李係数によるリーマン予想の証明

要 旨

(1) 李係数は臨界領域の左端において定義できる。そしてこれはxi関数からもアダマール積からも導出可能である。これらをそれぞれoλn , oμn とすれば、当然にoλn = oμn でなければならない。

(2) 李係数は臨界領域の右端においても定義できる。そしてこれもxi 関数とアダマール積の両方から導出可能である。これらをそれぞれıλn , ıμn とすれば、当然に ıλn = ıμn でなければならない。

(3) xi 関数から得られる李係数は、関数等式と定義式により、oλn = ıλn となる。他方、アダマール積から得られる李係数は一般にoμn ≠ ıμn である。しかし xi 関数の零点が臨界線上にある場合には、恒等的に oμn = ıμn となる。この場合、これらは実数の平方和で表される。即ち、李の基準が満たされる。
かくて、xi 関数の零点が臨界線上にある場合、連立方程式体系 oλn = oμn = ıλn = ıμn は完結する。

(4) 臨界線外の零点が存在すると仮定すると、(3) の結果との間に矛盾が生じる。よって、臨界線外の零点は存在せず、リーマン予想は定理として成立する。

1 臨界領域左端での李係数

本章における李係数は臨界領域左端 $z=0$ で定義されるものである。

1･1 xi 関数からの李係数 oλn

本節における李係数は、リーマンxi 関数から得られるものである。

定理 1･1

李係数 ${}_0\lambda_n$ は次の2式で定義されるとする。

$$ {}_0\lambda_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\xi(z)\right]_{z=0} \tag{1.1d}$$

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{0.ξ}$$

すると、${}_0\lambda_n$ は次で表される。

$$ {}_0\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=0} \tag{1.λ}$$

但し、$(a)_k$ はポッホハマー記号、$B_{n,k}\left(f_1,f_2,\ldots\right)$ は Bell 多項式である。

証明

(1) $(1-z)^{n-1}$ の高階導関数

$$\frac{d^1}{dz^1}(1-z)^{n-1} = -(n-1)(1-z)^{n-2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(1-z)^{n-1} = (n-2)(n-1)(1-z)^{n-3}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}(1-z)^{n-1} = -(n-3)(n-2)(n-1)(1-z)^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^s}{dz^s}(1-z)^{n-1} = (-1)^s\{(n-s)\cdots(n-2)(n-1)\}(1-z)^{n-1-s}$$

ポッホハマー記号

$$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$$

を用いると

$$(n-s)_k=(n-s)(n-s+1)\cdots(n-s+k-1)$$

これより

$$(n-s)_s=(n-s)(n-s+1)\cdots(n-1)=(n-s)\ \cdots\ (n-2)(n-1)$$

よって

$$\frac{d^s}{dz^s}(1-z)^{n-1}=(-1)^s(n-s)_s(1-z)^{n-1-s}$$

s を $n-s$ に置換すれば

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}(1-z)^{n-1}=(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1} \tag{1.1}$$

(2) $\boldsymbol{log\ \xi(z)}$ の高階導関数

拙著「22 合成関数の高階微分」22･2･3 によれば、$B_{s,t}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき

$$\{log\, f(x)\}^{(n)}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}(r-1)!\,B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots, f_n)f^{-r} \qquad n\ge 1$$

よって

$$\frac{d^s}{dz^s}log\ \xi(z)=\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t} \qquad s\ge 1 \tag{1.2λ}$$

(3) $\boldsymbol{(1-z)^{n-1}log\ \xi(z)}$ の高階導関数

ライプニッツ則は

$$\{f(z)g(z)\}^{(n)}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}f^{(n-s)}(z)g^{(s)}(z)$$

これに (1.1) と (1.2λ) を代入すればすれば、$n,s\ge 1$ であるから

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}log\ \xi(z)=\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\left\{(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\right\}$$
$$\times\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t} \tag{1.3λ}$$

(4) 李係数 $\boldsymbol{{}_0\lambda_n}$

(1.3λ) を (1.1d) に代入して

$${}_0\lambda_n=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\left\{(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\right\}\right.$$
$$\left.\times\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=0}$$

i.e.

$${}_0\lambda_n=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=0} \tag{1.λ}$$

Q.E.D.

