1　ディリクレ・ベータ母関数

双曲線関数と三角関数はフーリエ展開及びテイラー展開できる。これらはディリクレ・ベータの母関数となる。これらのベータ母関数を項別高階積分すると自然数のディリクレ・ベータ関数が得られる。但し、これらは下位のベータで表される自己同型な式であり、やや陰伏的な式である。

しかしながら本章ではここまでで止める。これらから下位のゼータを消し去って自己同型でない陽表的なゼータの公式を得る作業は次章「2 ディリクレ・ベータの公式(自然数)」で行う。

一方、これらのベータ母関数を項別高階微分すると負整数のディリクレ・ベータが得られる。これらは自己同型でない陽表的な公式である。

1・1　*sech x* 系ベータ母関数

次の両辺を積分または微分してディリクレ・ベータを得ようと考えるのは最も自然な発想である。

$$\frac{e^x}{1+e^{2x}} = e^{-1x} - e^{-3x} + e^{-5x} - e^{-7x} + - \cdots \qquad \left(= \frac{sech\,x}{2} \right) \tag{1.0}$$

1・1・1　$e^x/\left(e^{2x}+1\right)$ のフーリエ級数の項別高階積分

公式1・1・1

$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r+1)^n}$ とするとき、$x>0$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = -\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^1} + \frac{x^0}{0!}\beta(1) \tag{1.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^2} - \frac{x^0}{0!}\beta(2) + \frac{x^1}{1!}\beta(1) \tag{1.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^3 = -\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^3} + \frac{x^0}{0!}\beta(3) - \frac{x^1}{1!}\beta(2) + \frac{x^2}{2!}\beta(1)$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^n = (-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} + \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s}\frac{x^s}{s!}\beta(n-s) \tag{1.n}$$

導出

$e^x/\left(e^{2x}+1\right)$ は次のようにフーリエ展開される。

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{e^{2x}+1} &= e^{-1x} - e^{-3x} + e^{-5x} - e^{-7x} + - \cdots \\ &= cos\,1ix - cos\,3ix + cos\,5ix - cos\,7ix + - \cdots \\ &\quad + i(sin\,1ix - sin\,3ix + sin\,5ix - sin\,7ix + - \cdots)\end{aligned}$$

この両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = -\left[\frac{e^{-x}}{1} - \frac{e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-5x}}{5} - \frac{e^{-7x}}{7} + - \cdots\right]_0^x$$

$$= -\left(\frac{e^{-x}}{1}-\frac{e^{-3x}}{3}+\frac{e^{-5x}}{5}-\frac{e^{-7x}}{7}+-\cdots\right)+\frac{e^0}{1^1}-\frac{e^0}{3^1}+\frac{e^0}{5^1}-\frac{e^0}{7^1}+-\cdots$$

$$= -\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^1}+\frac{x^0}{0!}\beta(1)$$

次にこの両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^2 = \left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^2}\right]_0^x+\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^2}-\frac{x^0}{0!}\beta(2)+\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

となり、以下同様に計算して与式を得る。なお、これらは傍系積分である。

1·1·2 $e^x/\left(e^{2x}+1\right)$ のテイラー級数の項別高階積分

公式1·1·2

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, E_{10}=-50521, \cdots$ をオイラー数とするとき $|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}}{(2r+1)!}x^{2r+1} \tag{2.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}}{(2r+2)!}x^{2r+2} \tag{2.2}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^n = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}}{(2r+n)!}x^{2r+n} \tag{2.n}$$

導出

$$\frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{\operatorname{sech}x}{2} \quad , \quad \operatorname{sech}x = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r}$$

より

$$\frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

1·1·3 ディリクレ·ベータ

公式1·1·1 と 公式1·1·2 を突合することにより、ディリクレ·ベータを得る。

公式1·1·3

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, E_{10}=-50521, \cdots$ をオイラー数とするとき

$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\beta(1)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^1}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$\beta(2)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^2}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+2}}{(2r+2)!}+\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

$$\beta(3)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+3}}{(2r+3)!}+\frac{x^1}{1!}\beta(2)-\frac{x^2}{2!}\beta(1)$$

$$\beta(4)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^4}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+4}}{(2r+4)!}+\frac{x^1}{1!}\beta(3)-\frac{x^2}{2!}\beta(2)+\frac{x^3}{3!}\beta(1)$$

$$\vdots$$

$$\beta(n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n}-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+n}}{(2r+n)!}-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s x^s}{s!}\beta(n-s)$$

