因数分解によるリーマン予想の証明

河野 和
広島市、日本

2025.11.29

要 旨

(1) リーマン xi 関数 $\xi(z)$ と $\xi(1-z)$ はそれぞれ次のようにアダマール積 に因数分解される。

$$\xi(z) = \Pi(1-z/\rho) \quad , \quad \xi(1-z) = \Pi(1-(1-z)/\rho)$$

(2) $\xi(z) = \xi(1-z)$ が成立する。

(3) $\Pi(1-z/\rho) = \Pi(1-(1-z)/\rho)$ が成立するのは、全ての $Re(\rho)$ が $1/2$ のとき 且つそのときに限る。

(4) かくして $\Pi(1-z/\rho) = \xi(z) = \xi(1-z) = \Pi(1-(1-z)/\rho)$ となり、リーマン予想は成立する。

1. 本稿で扱う関数

本稿ではリーマンゼータ関数及びリーマン xi 関数を扱う。それらはそれぞれ次式で定義される。

(0.0) $$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots$$

(0.1) $$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

以下においてこれらを単に「ゼータ関数」及び「xi 関数」と呼ぶことにする。

なお、これらの零点は臨界領域($0 < Re(z) < 1$)においては同値であることが知られている。

2. $\zeta(z)$ や $\xi(z)$ の零点の記法

ゼータ関数 $\zeta(z)$ や xi 関数 $\xi(z)$ の零点 ρ は 通常 次のように記述されている。

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \quad , \quad \prod_{\rho}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)$$

但し、ρ は全ての零点に亘る。

しかし、この記法は概念的且つ曖昧であり、実際の計算に用いることが出来ない。

(1) 複素数表記

1914年、ハーディとリトルウッドは 臨界線上の零点が無限個存在することを証明した。このことは、臨界領域内の零点が無限個存在することを意味している。それ故、本稿では次記法を用いる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \quad , \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(2) 実部・虚部別表記

しかし、(1) の記法でも 零点 ρ_k の実部や虚部を詳細に調べるのは困難である。そこで xi 関数が共役複素根を持つことに着目し、$\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ を次のように置き換える。

$$\rho_{2r-1} = x_r - iy_r \ , \ \rho_{2r} = x_r + iy_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r > 0)$$

これを用いれば、(1) の記述例は次のように書き換えることが出来る。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r - iy_r} + \frac{1}{x_r + iy_r}\right) \quad , \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r - iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r + iy_r}\right)$$

3. リーマン予想の証明

定理 3･1 (アダマール積)

xi 関数 $\xi(z)$ 及び $\xi(1-z)$ はその零点 $\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解される。

(0.1) $$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(0.2) $$\xi(1-z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

証明

1893年、アダマールは次のような定理を示した。

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi/e)^z}{2(z-1)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n}\right)e^{-\frac{z}{2n}}$$

ガンマ関数に関するワイエルシュトラウスの表示式は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n}\right)e^{-\frac{z}{2n}} = \frac{e^{-\gamma z/2}}{\Gamma(1+z/2)}$$

これを上式の右辺に代入すれば、

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi/e)^z}{2(z-1)}\frac{e^{-\gamma z/2}}{\Gamma(1+z/2)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

$$= \frac{e^{z\log 2\pi}e^{-z}}{z-1}\frac{e^{-\gamma z/2}}{2\Gamma(1+z/2)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

$$= \frac{1}{(z-1)z\Gamma(z/2)}e^{\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

これより

$$-z(1-z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = e^{\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

両辺に $\pi^{-z/2} = e^{-(z\log\pi)/2}$ を乗じれば

$$-z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = e^{\left(\log 2\pi-\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

i.e.

(9.1) $$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}}$$

ここで、この両辺に $z=1$ を代入すれば、

$$\xi(1) = 1 = e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}}$$

これより、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

従って

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}}=e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

これを (9.1) の右辺に代入すれば

$$\xi(z)=e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\cdot e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

i.e.

(0.1) $$\xi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

両辺は全複素平面上において正則であるから、z を $1-z$ に置換して

(0.2) $$\xi(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

Q.E.D.

定理 3･2 (関数等式)

xi 関数が次のようであるとする。

(0.1) $$\xi(z)=-z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、全複素平面上において次式が成立する。

(0.3) $$\xi(z)=\xi(1-z)$$

証明

リーマンによれば、複素平面上の2点を除いて次が成立する。

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)\qquad Re(z)\neq 0,1$$

$$z(1-z)=(1-z)\{1-(1-z)\}$$

これらを (0.1) の右辺に代入すれば、

$$\xi(z)=-(1-z)\{1-(1-z)\}\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)=\xi(1-z)$$

$\xi(z)$ は全複素平面上で正則であるから、(0.3) も全複素平面上で成立する。

Q.E.D.