最初の幾つかを書き下すと

$$ {}_0\lambda_1 = \frac{(-1)^1}{0!} \lim_{z\to 0} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} $$

$$ {}_0\lambda_2 = \frac{(-1)^2}{1!} \lim_{z\to 0} \left\{ -\frac{2\xi'(z)}{\xi(z)} - \frac{(1-z)\xi'(z)^2}{\xi(z)^2} + \frac{(1-z)\xi''(z)}{\xi(z)} \right\} $$

$$ {}_0\lambda_3 = \frac{(-1)^3}{2!} \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{6\xi'(z)}{\xi(z)} + \frac{6(1-z)\xi'(z)^2}{\xi(z)^2} + \frac{2(1-z)^2\xi'(z)^3}{\xi(z)^3} - \frac{6(1-z)\xi''(z)}{\xi(z)} - \frac{3(1-z)^2\xi'(z)\xi''(z)}{\xi(z)^2} + \frac{(1-z)^2\xi^{(3)}(z)}{\xi(z)} \right\} $$

$$ \vdots $$

また、数式処理ソフト *Mathematica* を用いてこれらを計算すfると次のようになる。

$$ \mathbf{f[n\_,\ z\_] := (1-z)^{n-1}\ Log[\xi[z]]} $$

$$ \mathbf{\xi[z\_] := -z\ (1-z)\ \pi^{-\frac{z}{2}}\ Gamma\left[\frac{z}{2}\right]\ Zeta[z]} $$

$$ \mathbf{{}_0\lambda_1 := \frac{(-1)^1}{0!}\ Limit[FullSimplify[\partial_z f[1,\ z]],\ z \to 0]} $$

N[$_0\lambda_1$]　**0.02309570896612101`**

$$ \mathbf{{}_0\lambda_2 := \frac{(-1)^2}{1!}\ Limit[FullSimplify[\partial_z \partial_z f[2,\ z]],\ z \to 0]} $$

N[$_0\lambda_2$]　**0.09234573522804657`**

$$ \mathbf{{}_0\lambda_3 := \frac{(-1)^3}{2!}\ Limit[FullSimplify[\partial_z \partial_z \partial_z f[3,\ z]],\ z \to 0]} $$

N[$_0\lambda_3$]　**0.20763892055432498`**

これらの結果は既知の値（OEIS　A074760 , A104539 , A104540）に完全に一致している。

1･2 アダマール積からの李係数 ομn

本節における李係数は、アダマール積から得られるものである。

定理 1･2

李係数 $_0\mu_n$ は次の2式で定義されるとする。

$$ {}_0\mu_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1} \log\, \xi(z) \right]_{z=0} \tag{1.2d} $$

$$ \xi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) \qquad \textit{where, } \rho_k \ \ (k=1,2,3,\cdots) \textit{ are zeros of } \xi(z) \tag{0.\rho} $$

すると、$_0\mu_n$ は次で表される。

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.\mu} $$

証明

(1) $(1-z)^{n-1}$ の高階導関数

これは 1･1 (1) と同じである。即ち、

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}(1-z)^{n-1} = (-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1} \tag{1.1}$$

(2) $\log \xi(z)$ の高階導関数

(0.ρ) の両辺の対数を取ると

$$\log \xi(z) = \log \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{d}{dz}\log \xi(z) = \frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1/\rho_k}{1-z/\rho_k}$$

i.e.

$$\frac{d^1}{dz^1}\log \xi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k - z}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\log \xi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\rho_k - z)^2}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\log \xi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(\rho_k - z)^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^s}{dz^s}\log \xi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k - z)^s} \tag{1.2μ}$$

(3) $(1-z)^{n-1}\log \xi(z)$ の高階微係数 ($z=0$)

(1.1) と (1.2μ) にライプニッツ則を適用すれば

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log \xi(z) = -\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k - z)^s}$$

$(0-1)!$ は不可能なので、最初の Σ の添字の初期値を 0 から 1 に変更し

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log \xi(z) = -\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k - z)^s}$$

更に

$$(s)_{n-s} = s(s+1)\cdots(n-1) = \frac{(n-1)!}{(s-1)!}$$

であるから

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log \xi(z) = -\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(-1)^{n-s}\frac{(n-1)!}{(s-1)!}(1-z)^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k - z)^s}$$

i.e.