証明

(1.1) と (2.1) より

$$\beta(1)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^1}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

(1.2) と (2.2) より

$$\beta(2)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^1}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E_{2r}x^{2r+2}}{(2r+2)!}+\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

以下同様にして与式を得る。

1･1･4 $e^x/\left(e^{2x}+1\right)$ の直系高階積分

以上は $e^x/\left(e^{2x}+1\right)$ を傍系高階積分した結果であったが、これを直系高階積分すると次のようになる。

先ず、

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^n=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^n}$$

コーシーの重回積分の公式より

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx^n=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\infty}^{x}\frac{e^t(x-t)^{n-1}}{e^{2t}+1}dt$$

であるから

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\infty}^{x}\frac{e^t(x-t)^{n-1}}{e^{2t}+1}dt$$

両辺に $x=0$ を与えると

$$(-1)^n \beta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\infty}^{0}\frac{e^t(-t)^{n-1}}{e^{2t}+1}dt = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\frac{e^t t^{n-1}}{e^{2t}+1}dt$$

よって

$$\beta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\frac{e^t t^{n-1}}{e^{2t}+1}dt = \frac{1}{2\Gamma(n)}\int_0^{\infty}t^{n-1}\operatorname{sech} t\,dt$$

もはや n は自然数である必要はない。

1･1･5 $e^x/(e^{2x}+1)$ の高階微分

(1) $e^x/(e^{2x}+1)$ の高階導関数

公式1･1･5

奇定ベキ化係数 ${}_nK_r$ を

$$1^n + 3^n x^2 + 5^n x^4 + 7^n x^6 + \cdots = \frac{\sum_{r=0}^{n} {}_nK_r x^{2r}}{(1-x^2)^{n+1}} \qquad |x^2| \leqq 1 \tag{5.0}$$

とするとき、次式が成立する。

$$\frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = 1^1e^{-x} - 3^1e^{-3x} + 5^1e^{-5x} - 7^1e^{-7x} + - \cdots$$

$$\frac{e^x(e^{4x}-6e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^3} = 1^2e^{-x} - 3^2e^{-3x} + 5^2e^{-5x} - 7^2e^{-7x} + - \cdots$$

$$\frac{e^x(e^{6x}-23e^{4x}+23e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^4} = 1^3e^{-x} - 3^3e^{-3x} + 5^3e^{-5x} - 7^3e^{-7x} + - \cdots$$

$$\frac{e^x(e^{8x}-76e^{6x}+230e^{4x}-76e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^5} = 1^4e^{-x} - 3^3e^{-3x} + 5^3e^{-5x} - + \cdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{e^x\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}_nK_r\,e^{(2n-2r)x}}{(e^{2x}+1)^{n+1}} = 1^ne^{-x} - 3^ne^{-3x} + 5^ne^{-5x} - 7^ne^{-7x} + - \cdots \tag{5.n}$$

導出

奇定ベキ化係数 ${}_nK_r$ の定義式(5.0)において $x^2 = -e^{-2x}$ と置けば

$$1^n - 3^ne^{-2x} + 5^ne^{-4x} - 7^ne^{-6x} + - \cdots = \frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}_nK_r\,e^{-2rx}}{(1+e^{-2x})^{n+1}}$$

両辺に e^{-x} を乗じれば

$$1^n e^{-x}-3^n e^{-3x}+5^n e^{-5x}-7^n e^{-7x}+-\cdots=\frac{e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nK_r e^{-2rx}}{\left(1+e^{-2x}\right)^{n+1}}$$

右辺の分母子に $e^{2x(n+1)}$ を乗じれば

$$\frac{e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nK_r e^{-2rx}e^{2x(n+1)}}{\left(1+e^{-2x}\right)^{n+1}e^{2x(n+1)}}=\frac{e^{x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nK_r e^{(2n-2r)x}}{\left(e^{2x}+1\right)^{n+1}}$$

であるから

$$1^n e^{-x}-3^n e^{-3x}+5^n e^{-5x}-7^n e^{-7x}+-\cdots=\frac{e^{x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nK_r e^{(2n-2r)x}}{\left(e^{2x}+1\right)^{n+1}} \tag{5.n}$$

