} u_c = 0 \\ v_c = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} u_c = 0 \\ u_s = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} u_c = 0 \\ v_s = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} v_c = 0 \\ u_s = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} v_c = 0 \\ v_s = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} u_s = 0 \\ v_s = 0 \end{cases}$$

従って、リーマン仮説を証明するには、これらの何れか1ペアが $x\neq 0$ なる解を持たないことを示せば良い。

これらの中でも特に興味深いのは $v_c=0$ と $u_s=0$ のペアである。その理由は次のとおり。

(1) $x=0$ のとき 任意の y について $v_c=u_s=0$ となる。

(2) v_c と u_s の級数は 振幅に影響の大きい係数部分 $\sinh(x\log r)/\sqrt{r}$ を共有する。

(3) v_c と u_s の級数は 初項 $(r=1)$ が 0 である。

特に(3)より、v_c と u_s の級数の初項を $r=1$ から $r=2$ に変更できる。即ち、

$$v_c(x,y) = \sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\sin(y\log r) \tag{3.1c}$$

$$u_s(x,y) = \sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\cos(y\log r) \tag{3.1s}$$

この結果、これら両式について次の補題を証明することができる。

補題 3･1

y は実数、x は $-1/2<x<1/2$ なる実数とするとき、次の連立方程式は $x\neq 0$ なる解を持たない。

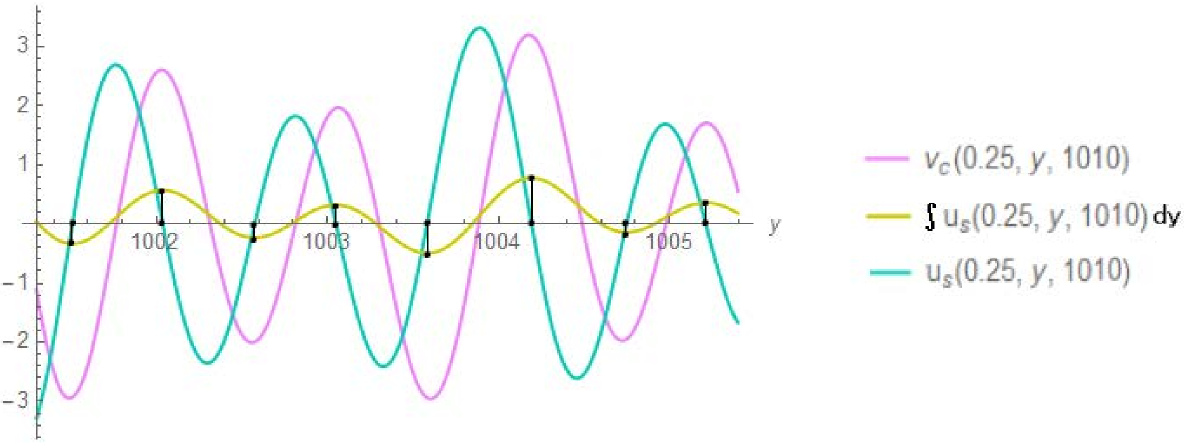
$$\begin{cases} v_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 & (3.1c) \\ u_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 & (3.1s) \end{cases}$$

証明

1. (3.1s) の級数は初項が $r=2$ であるので、x,y のいづれに関しても項別積分が可能である。
そこでこれを y に関して 0 から y まで項別積分すれば 次のようになる。

$$\int u_s(x,y)\,dy = \sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}\,\log r}\sinh(x\log r)\sin(y\log r) \tag{3.1sy}$$

$x=0.25$, $y=1001.3\sim1005.4$ のとき、(3.1c) , (3.1s) , (3.1sy) の2D図は次頁のようになる。
マゼンタが $v_c(0.25,y)$ で黄色が $\int u_s(0.25,y)dy$ でシアンが $u_s(0.25,y)$ である。



$v_c(0.25,y)$（マゼンタ）と $\int u_s(0.25,y)dy$（黄色）の山・谷の y 座標はほぼ一致している。
例えば、$v_c(0.25,y)$ と $\int u_s(0.25,y)dy$ の最初の谷はそれぞれ y=1001.49 , y=1001.51 で、その差は 0.02 と小さい。これは両者の各項が共に $sin(y\log r)$ であることに起因する。

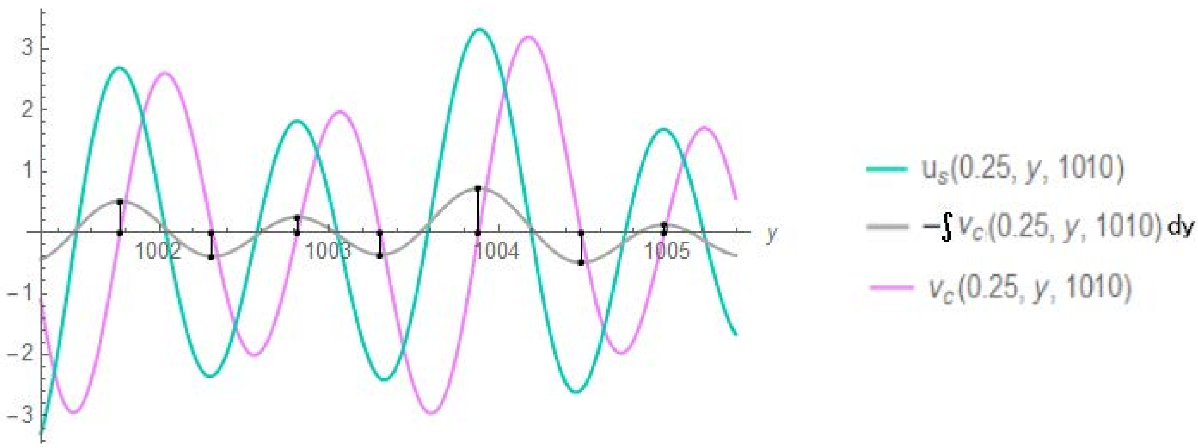
$\int u_s(0.25,y)dy$（黄色）の山・谷の y 座標と $u_s(0.25,y)$（シアン）の零点は正確に一致している。これは後者が前者の y に関する導関数であることから当然である。