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log \xi(z) = -(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(1-z)^{s-1}\frac{(-1)^s}{(\rho_k - z)^s}$$

臨界領域左端 $z=0$ における微係数は

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log \xi(z)\right]_{z=0} = -(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{\rho_k^s}$$

$$= -(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{\rho_k^{\,s}}-1\right)$$

$$= -(-1)^{-n}(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n-1\right)$$

i.e

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\xi(z)\right]_{z=0} = (-1)^{-n}(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.3μ}$$

(4) 李係数 ${}_0\mu_n$

(1.3$_\mu$) を (1.2d) に代入して

$${}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.μ}$$

Q.E.D.

1・3 ${}_0\lambda_1$ と ${}_0\mu_1$

李係数 ${}_0\lambda_n$, ${}_0\mu_n$ において特に $n=1$ のときは次の補題が成り立つ。

補題 1・3

ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ は xi 関数の零点とし、$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ とする。
すると、次が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = 0.0230957\cdots$$

証明

定理 1・2 において 特に $n=1$ のときは、

$${}_0\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}$$

$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ と置けば、

$${}_0\mu_1 = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right)$$

他方、定理 1・1 において 特に $n=1$ のときは、

$${}_0\lambda_1 = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)}$$

${}_0\lambda_1 = {}_0\mu_1$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = 0.0230957\cdots$$

Q.E.D.

Note

拙著「 10 完備化されたリーマン・ゼータの零点と係数 」定理 10・1・2 によれば

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}A_r z^r$$

$$A_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2 + y_{r_1}^2} = -\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_r - iy_r} + \frac{1}{x_r + iy_r} \right)$$

他方、拙著「 09 完備化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数 」定理 9･1･3 によれば、

$$A_1 = \frac{\log \pi}{2} - \gamma_0 - \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) = -0.0230957\cdots$$

であった。これらより、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_r - iy_r} + \frac{1}{x_r + iy_r} \right) = -\frac{\log \pi}{2} + \gamma_0 + \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) = 0.0230957\cdots$$

となる。つまり、

$$\frac{(-1)^1}{0!} \lim_{z \to 0} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = -\frac{\log \pi}{2} + \gamma_0 + \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)$$

更に

$$\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - 2\log 2 - \gamma_0$$

であるから、これを右辺に代入すれば、

$$\frac{(-1)^1}{0!} \lim_{z \to 0} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = -\frac{\log \pi}{2} + \gamma_0 + \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \log 2 - \frac{\log \pi}{2} + \frac{\gamma_0}{2} = 0.0230957\cdots$$

2 臨界領域右端での李係数

本章における李係数は臨界領域右端 $z=1$ で定義されるものである。

2･1 xi 関数からの李係数 ıλn

本節における李係数は、リーマンxi 関数から得られるものである。

定理 2･1

李係数 ${}_1\lambda_n$ は次の2式で定義されるとする。

$$ {}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n} z^{n-1} \log \xi(z)\right]_{z=1} \tag{2.1d}$$

$$ \xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{0.ξ}$$

すると、${}_1\lambda_n$ は次で表される。

$$ {}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=1} \tag{2.λ}$$

但し、$(a)_k$ はポッホハマー記号、$B_{n,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ は Bell 多項式である。

証明

(1) z^{n-1} の高階導関数

$$\frac{d^s}{dz^s} z^{n-1} = \{(n-s)\cdots(n-2)(n-1)\} z^{n-1-s}$$

ポッホハマー記号 $(a)_k$ を用いると

$$\frac{d^s}{dz^s} z^{n-1} = (n-s)_s z^{n-1-s}$$

s を $n-s$ に置換すれば

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}} z^{n-1} = (s)_{n-s} z^{s-1} \tag{2.1}$$

(2) $\log \xi(z)$ の高階導関数

1･1･(2) と同様で、

$$\frac{d^s}{dz^s}\log \xi(z) = \sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t} \qquad s \ge 1 \tag{1.2λ}$$