を得る。これらは (1.0) の両辺を高階微分した結果に一致する。

Note

奇定ベキ化係数 ${}_nK_r$ については後述(1・4)するが、次のような算式で示される。

$$ {}_nK_r=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{n+1}{k}(2r+1-2k)^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

(2) 負整数のディリクレベータ

上記公式に $x=0$ を与えると高階微係数として負整数のディリクレベータが得られる。

公式1・1・5'

$$\frac{1-1}{2^2}=1^1-3^1+5^1-7^1+-\cdots=\beta(-1)$$

$$\frac{1-6+1}{2^3}=1^2-3^2+5^2-7^2+-\cdots=\beta(-2)$$

$$\frac{1-23+23-1}{2^4}=1^3-3^3+5^3-7^3+-\cdots=\beta(-3)$$

$$\frac{1-76+230-76+1}{2^5}=1^4-3^4+5^4-7^4+-\cdots=\beta(-4)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nK_r}{2^{n+1}}=1^n-3^n+5^n-7^n+-\cdots=\beta(-n) \tag{5.n'}$$

(3) 奇定ベキ化係数とオイラー数

公式1・1・5"

奇定ベキ化係数 ${}_nK_r$ とオイラー数 E_{2n} には次なる関係がある。

$$\sum_{r=0}^{2n}(-1)^r\,{}_{2n}K_r = 2^{2n}E_{2n} \tag{5.n''}$$

導出

(5.n') において n を $2n$ に置換すれば

$$\frac{\sum_{r=0}^{2n}(-1)^r\,{}_{2n}K_r}{2^{2n+1}} = \beta(-2n) = \frac{E_{2n}}{2}$$

これより与式を得る。

1･2　*sec x* 系ベータ母関数

次の式も両辺を積分または微分してディリクレ・ベータを得ることができる。

$$\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}=e^{ix}-e^{3ix}+e^{5ix}-e^{7ix}+-\cdots \qquad \left(=\frac{sec\,x}{2}\right) \tag{1.0}$$

1･2･1　$e^{ix}/\left(1+e^{2ix}\right)$ のフーリエ級数の項別高階積分

公式1･2･1

$\beta(n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r+1)^n}$ とするとき、$|x|<\pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx=i^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^1}-i^{-1}\frac{x^0}{0!}\beta(1) \tag{1.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^2=i^{-2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^2}-i^{-2}\frac{x^0}{0!}\beta(2)-i^{-1}\frac{x^1}{1!}\beta(1) \tag{1.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^3=i^{-3}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^3}-i^{-3}\frac{x^0}{0!}\beta(3)-i^{-2}\frac{x^1}{1!}\beta(2)-i^{-1}\frac{x^2}{2!}\beta(1) \tag{1.3}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^n=i^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^n}-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{i^{-(n-s)}x^s}{s!}\beta(n-s) \tag{1.n}$$

導出

$e^{ix}/\left(1+e^{2ix}\right)$ は広い意味で次のようにフーリエ展開される。

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}&=e^{ix}-e^{3ix}+e^{5ix}-e^{7ix}+-\cdots\\&=\ cos\,x-cos\,3x+cos\,5x-cos\,7x+-\cdots\\&\quad+i(sin\,x-sin\,3x+sin\,5x-sin\,7x+-\cdots)\end{aligned} \tag{1.0}$$

(1.0) は等式として成立しない。ところがこの1階積分は等式として成立する。

(1.0) の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx&=i^{-1}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^1}\right]_0^x-i^{-1}\left(1-\frac{e^0}{3^1}+\frac{e^0}{5^1}-\frac{e^0}{7^1}+-\cdots\right)\\&=i^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^1}-i^{-1}\frac{x^0}{0!}\beta(1)\end{aligned} \tag{1.1}$$

次に (1.1) の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\int_0^x\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^2=i^{-2}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^2}\right]_0^x-i^{-1}\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

$$= i^{-2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^2} - i^{-2}\frac{x^0}{0!}\beta(2) - i^{-1}\frac{x^1}{1!}\beta(1) \tag{1.2}$$