かくして、$v_c(0.25,y)$（マゼンタ）の山・谷の y 座標と $u_s(0.25,y)$（シアン）の零点はほぼ一致する。このことは任意の $-1/2 < x < 1/2\ , x \neq 0$ についても成立する。

2. (3.1c) の級数は初項が $r=2$ であるので、x,y のいずれに関しても項別積分が可能である。
そこでこれを y に関して 0 から y まで項別積分すれば 次のようになる。

$$\int v_c(x,y)\,dy = -\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}\ \log r} \sinh(x\log r)\,\cos(y\log r) \tag{3.1cy}$$

x=0.25 , y=1001.3~1005.4 とすれば、(3.1c) , (3.1s) , (3.1cy) の2D図は次のようになる。
マゼンタが $v_c(0.25,y)$ で灰色が $-\int v_c(0.25,y)dy$ でシアンが $u_s(0.25,y)$ である。



$u_s(0.25,y)$（シアン）と $-\int v_c(0.25,y)dy$（灰色）の山・谷の y 座標はほぼ一致している。
例えば、$u_s(0.25,y)$ と $-\int v_c(0.25,y)dy$ の最後の山はそれぞれ y=1004.97 , y=1004.98 で、その差は 0.01 と小さい。これは両者の各項が共に $cos(y\log r)$ であることに起因する。

$-\int v_c(0.25,y)dy$（灰色）の山・谷の y 座標と $v_c(0.25,y)$（マゼンタ）の零点は正確に一致している。これは後者が前者の y に関する導関数であることから当然である。

かくして、$u_s(0.25, y)$（シアン）の山・谷の y 座標は $v_c(0.25, y)$（マゼンタ）の零点とほぼ一致する。このことは任意の $-1/2 < x < 1/2$, $x \neq 0$ についても成立する。

3. 1 及び 2 の結果、任意の $-1/2 < x < 1/2$, $x \neq 0$ について、$v_c(x, y)$ の零点と $u_s(x, y)$ の零点は y 軸上に交互にに存在する。即ち、$v_c(x, y)$ と $u_s(x, y)$ は $-1/2 < x < 1/2$, $x \neq 0$ において共通零点を持たない。

Q.E.D.

4 リーマン予想の証明

本章では、以上を整理・要約して、リーマン予想の証明を行う。

定理 4・1（リーマン予想）

$\zeta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される関数とする。

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z)>1 \qquad (1.\zeta)$$

この関数は、臨界線 $Re(z)=1/2$ 上以外では非自明な零点を持たない。

証明

ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+-\cdots \qquad Re(z)>0 \qquad (1.\eta)$$

この関数は $Re(z)\le 0$ に解析接続され、$\zeta(z)$ と次の関係がある。

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}}\eta(z) \qquad z\neq 1$$

よって臨界領域 $0<Re(z)<1$ 内において $\zeta(z)$ と $\eta(z)$ の非自明な零点は一致する。

先ず、関数等式により、$\eta(z)=0$ の解は次の連立方程式の解に一致する。（補題 2・1）

$$\begin{cases} \eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z\log r} = 0 \\ \eta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(1-z)\log r} = 0 \end{cases} \qquad 0<Re(z)<1$$

次に 平行移動により、$\eta(1/2+z)=0$ の解は次の連立方程式の解に一致する。（補題 2・1'）

$$\begin{cases} \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{-z\log r} = 0 \\ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} e^{z\log r} = 0 \end{cases} \qquad -\frac{1}{2}<Re(z)<\frac{1}{2}$$

次に、加減操作により、$\eta(1/2+z)=0$ の解は次の連立方程式の解に一致する。（補題 2・2）

$$\begin{cases} \eta_c(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(z\log r) = 0 \\ \eta_s(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(z\log r) = 0 \end{cases} \qquad -\frac{1}{2}<Re(z)<\frac{1}{2}$$

最後に、これらを 実部・虚部別に表して、次の定理が得られる。

定理 2・3（再掲）

実数の集合を R とし、ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} u_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \\ u_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \end{cases}$$

この定理によれば、これらのうちの任意の2式からなる連立方程式が臨界線を除く臨界領域内で解を持たないならば リーマン仮説が成立することになる。

そこで、$v_c(x,y) = u_s(x,y) = 0$ のペアに着目すると、これらの初項 $(r=1)$ はいづれも 0 である。それ故、、初項の添字を $r=1$ から $r=2$ に変更することができる。

すると、$v_c(x,y)$ 及び $u_s(x,y)$ は y に関して 0 から y まで項別積分できる。 前章ではこのことを利用して、補題3・1 が証明された。

補題 3・1（再掲）

y は実数、x は $-1/2 < x < 1/2$ なる実数とするとき、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} v_c(x,y) = \sum_{r=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 & (3.1c) \\ u_s(x,y) = \sum_{r=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 & (3.1s) \end{cases}$$

かくして、 定理 2・3 により、$\eta(1/2+z)$ は $-1/2 < x < 1/2$ において $x=0$ 以外の零点を持たない。

即ち、ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ は $0 < x < 1$ において $x=1/2$ 以外の零点を持たない。

従って、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ も $0 < x < 1$ において $x=1/2$ 以外の零点を持たない。

Q.E.D.

2024.02.24

河野 和
広島市

宇宙人の数学