(3) $z^{n-1}\log \xi(z)$ の高階導関数

ライプニッツ則は

$$\{f(z)g(z)\}^{(n)} = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} f^{(n-s)}(z)g^{(s)}(z)$$

これに (2.1) と (1.2λ) を代入すればすれば、$n,s \ge 1$ であるから

$$\frac{d^n}{dz^n} z^{n-1}\log \xi(z) = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s} z^{s-1}\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t} \tag{2.3λ}$$

(4) 李係数 ${}_1\lambda_n$

(2.3λ) を (2.1d) に代入して

$${}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}z^{s-1}\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=1}$$

i.e.

$${}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=1} \tag{2.λ}$$

Q.E.D.

最初の幾つかを書き下すと

$${}_1\lambda_1 = \frac{1}{0!}\lim_{z\to1}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)}$$

$${}_1\lambda_2 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\left\{\frac{2\xi'(z)}{\xi(z)} - \frac{z\xi'(z)^2}{\xi(z)^2} + \frac{z\xi''(z)}{\xi(z)}\right\}$$

$$\begin{aligned}{}_1\lambda_3 = \frac{1}{2!}\lim_{z\to1}&\left\{\frac{6\xi'(z)}{\xi(z)} - \frac{6z\xi'(z)^2}{\xi(z)^2} + \frac{2z^2\xi'(z)^3}{\xi(z)^3}\right.\\ &\left.+\frac{6z\xi''(z)}{\xi(z)} - \frac{3z^2\xi'(z)\xi''(z)}{\xi(z)^2} + \frac{z^2\xi^{(3)}(z)}{\xi(z)}\right\}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

また、数式処理ソフト *Mathematica* を用いてこの 3 つの例を計算すると、1･1 (4) の結果と完全に一致する。

2･2 アダマール積からの李係数 ${}_1\mu_n$

本節における李係数は、アダマール積から得られるものである。

定理 2･2

李係数 ${}_1\mu_n$ は次の2式で定義されるとする。

$${}_1\mu_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\xi(z)\right]_{z=1} \tag{2.2d}$$

$$\xi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) \qquad \textit{where, } \rho_k \ \left(k=1,2,3,\cdots\right) \textit{ are zeros of } \xi(z) \tag{0.ρ}$$

すると、${}_1\mu_n$ は次で表される。

$${}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) \tag{2.μ}$$

証明

(1) z^{n-1} の高階導関数

これは 2･1 (1) と同じである。即ち、

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}z^{n-1} = (s)_{n-s}z^{s-1} \tag{2.1}$$

(2) $\boldsymbol{log\ \xi(z)}$ の高階導関数

これは 1･2 (2) と同じである。即ち、

$$\frac{d^s}{dz^s}log\ \xi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k - z)^s}$$

但し、本節では $\rho_k - z$ を $z-\rho_k$ に変更した次式を用いる。

$$\frac{d^s}{dz^s}log\ \xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(z-\rho_k)^s} \tag{2.2μ}$$

(3) $\boldsymbol{z^{n-1}log\ \xi(z)}$ の高階微係数 ($\boldsymbol{z=1}$)

(2.1) と (2.2μ) にライプニッツ則を適用すれば

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}log\ \xi(z) = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}z^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(z-\rho_k)^s}$$

$(0-1)!$ は不可能なので、最初の Σ の添字の初期値を 0 から 1 に変更し

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}log\ \xi(z) = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}z^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(z-\rho_k)^s}$$

更に

$$(s)_{n-s} = s(s+1)\cdots(n-1) = \frac{(n-1)!}{(s-1)!}$$

であるから

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}log\ \xi(z) = -(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}z^{s-1}\frac{(-1)^s}{(z-\rho_k)^s}$$

臨界領域右端 $z=1$ における微係数は

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}log\ \xi(z)\right]_{z=1} &= -(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{(1-\rho_k)^s} \\ &= -(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{(1-\rho_k)^s}-1\right) \\ &= -(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n-1\right)\end{aligned}$$

i.e.