以下同様に計算して与式を得る。もちろんこれらは傍系高階積分である。

1·2·2 $e^{ix}/\left(1+e^{2ix}\right)$ のテイラー級数の項別高階積分

公式1·2·2

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, E_{10}=-50521, \cdots$ をオイラー数とするとき $|x|< \pi/2$ について次式が成立する。

$$\int_0^x \frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+1)!}x^{2r+1} \tag{2.1}$$

$$\int_0^x\int_0^x \frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+2)!}x^{2r+2} \tag{2.2}$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^3 = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+3)!}x^{2r+3} \tag{2.3}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}}dx^n = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+n)!}x^{2r+n} \tag{2.n}$$

導出

$$\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}} = \frac{1}{2}\frac{2}{e^{ix}+e^{-ix}} = \frac{1}{2}\sec x \quad , \quad \sec x = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r)!}x^{2r}$$

より

$$\frac{e^{ix}}{1+e^{2ix}} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r)!}x^{2r} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

この両辺を 0 から x まで繰り返し積分して与式を得る。

1·2·3 ディリクレ·ベータ多項式

公式1·2·1と公式1·2·2を突合することにより、以下のようなディリクレ·ベータ多項式を得る。

公式1·2·3

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, E_{10}=-50521, \cdots$ をオイラー数とするとき $|x|< \pi/2$ について次式が成立する。

偶数ベータ

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+1)!}x^{2r+1} = 0 \tag{3.0es}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2r+3}}{(2r+3)!} = \frac{x^1}{1!}\beta(2) \tag{3.1es}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^5}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2r+5}}{(2r+5)\,!}=\frac{x^1}{1\,!}\beta(4)-\frac{x^3}{3\,!}\beta(2) \tag{3.2es}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^7}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2r+7}}{(2r+7)\,!}=\frac{x^1}{1\,!}\beta(6)-\frac{x^3}{3\,!}\beta(4)+\frac{x^5}{5\,!}\beta(2) \tag{3.3es}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1}}-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2n+1+2r}}{(2n+1+2r)\,!}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)\,!}\beta(2n-2s) \tag{3.nes}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2r+2}}{(2r+2)\,!}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(2) \tag{3.1ec}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^4}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2r+4}}{(2r+4)\,!}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(4)-\frac{x^2}{2\,!}\beta(2) \tag{3.2ec}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^6}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2r+6}}{(2r+6)\,!}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(6)-\frac{x^2}{2\,!}\beta(4)+\frac{x^4}{4\,!}\beta(2) \tag{3.3ec}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}}-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|\,x^{2n+2r}}{(2n+2r)\,!}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)\,!}\beta(2n-2s) \tag{3.nec}$$

奇数ベータ

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(1) \tag{3.0oc}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(3)-\frac{x^2}{2\,!}\beta(1) \tag{3.1oc}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^5}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(5)-\frac{x^2}{2\,!}\beta(3)+\frac{x^4}{4\,!}\beta(1) \tag{3.2oc}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^7}=\frac{x^0}{0\,!}\beta(7)-\frac{x^2}{2\,!}\beta(5)+\frac{x^4}{4\,!}\beta(3)-\frac{x^6}{6\,!}\beta(1) \tag{3.3oc}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)\,!}\beta(2n+1-2s) \tag{3.noc}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2}=\frac{x^1}{1\,!}\beta(1) \tag{3.1os}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^4}=\frac{x^1}{1\,!}\beta(3)-\frac{x^3}{3\,!}\beta(1) \tag{3.2os}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^6}=\frac{x^1}{1\,!}\beta(5)-\frac{x^3}{3\,!}\beta(3)+\frac{x^5}{5\,!}\beta(1) \tag{3.3os}$$

⋮

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}} = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!}\beta(2n+1-2s) \tag{3.nos}$$

証明

(1.1) と (2.1) より

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^1} - \frac{i}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+1)!}x^{2r+1} = \frac{x^0}{0!}\beta(1)$$

ここで $e^{irx} = \cos rx + i\sin rx$ を代入すれば

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} + i\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} - \frac{i}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+1)!}x^{2r+1} = \frac{x^0}{0!}\beta(1)$$

これより

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} = \frac{x^0}{0!}\beta(1) \tag{3.0oc}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+1)!}x^{2r+1} = 0 \tag{3.0es}$$

(1.2) と (2.2) より

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^2} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+2)!}x^{2r+2} = \frac{x^0}{0!}\beta(2) + i\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

$e^{irx} = \cos rx + i\sin rx$ を代入すれば

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2} + i\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+2)!}x^{2r+2} = \frac{x^0}{0!}\beta(2) + i\frac{x^1}{1!}\beta(1)$$