定理 3･3 (アダマール積の等式)

xi 関数 $\xi(z)$ 及び $\xi(1-z)$ はその零点 ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解されているとする。

(0.1') $\xi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$

(0.2') $\xi(1-z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$

すると、$Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ ならば かつ、このときにのみ、次式が成立する。

(0.4) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$

証明

零点 ρ_k を次のように実部・虚部別に表わす。

$$\rho_{2r-1} = x_r - iy_r \ , \ \rho_{2r} = x_r + iy_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r > 0)$$

すると、(0.4) は

(0.4') $\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r+iy_r}\right)$

I. 十分性

もし、$x_r = 1/2 \quad r=1,2,3,\cdots$ ならば、(0.4') は

(0.4'') $\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/2-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{1/2+iy_r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{1/2-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{1/2+iy_r}\right)$

このペアの両辺の根を求めるよう。すると、、

左辺 $1-\frac{z}{1/2-iy_r} = 0 \ , \ 1-\frac{z}{1/2+iy_r} = 0 \qquad r=1,2,3,\cdots$

右辺 $1-\frac{1-z}{1/2-iy_r} = 0 \ , \ 1-\frac{1-z}{1/2+iy_r} = 0 \qquad r=1,2,3,\cdots$

これらより、

左辺 $z = 1/2 - iy_r \ , \ z = 1/2 + iy_r \qquad r=1,2,3,\cdots$

右辺 $z = 1/2 + iy_r \ , \ z = 1/2 - iy_r \qquad r=1,2,3,\cdots$

左辺と右辺の零点は交差方向に一致している。つまり、(0.4'') は恒等的に成立している。

II. 必要性

(1) x_r も y_r も重複しない場合

$\rho_{2r-1} = x_r - iy_r \ , \ \rho_{2r} = x_r + iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とすると、

(0.4') $\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r+iy_r}\right)$

このペアの両辺の根を求めるよう。すると、、

左辺 $1-\frac{z}{x_r-iy_r} = 0 \ , \ 1-\frac{z}{x_r+iy_r} = 0 \qquad r=1,2,3,\cdots$

右辺 $1-\frac{1-z}{x_r-iy_r} = 0 \ , \ 1-\frac{1-z}{x_r+iy_r} = 0 \qquad r=1,2,3,\cdots$

これらより、

左辺　　$z = x_r - iy_r$, $z = x_r + iy_r$ 　$r = 1, 2, 3, \cdots$

右辺　　$z = 1 - x_r + iy_r$, $z = 1 - x_r - iy_r$ 　$r = 1, 2, 3, \cdots$

両辺は等しくなければならないから、虚部の符号と記号が一致するもので等式を作ると、

$$x_r - iy_r = 1 - x_r - iy_r \qquad r = 1, 2, 3, \cdots$$

$$x_r + iy_r = 1 - x_r + iy_r \qquad r = 1, 2, 3, \cdots$$

これらより、

$$x_r = 1 - x_r \qquad r = 1, 2, 3, \cdots$$

i.e. $\quad x_r = 1/2 \qquad r = 1, 2, 3, \cdots$

(2) x_r が重複する場合

x_r が重複するためには、少なくとも2組の共役零点が必要である。

見やすさのため、順番を入れ替えて x_1 と x_2 が重複し、x_3 以降は重複なしとする。

x_2 を x_1 に置換すれば、$\rho_k \quad k = 1, \cdots, 4$ は次のようになる。

$$\rho_1 = x_1 - iy_1 \ , \ \rho_2 = x_1 + iy_1 \ , \ \rho_3 = x_1 - iy_2 \ , \ \rho_4 = x_1 + iy_2$$

すると

左辺 $\displaystyle \prod_{k=1}^{4}\left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right) = \left(1 - \frac{z}{x_1 - iy_1}\right)\left(1 - \frac{z}{x_1 + iy_1}\right)\left(1 - \frac{z}{x_1 - iy_2}\right)\left(1 - \frac{z}{x_1 + iy_2}\right)$

右辺 $\displaystyle \prod_{k=1}^{4}\left(1 - \frac{1-z}{\rho_k}\right) = \left(1 - \frac{1-z}{x_1 - iy_1}\right)\left(1 - \frac{1-z}{x_1 + iy_1}\right)\left(1 - \frac{1-z}{x_1 - iy_2}\right)\left(1 - \frac{1-z}{x_1 + iy_2}\right)$

各ペアの両辺の根を求めるよう。すると、

左辺 $\displaystyle 1 - \frac{z}{x_1 - iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{z}{x_1 + iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{z}{x_1 - iy_2} = 0 \ , \ 1 - \frac{z}{x_1 + iy_2} = 0$

右辺 $\displaystyle 1 - \frac{1-z}{x_1 - iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{1-z}{x_1 + iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{1-z}{x_1 - iy_2} = 0 \ , \ 1 - \frac{1-z}{x_1 + iy_2} = 0$

これらより、

左辺 $z = x_1 - iy_1$, $z = x_1 + iy_1$, $z = x_1 - iy_2$, $z = x_1 + iy_2$

右辺 $z = 1 - x_1 + iy_1$, $z = 1 - x_1 - iy_1$, $z = 1 - x_1 + iy_2$, $z = 1 - x_1 - iy_2$