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}log\ \xi(z)\right]_{z=1} = (n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n\right) \tag{2.3μ}$$

(4) 李係数 $\boldsymbol{{}_1\mu_n}$

(2.3μ) を (2.2d) に代入して

$${}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n\right)$$

ここで、複素数 ρ_k について

$$\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n = \left(\frac{-\rho_k}{1-\rho_k}\right)^n = \left(\frac{1-\rho_k}{-\rho_k}\right)^{-n} = \left(\frac{\rho_k-1}{\rho_k}\right)^{-n} = \left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}$$

が成立するから、${}_1\mu_n$ は更に次のようになる。

$$ {}_{1}\mu_{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho_k} \right)^{-n} \right) \qquad \left(= {}_{0}\mu_{-n} \right) \tag{2.μ} $$

Q.E.D.

3 両端の李係数が等しい条件

3･1 xi 関数からの李係数 $_0\lambda_n$ と $_1\lambda_n$

定理 1･1 及び 定理 2･1 では、臨界領域の左端及び右端での xi 関数からの李係数 $_0\lambda_n$, $_1\lambda_n$ が得られた。本節での問題は $_0\lambda_n$ と $_1\lambda_n$ が等しいか否かである。 結論から言うと、これらは等しい。以下、これを定理として示す。

定理 3･1

臨界領域両端の李係数 $_0\lambda_n$, $_1\lambda_n$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$_0\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=0} \tag{1.λ}$$

$$_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=1} \tag{2.λ}$$

但し、

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{0.ξ}$$

すると、次式が成立する。

$$_0\lambda_n = {}_1\lambda_n \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.1}$$

証明

(1.λ) と (2.λ) はそれぞれ次のように書き換えできる。

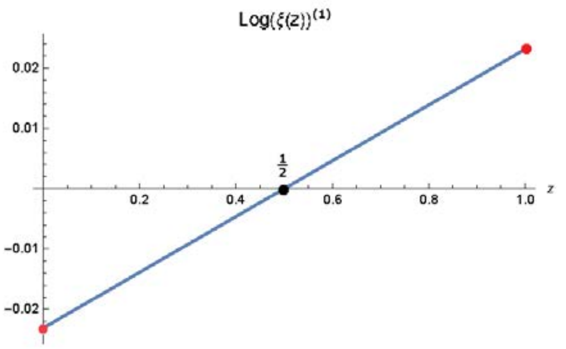
$$_0\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\frac{d^s}{dz^s}\log\,\xi(z)\right]_{z=0}$$

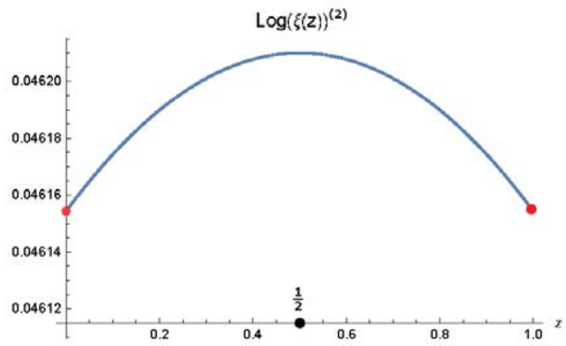
$$_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\frac{d^s}{dz^s}\log\,\xi(z)\right]_{z=1}$$

関数等式 $\xi(z)=\xi(1-z)$ により、$\xi(z)$ は $z=1/2$ に関して線対称である。従って $\log\xi(z)$ もまた $z=1/2$ に関して線対称である。そして $\log\xi(z)$ の高階導関数は次のようになる。

奇数階導関数: $z=1/2$ に関して点対称(例:左図)。

偶数階導関数: $z=1/2$ に関して線対称(例:右図)。





よって $s=0$ および $s=1$ での $\log\xi(z)$ の高階微係数(赤点)について次式が成立する。

$$(-1)^s\left[\frac{d^s}{dz^s}\log\,\xi(z)\right]_{s=0} = \left[\frac{d^s}{dz^s}\log\,\xi(z)\right]_{s=1} \qquad for\ s=1,2,3,\cdots$$

かくして $_0\lambda_n = {}_1\lambda_n$ となる。 つまり、これは関数等式と定義式により無条件に成立する。 Q.E.D.