これより

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+2)!}x^{2r+2} = \frac{x^0}{0!}\beta(2) \tag{3.1ec}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2} = \frac{x^1}{1!}\beta(1) \tag{3.1os}$$

(1.3) と (2.3) より

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r e^{(2r+1)ix}}{(2r+1)^3} + \frac{i}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+3)!}x^{2r+3} = \frac{x^0}{0!}\beta(3) + i\frac{x^1}{1!}\beta(2) - \frac{x^2}{2!}\beta(1)$$

$e^{irx} = \cos rx + i\sin rx$ を代入すれば

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} + i\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} + \frac{i}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_{2r}|}{(2r+3)!}x^{2r+3}$$

$$= \frac{x^0}{0!}\beta(3) + i\frac{x^1}{1!}\beta(2) - \frac{x^2}{2!}\beta(1)$$

これより

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} = \frac{x^0}{0!}\beta(3) - \frac{x^2}{2!}\beta(1) \tag{3.1oc}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}|}{(2r+3)!} x^{2r+3} = \frac{x^1}{1!}\beta(2) \tag{3.1es}$$

以下同様にして与式を得る。

1·2·5 $e^{ix}/\left(1+e^{2ix}\right)$ の高階微分

（1.0）の高階微分は等式としては成立しないが、負整数のディリクレベータを生成するのに役立つ。即ち、奇定ベキ化係数 ${}_nK_r$ を用いて 1·1·5 と同じ結果を得る。

1·3　csc x 系ゼータ母関数

次の式も両辺を高階積分してディリクレ・ベータを得ることができる。

$$\frac{ie^{ix}}{1-e^{2ix}}=i\left(e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}+e^{7ix}+\cdots\right)\qquad\left(=-\frac{\csc x}{2}\right) \tag{1.0}$$

公式1·3·3

$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ \cdots$ をベルヌイ数とし、$H_s=\sum_{t=1}^{s}1/t$ を調和数とし、$\lambda(x)=\sum_{r=1}^{\infty}(2r-1)^{-x}$ をディリクレ・ラムダとするとき、$0<x<\pi$ について次式が成立する。

$$\begin{aligned}\beta(2n)&=\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\left(\log\frac{\pi}{4}-H_{2n-1}\right)\\&+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|}{2r(2r+2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1+2r}\\&-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s}{(2s-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s-1}\lambda(2n+1-2s)\end{aligned}$$

証明

「1 ゼータ母関数 」の公式1·6·3 において (1.0) から次の奇数ラムダが得られた。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}-\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2(2n-1)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{2n-1}\right)-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|x^{2r+2n-1}}{2r(2r+2n-1)!}$$
$$=-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s-1}}{(2s-1)!}\lambda(2n+1-2s)$$

$x=\pi/2$ をこれに代入すると

$$\beta(2n)-\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\left(\log\frac{\pi}{4}-H_{2n-1}\right)-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|}{2r(2r+2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1+2r}$$
$$=-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s}{(2s-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s-1}\lambda(2n+1-2s)$$

かくて与式を得る。

Note

ディリクレ・ラムダとリーマン・ゼータとの間には $\lambda(n)=\left(1-2^{-n}\right)\zeta(n)$ なる関係があるから、この公式は偶数ベータが奇数ゼータで表されることを意味している。実際、$n=2$ のとき

$$\beta(4)-\frac{1}{2\cdot 3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\left(\log\frac{\pi}{4}-H_3\right)-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)|B_{2r}|}{2r(2r+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+3}=\frac{\pi}{2}\frac{7}{8}\zeta(3)$$

1･4　奇定ベキ化係数

自然数の定ベキを係数とする級数

$$S_n = 1^n+2^n x+3^n x^2+4^n x^3+5^n x^4+6^n x^5+7^n x^6+\cdots = \frac{\sum_{r=1}^{n} {}_nD_r x^{r-1}}{(1-x)^{n+1}} \qquad |x| \leqq 1$$