各組の両辺は等しくなければならないから、虚部の符号と記号が一致しているもので等式を作ると、

$$x_1 - iy_1 = 1 - x_1 - iy_1 \ , \ x_1 - iy_2 = 1 - x_1 - iy_2$$

$$x_1 + iy_1 = 1 - x_1 + iy_1 \ , \ x_1 + iy_2 = 1 - x_1 + iy_2$$

これらより、

$$x_1 = 1 - x_1$$

i.e. $\quad x_1 = 1/2$

この結果、

左辺 $z = 1/2 - iy_1$, $z = 1/2 + iy_1$, $z = 1/2 - iy_2$, $z = 1/2 + iy_2$

右辺 $z = 1/2 + iy_1$, $z = 1/2 - iy_1$, $z = 1/2 + iy_2$, $z = 1/2 - iy_2$

即ち、$z = 1/2 \pm iy_1$, $z = 1/2 \pm iy_2$ はそれぞれ 2 重根となる。

(3) y_r が重複する場合

y_r が重複するためには、少なくとも2組の共役零点が必要である。
見やすさのため、順番を入れ替えて y_1 と y_2 が重複し、y_3 以降は重複しないとする。

y_2 を y_1 に置換すれば、$\rho_k \quad k=1,\cdots,4$ は次のようになる。

$$\rho_1 = x_1 - iy_1 \;,\; \rho_2 = x_1 + iy_1 \;,\; \rho_3 = x_2 - iy_1 \;,\; \rho_4 = x_2 + iy_1$$

すると

左辺 $\displaystyle\prod_{k=1}^{4}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \left(1-\frac{z}{x_1-iy_1}\right)\left(1-\frac{z}{x_1+iy_1}\right)\left(1-\frac{z}{x_2-iy_1}\right)\left(1-\frac{z}{x_2+iy_1}\right)$

右辺 $\displaystyle\prod_{k=1}^{4}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right) = \left(1-\frac{1-z}{x_1-iy_1}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_1+iy_1}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_2-iy_1}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_2+iy_1}\right)$

以下の計算で もし $x_1 \neq x_2$ となったならば、多分、これらは臨界線外の零点である。

各ペアの両辺の根を求めるよう。すると、

左辺 $1-\dfrac{z}{x_1-iy_1}=0 \;,\; 1-\dfrac{z}{x_1+iy_1}=0 \;,\; 1-\dfrac{z}{x_2-iy_1}=0 \;,\; 1-\dfrac{z}{x_2+iy_1}=0$

右辺 $1-\dfrac{1-z}{x_1-iy_1}=0 \;,\; 1-\dfrac{1-z}{x_1+iy_1}=0 \;,\; 1-\dfrac{1-z}{x_2-iy_1}=0 \;,\; 1-\dfrac{1-z}{x_2+iy_1}=0$

これらより、

左辺 $z = x_1 - iy_1 \;,\; z = x_1 + iy_1 \;,\; z = x_2 - iy_1 \;,\; z = x_2 + iy_1$

右辺 $z = 1 - x_1 + iy_1 \;,\; z = 1 - x_1 - iy_1 \;,\; z = 1 - x_2 + iy_1 \;,\; z = 1 - x_2 - iy_1$

各組の両辺は等しくなければならないから、虚部の符号と記号が一致しているもので等式を作ると、

左辺 $x_1 - iy_1 = 1 - x_1 - iy_1 \;,\; x_2 - iy_1 = 1 - x_2 - iy_1$

右辺 $x_1 + iy_1 = 1 - x_1 + iy_1 \;,\; x_2 + iy_1 = 1 - x_2 + iy_1$

これらより、

$$x_1 = 1 - x_1 \;,\; x_2 = 1 - x_2$$

i.e. $\quad x_1 = x_2 = 1/2$

この結果、

左辺 $z = 1/2 - iy_1 \;,\; z = 1/2 + iy_1 \;,\; z = 1/2 - iy_1 \;,\; z = 1/2 + iy_1$

右辺 $z = 1/2 + iy_1 \;,\; z = 1/2 - iy_1 \;,\; z = 1/2 + iy_1 \;,\; z = 1/2 - iy_1$

即ち、$z = 1/2 \pm iy_1$ は4重根となる。臨界線外の零点の可能性は消失した。

(4) x_r も y_r も重複する場合

このためには、少なくとも2組の共役零点が必要である。
見やすさのため、順番を入れ替えて x_3, y_3 以降は重複しないとする。

x_2, y_2 を x_1, y_1 に置換すれば、$\rho_k \quad k=1,\cdots,4$ は次のようになる。

$$\rho_1 = x_1 - iy_1 \;,\; \rho_2 = x_1 + iy_1 \;,\; \rho_3 = x_1 - iy_1 \;,\; \rho_4 = x_1 + iy_1$$

すると、(3) と類似の計算により $x_1 = 1/2$ となり、$z = 1/2 \pm iy_1$ は4重根となる。

III. かくて、$Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ は (0.4) のための必要十分条件である。

Q.E.D.

以上、3つの定理により、$Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ ならば かつ、このときにのみ、次の四段論法 が完結する。

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \xi(z) = \xi(1-z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

かくして、リーマン予想は定理として成立する。

更新履歴

2025.11.29 Uploarded

2025.12.04 Added Proof of Theorem 3.1

宇宙人の数学