3･2 アダマール積からの李係数 ₀μn と ₁μn

定理 1･2 及び 定理 2･2 では、臨界領域の左端及び右端でのアダマール積からの李係数 ${}_0\mu_n$, ${}_1\mu_n$ が得られた。本節での問題は ${}_0\mu_n$ と ${}_1\mu_n$ が等しいか否かである。

補題 3･2･1

$\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ は xi 関数の零点とし、$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とする。
すると、次が成立する。

(1) 奇数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-(2n-1)}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

(2) 偶数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

証明

ρ_k の虚部には±が存在するから、ρ_k を仮定のように割り当てる。すると、

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)=\left(1-\frac{1}{x_r-iy_r}\right)+\left(1-\frac{1}{x_r+iy_r}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^{-1}$$

右辺の分母を実数化すれば

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)=\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}-i\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)+\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}+i\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-1}&=\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}-i\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)\\&\quad+\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}+i\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)\end{aligned}$$

これらは煩雑なので、次のように略記する。

$$\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}=A_r \quad , \quad \frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}=B_r \quad , \quad \frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}=C_r \ , \quad \frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}=D_r$$

すると、

$n=1$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)=\left(A_r-iB_r\right)+\left(A_r+iB_r\right)=2A_r$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-1}=\left(C_r-iD_r\right)+\left(C_r+iD_r\right)=2C_r$$

$n=2$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{2}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{2}=\left(A_r-i\,B_r\right)^2+\left(A_r+i\,B_r\right)^2=2\left(A_r^2-B_r^2\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-2}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-2}=\left(C_r-i\,D_r\right)^2+\left(C_r+i\,D_r\right)^2=2\left(C_r^2-D_r^2\right)$$

$n=3$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{3}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{3}=\left(A_r-i\,B_r\right)^3+\left(A_r+i\,B_r\right)^3=2\left(A_r^3-3A_rB_r^2\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-3}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-3}=\left(C_r-i\,D_r\right)^3+\left(C_r+i\,D_r\right)^3=2\left(C_r^3-3C_rD_r^2\right)$$

$n=4$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{4}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{4}=\left(A_r-i\,B_r\right)^4+\left(A_r+i\,B_r\right)^4=2\left(A_r^4-6A_r^2B_r^2+B_r^4\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-4}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-4}=\left(C_r-i\,D_r\right)^4+\left(C_r+i\,D_r\right)^4=2\left(C_r^4-6C_r^2D_r^2+D_r^4\right)$$

右辺 2(　) 内の係数の絶対値は

$$1,\ 1,1,\ 1,3,\ 1,6,1,\ 1,10,5,\ 1,15,15,1,\ \cdots$$

この整数列は OEIS A098158 に一致し、次式で与えられる。

$$T(n,k)=Binomial\,(n,2k)\ ,\quad for\ \ n\ge 0\ \ \&\ \ k=0,1,2,\cdots$$

これを用いて、

奇数次

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{2n-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{2n-1}=2\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-1-s}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}A_r^{2s+1}B_r^{2n-2s-2}$$
$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-(2n-1)}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-(2n-1)}=2\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-1-s}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}C_r^{2s+1}D_r^{2n-2s-2}$$

偶数次

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{2n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{2n}=2\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}A_r^{2s}B_r^{2n-2s}$$
$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-2n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-2n}=2\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}C_r^{2s}D_r^{2n-2s}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{n}=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{n}\right\}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-n}\right\}$$

であるから、記号 $A_r\,,B_r\,,C_r\,,D_r$ を元に戻せば、

奇数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n-1}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2s+1}\left(\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2n-2s-2}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-(2n-1)}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}$$
$$\times\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2s+1}\left(\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2n-2s-2}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-(2n-1)}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

偶数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2s}\left(\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2n-2s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2s}\left(\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2n-2s}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

Q.E.D.