は、2つの級数

$$S_n^o = 1^n x^0 + 3^n x^2 + 5^n x^4 + 7^n x^6 +\cdots$$

$$S_n^e = 2^n x^1 + 4^n x^3 + 6^n x^5 + 8^n x^7 +\cdots$$

に分けることができる。前者を奇数の定ベキ級数、後者を偶数の定ベキ級数と呼ぶことにする。

1･4･1　奇定ベキ化係数の定義

定義1･4･1

次の式を満足する多項式 $\sum_{r=0}^{n} {}_nK_r x^{2r}$ を 等比級数の奇定ベキ化多項式と呼び、その係数 ${}_nK_r$ を奇定ベキ化係数と定義する。

$$1^n + 3^n x^2 + 5^n x^4 + 7^n x^6 +\cdots = \frac{\sum_{r=0}^{n} {}_nK_r x^{2r}}{\left(1-x^2\right)^{n+1}} \qquad \left|x^2\right| \leqq 1 \tag{1.0}$$

具体的には次のような数値となる。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & {}_0K_0 & & & \\ & & {}_1K_0 & {}_1K_1 & & & \\ & & {}_2K_0 & {}_2K_1 & {}_2K_2 & & \\ & {}_3K_0 & {}_3K_1 & {}_3K_2 & {}_3K_3 & & \\ & {}_4K_0 & {}_4K_1 & {}_4K_2 & {}_4K_3 & {}_4K_4 & \\ {}_5K_0 & {}_5K_1 & {}_5K_2 & {}_5K_3 & {}_5K_4 & {}_5K_5 & \\ {}_6K_0 & {}_6K_1 & {}_6K_2 & {}_6K_3 & {}_6K_4 & {}_6K_5 & {}_6K_6 \\ & & & \vdots & & & \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 23 \quad 23 \quad 1 \\ 1 \quad 76 \quad 230 \quad 76 \quad 1 \\ 1 \quad 237 \quad 1682 \quad 1682 \quad 237 \quad 1 \\ 1 \quad 722 \quad 10543 \quad 23548 \quad 10543 \quad 722 \quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

説明

偶数ベキの等比級数を

$$1 + x^2 + x^4 + x^6+\cdots = \frac{1}{1-x^2} \qquad \left|x^2\right| \leqq 1 \tag{0}$$

とする。この(0)の両辺にxを乗じて1回微分すると

$$1^1 x^0 +3^1 x^2 +5^1 x^4 +7^1 x^6 +\cdots = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \qquad \left|x^2\right| \leqq 1 \tag{1}$$

となり、この級数の係数は奇数の1次ベキとなっている。

次に(1)の両辺にxを乗じて1回微分すると

$$1^2x^0+3^2x^2+5^2x^4+7^2x^6+\cdots=\frac{1+6x^2+x^4}{\left(1-x^2\right)^3} \qquad \left|x^2\right|\leqq 1 \tag{2}$$

となり、この級数の係数は奇数の2次ベキとなっている。

次に(2)の両辺に x を乗じて1回微分すると

$$1^3x^0+3^3x^2+5^3x^4+7^3x^6+\cdots=\frac{1+23x^2+23x^4+x^6}{\left(1-x^2\right)^4} \qquad \left|x^2\right|\leqq 1 \tag{3}$$

となり、この級数の係数は奇数の3次ベキとなっている。

このように偶数ベキの等比級数を逐次累乗し、各段階である多項式を乗じると、その級数の累乗の係数を $1^n, 3^n, 5^n, 7^n, \cdots$ と 定ベキ化することができる。

1･4･2 奇定ベキ化係数の性質

奇定ベキ化係数 ${}_nK_r$ は次なる性質を持つ。

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nK_r=(2n)!! \qquad \left\{=2^n n!\right\} \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=0}^{2n}(-1)^r\, {}_{2n}K_r=(-1)^n(\tan x)^{(2n)}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} \tag{2.2}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1} \tag{2.2'}$$

$${}_nK_r=(2n-2r+1)_{n-1}K_{r-1}+(2r+1)_{n-1}K_r \qquad \begin{pmatrix} n=1,2,3,4,\cdots \\ r=1,2,\cdots,n-1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

(2.1)は、次の図のとおりで、通常の定ベキ化係数ピラミッドの横計が $n!$ になったのに対し、この係数ピラミッドの横計は偶数の2重階乗になる。

$$\begin{array}{ccc}
1 & = & 0!! \\
1+1 & = & 2!! \\
1+6+1 & = & 4!! \\
1+23+23+1 & = & 6!! \\
1+76+230+76+1 & = & 8!! \\
1+237+1682+1682+237+1 & = & 10!! \\
1+722+10543+23548+10543+722+1 & = & 12!! \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