この補題を用いれば、 李係数 ${}_0\mu_n\,,{}_1\mu_n$ はそれぞれ次のように得られる。

定理 3·2·2

臨界領域両端の李係数 ${}_0\mu_n\,,{}_1\mu_n$ がそれぞれ次のようであるとする。

$${}_0\mu_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{n}\right) \tag{1.μ}$$

$${}_1\mu_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right)\qquad\left(={}_0\mu_{-n}\right) \tag{2.μ}$$

但し、

$$\xi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\qquad\rho_k\ \ (k=1,2,3,\cdots)\ \text{are zeros of }\xi(z) \tag{0.ρ}$$

すると、$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r\,,\rho_{2r}=x_r+iy_r\quad r=1,2,3,\cdots$ と記述するとき、李係数 ${}_0\mu_n\,,{}_1\mu_n$ はそれぞれ次のように書き換えられる。

(1) 奇数次

$${}_0\mu_{2n-1}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\}$$

$${}_1\mu_{2n-1}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\}$$

(2) 偶数次

$${}_0\mu_{2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\}$$

$${}_1\mu_{2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\}$$

証明

李係数は

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \quad , \quad {}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) $$

であるが、

$$ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^n + \left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^n\right\} $$

であるから

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{2-\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^n - \left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^n\right\} $$

$$ {}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{2-\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-n} - \left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-n}\right\} $$

ここで 補題 3･2･1 を用いれば、、

(1) 奇数次

$$ {}_0\mu_{2n-1} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} $$

$$ {}_1\mu_{2n-1} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} $$

(2) 偶数次

$$ {}_0\mu_{2n} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} $$

$$ {}_1\mu_{2n} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} $$

Q.E.D.

Note

これらを観察すると、奇偶いづれの場合も、臨界領域両端での李係数の相違点は x_r^2 と $(1-x_r)^2$ のみでありその差は $1-2x_r$ であることが分かる。

3･3 $Re(\rho_k)=1/2$ のときの李係数

xi 関数の零点が臨界線上にあるときは、定理 3･2･2 と 定理 3･1 により、次の定理が得られる。

定理 3･3

臨界領域両端の李係数 ${}_0\mu_n\,,\,{}_1\mu_n$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.μ} $$

$$ {}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) \qquad \left(={}_0\mu_{-n}\right) \tag{2.μ} $$

但し、

$$ \xi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) \qquad \rho_k \quad (k=1,2,3,\cdots) \text{ are zeros of } \xi(z) \tag{0.ρ} $$

すると、もし $Re(\rho_k)=1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ ならば、次式が成立する。

(1) 奇数次

$$ {}_0\mu_{2n-1} = {}_1\mu_{2n-1} $$

$$ = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} \tag{3.1} $$

(2) 偶数次

$$ {}_0\mu_{2n} = {}_1\mu_{2n} $$

$$ = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} \tag{3.2} $$

(3) $ {}_0\lambda_n = {}_1\lambda_n = {}_0\mu_n = {}_1\mu_n \qquad n=1,2,3,\cdots$ (3.3)

証明

定理 3･2･2 において、$\rho_{2r-1}=1/2-iy_r\,,\rho_{2r}=1/2+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ と置いて、(3.1) と (3.2) を得る。次に、第1章において ${}_0\lambda_n={}_0\mu_n$ であり、定理 3･1 より ${}_0\lambda_n={}_1\lambda_n$ であるから (3.3) を得る。

Q.E.D.

cf.

拙著「 15 **臨界線上における李係数** 」定理 15･4･3 によれば、$Re(\rho_k)=1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ のとき

$$ {}_0\mu_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n-2}\left(\left(1/4+y_r^2\right)^{(2n-1)/2}\right)^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots $$

$$ {}_0\mu_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^2}{4^{2n-2}\left(1/4+y_r^2\right)^{2n}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s4^s\binom{2n}{2s+1}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots $$

これらは実数の平方和であるから、李の基準を満たしている。実は、これらと (3.1) , (3.2) は同値である。従って、(3.1) , (3.2) も李の基準を満たしている。

Note

1. $Re(\rho_k)=1/2$ は ${}_0\mu_n={}_1\mu_n$ のための十分条件である。
2. $Re(\rho_k)=1/2$ は ${}_0\mu_n={}_1\mu_n$ のための必要条件である公算が大きい。

   もしそうでないならば、我々は 定理 3･2･2 において次のような連立方程式を解かなければならない。

   $$ {}_0\mu_{2n-1}={}_1\mu_{2n-1} \quad , \quad {}_0\mu_{2n}={}_1\mu_{2n} \qquad n=1,2,3,\cdots $$

   これは未知数の個数と式の個数の両方が確定しない連立方程式体系であり、恒等式以外の解が存在することは想像し難い。
3. しかしながら、本章の目的としては、十分条件のみで十分である。

確認計算

臨界線上の零点 $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots,600$ を用いて数式処理ソフト *Mathematica* でこれらを計算してみる。すると次のようになる。

```
y_r_ := Im[ZetaZero[r]]
```

2n-1

$$ o\mu_{n\_}[m\_] := 2\sum_{r=1}^{m}\left(1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\,\text{Binomial}[2n-1,\,2(n-s-1)]\left(y_r^2-1/4\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right) $$

2n

$$e\mu_{n\_}[m\_] := 2\sum_{r=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{\left(y_r{}^2 + 1/4\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\,\text{Binomial}[2n, 2(n-s)]\left(y_r{}^2 - 1/4\right)^{2s} y_r{}^{2n-2s}\right)$$

```
N[{oμ1[600], eμ1[600], oμ2[600], eμ2[600]}]
{0.0220779, 0.0882745, 0.198479, 0.352506}
```

これらの結果は 1･1 の計算結果にほぼ近い。正確に一致していないのは計算項数が 600 と少ないためである。これは 2025 年 6 月（Windows 11 導入月）以降、高負荷計算が出来なくなったからである。100,000 項ぐらい計算すればかなり正確に一致する。

4 リーマン予想の証明

定理 4･1

$\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ がリーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点であるとき、

$Re(\rho_k)=1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ である。

証明

最初に、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点と xi 関数の零点とは同じである。

1. $\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ は xi 関数の零点とし、$\rho_{2r-1}=1/2-iy_r$, $\rho_{2r}=1/2+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とするとき、定理 3･3 により次式が成立する。

$$
{}_0\mu_{2n-1} = {}_1\mu_{2n-1}
$$

$$
= 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{2n-2}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} \tag{3.1}
$$

$$
{}_0\mu_{2n} = {}_1\mu_{2n}
$$

$$
= 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} \tag{3.2}
$$

$$
{}_0\lambda_n = {}_1\lambda_n = {}_0\mu_n = {}_1\mu_n \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.3}
$$

2. 特に $n=1$ のときには、

$$
{}_0\mu_1 = {}_1\mu_1 = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{y_r^2-1/4}{y_r^2+1/4}\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^2+1/4} = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right)
$$

他方、定理 1･1 より

$$
{}_0\lambda_1 = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = 0.0230957\cdots
$$

(3.3) より、

$$
\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = 0.0230957\cdots \tag{4.1}
$$

3. ここで、臨界線上の零点以外に 臨界線外の零点が存在したと仮定する。
このような零点の 1 組は次の 4 個から成るべきことが知られている。

$$
1/2-\alpha_s \pm i\beta_s \;,\; 1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \quad \left(0<\alpha_s<1/2 \;,\; \beta_s>0\right)
$$

すると 補題 1･3 より次式が成立しなければならない。

$$
\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right) + \sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2-\alpha_s-i\beta_s}+\frac{1}{1/2-\alpha_s+i\beta_s}\right)
$$

$$
+\sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2+\alpha_s-i\beta_s}+\frac{1}{1/2+\alpha_s+i\beta_s}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)}
$$

$$
= 0.0230957\cdots
$$

i.e.

$$
\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right) + \sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\xi'(z)}{\xi(z)}
$$

$$
= 0.0230957\cdots \tag{4.2}
$$

然るに、$0 < \alpha_s < 1/2$ に対して $0 < 1-2\alpha_s < 1+2\alpha_s < 2$ であるから、

$$\sum_{s=1} \left\{ \frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} + \frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2} \right\} > 0$$

それ故、(4.2) は (4.1) に矛盾する。よって 臨界領域内では臨界線外の零点が存在してはならない。

Q.E.D.

かくて リーマン予想は定理として成立する。

2025.10.18
2025.10.29 Renewed

河野 和
広島市

宇宙人の数学