(2.2)も驚くべき性質である。通常の定ベキ化係数(Eulerian number)ではこの交代数列の横計がタンジェント数になったのであるが、この係数の交代数列の横計は $\tan x$ の高階微分の $x=\pi/4$ における微係数に一致し、従って(2.2')のようなベルヌイ級数に一致している。

(超微積分編の 10･1･1 の(2)参照。) これらを図示すると次のとおりである。

$$1 \qquad = \left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{(0)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-1}$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 6 + 1 = -\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{(2)} = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k\,(2k-3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-3}$$

$$1 - 23 + 23 - 1 = 0$$

$$1 - 76 + 230 - 76 + 1 = \left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{(4)} = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k\,(2k-5)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-5}$$

$$1-237+1682-1682+237-1 = 0$$

$$1-722+10543-23548+10543-722+1 = -\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{(6)} = -\sum_{k=4}^{\infty}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k\,(2k-7)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-7}$$

(2.3)は係数が再帰的であることを示す。

1･4･3 奇定ベキ化係数の逐次計算法

筆者の考えた奇定ベキ化係数の逐次計算法を次に示す。上記細節の(2.3)を使用する。先ず、1段目の定ベキ化係数を 1 1 とする。2段目以下も両端の係数は全て 1 とする。次にピラミッドの1段目の下に合計が6となる2数の順列 $(3,3)$ を乗加算して2段目の係数とする。次にピラミッドの2段目の下に合計が8となる2数の順列 $(5,3),(3,5)$ を乗加算して3段目の係数とする。以下、同じ手順を次図に示すように繰り返す。

		算 式
1	1 1	
	3,3	
2	1 6 1	6 = 1×3 + 1×3
	5,3 3,5	
3	1 23 23 1	23 = 1×5 + 6×3
	7,3 5,5 3,7	
4	1 76 230 76 1	76 = 1×7 +23×3 , 230 = 23×5 + 23×5
	9,3 7,5 5,7 3,9	
5	1 237 1682 1682 237 1	237 = 1×9 +76×7 , 1682 = 76×7 + 230×5
	11,3 9,5 7,7 5,9 3,11	
6	1 722 10543 23548 10543 722 1	722 = 1×11+237×3 , 10543 = 237×9+1682×5 , 23548 = 1682×7+1682×7
	⋮	⋮

1･4･4 奇定ベキ化係数の直接計算法

公式1･4･4

$$ {}_nK_r = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{n+1}{k}(2r+1-2k)^n \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{4.1}$$

導出

定義式(1.0)より

$$(1-x^2)^{n+1}(1^n + 3^n x^2 + 5^n x^4 + 7^n x^6 + \cdots) = \sum_{r=0}^{n}{}_nK_r x^{2r}$$

ここで

$$(1-x^2)^{n+1}=\binom{n+1}{0}x^0-\binom{n+1}{1}x^2+\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}x^{2n+2}$$

を代入すれば左辺は

$$\left\{\binom{n+1}{0}x^0-\binom{n+1}{1}x^2+\binom{n+1}{2}x^4-\binom{n+1}{3}x^6+\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}x^{2n+2}\right\}$$
$$\times(1^n x^0+3^n x^2+5^n x^4+7^n x^6+\cdots)$$
$$=1^n\binom{n+1}{0}x^0+\left\{\binom{n+1}{0}3^n-\binom{n+1}{1}1^n\right\}x^2$$
$$+\left\{\binom{n+1}{0}5^n-\binom{n+1}{1}3^n+\binom{n+1}{2}1^n\right\}x^4$$
$$+\left\{\binom{n+1}{0}7^n-\binom{n+1}{1}5^n+\binom{n+1}{2}3^n-\binom{n+1}{3}1^n\right\}x^6$$
$$\vdots$$

右辺は ${}_nK_0x^0+{}_nK_1x^2+{}_nK_2x^4+\cdots+{}_nK_nx^{2n}$ であるから、未定係数法により与式を得る。

例

$${}_3K_2=\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{4}{k}(5-k)^3=\binom{4}{0}5^3-\binom{4}{1}3^3+\binom{4}{2}1^3=23$$
$${}_5K_3=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{6}{k}(7-k)^6=\binom{6}{0}7^5-\binom{6}{1}5^5+\binom{6}{2}3^5-\binom{6}{3}1^5=1682$$

2012.02.12

K. Kono

宇宙人の数学