

2 ディリクレ・ベータの公式

「1 ディリクレ・ベータ母関数」で得られたベータの公式は下位のベータで表された自己同型な公式であった。本章ではこれらから下位のベータを取り除いて陽表的な公式を得る。なお、ディリクレ・ベータ関数は次式で定義される。

$$\beta(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^x}$$

2.1 自然数ベータの公式(*sech x* 系)

sech 系からは自然数ベータの公式が得られる。この公式は簡明で収束も速い。

公式2.1.1

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, \dots$ をオイラー数とし、 n を自然数とするとき、 $0 < x \leq \pi/2$ について次式が成立する。

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} + \frac{x^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{2r} \frac{E_{2r} x^{2r}}{(n+2r)!}$$

特に $x = 1/2, 1$ のとき

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s}{s! 2^s} \frac{(-1)^r e^{-(r+1/2)}}{(2r+1)^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{2r} \frac{E_{2r}}{(n+2r)! 2^{2r}}$$

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)}}{(2r+1)^n} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{2r} \frac{E_{2r}}{(n+2r)!}$$

証明

「1 ディリクレ・ベータ母関数」の公式1.1.3 で次のディリクレ・ベータが得られた。

$$\beta(1) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^1} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$\beta(2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{2r+2}}{(2r+2)!} + \frac{x^1}{1!} \beta(1)$$

$$\beta(3) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^3} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{2r+3}}{(2r+3)!} + \frac{x^1}{1!} \beta(2) - \frac{x^2}{2!} \beta(1)$$

$$\beta(4) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^4} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{2r+4}}{(2r+4)!} + \frac{x^1}{1!} \beta(3) - \frac{x^2}{2!} \beta(2) + \frac{x^3}{3!} \beta(1)$$

⋮

簡単化のため次のような置換を行う。

$$B_n = \beta(n), \quad f_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{n+2r}}{(n+2r)!}$$

すると

$$B_1 = f_1$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= f_2 + \frac{x^1}{1!} B_1 \\
B_3 &= f_3 + \frac{x^1}{1!} B_2 - \frac{x^2}{2!} B_1 \\
B_4 &= f_4 + \frac{x^1}{1!} B_3 - \frac{x^2}{2!} B_2 + \frac{x^3}{3!} B_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

B_k を順次下の式に代入すると

$$\begin{aligned}
B_1 &= C_0 x^0 f_1 \\
B_2 &= C_0 x^0 f_2 + C_1 x^1 f_1 \\
B_3 &= C_0 x^0 f_3 + C_1 x^1 f_2 + C_2 x^2 f_1 \\
B_4 &= C_0 x^0 f_4 + C_1 x^1 f_3 + C_2 x^2 f_2 + C_3 x^3 f_1 \\
&\vdots \\
B_n &= \sum_{s=0}^{n-1} C_s x^s f_{n-s}
\end{aligned}$$

ここで C_s は次のような有理数である。

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{0!}, \quad C_1 = \frac{1}{1!}, \quad C_2 = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!1!} \\
C_3 &= \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!1!} - \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{1!1!1!} \\
C_4 &= -\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!1!} + \frac{1}{1!3!} + \frac{1}{2!2!} - \left(\frac{1}{2!1!1!} + \frac{1}{1!2!1!} + \frac{1}{1!1!2!} \right) \\
&\quad + \frac{1}{1!1!1!1!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ややこしそうに見えるが、実はこれらは $C_s = 1/s!$ と簡単に計算される。

よって

$$B_n = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!} f_{n-s}$$

記号を戻せば

$$\begin{aligned}
\beta(n) &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^{n-s}} + \frac{(-1)^{n-s-1}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{n-s+2r}}{(2r+n-s)!} \right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^s e^{-(2r+1)x}}{s! (2r+1)^{n-s}} + \frac{(-1)^{n-s-1}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{s!} \frac{E_{2r} x^{n+2r}}{(n+2r-s)!}
\end{aligned}$$

i.e

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} - \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{n+2r}{s} \frac{E_{2r} x^{n+2r}}{(n+2r)!}$$

ここで「岩波 数学公式Ⅱ」 p11 によれば

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{n}{s} = (-1)^m \binom{n-1}{m} \quad m \leq n-1$$

であるから、

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{n+2r}{s} = (-1)^{n-1} \binom{n+2r-1}{n-1}$$

さらに

$$\binom{p-1+r}{p-1} = (-1)^r \binom{-p}{r}$$

を適用すれば

$$\binom{n-1+2r}{n-1} = (-1)^{2r} \binom{-n}{2r}$$

よって

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{n+2r}{s} = (-1)^{n-1+2r} \binom{-n}{2r}$$

これを上式に代入して

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} + \frac{x^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{2r} \frac{E_{2r} x^{2r}}{(n+2r)!}$$

Q.E.D.

Note

この公式は $x=1$ のときが簡明であるが、収束速度は $x=1/2$ の付近が最速である。

例1

$$\beta(4) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{2r+1}{1! 2^1} + \frac{(2r+1)^2}{2! 2^2} + \frac{(2r+1)^3}{3! 2^3} \right\} \frac{(-1)^r e^{-r-\frac{1}{2}}}{(2r+1)^4} + \frac{1}{2^5} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-4}{2r} \frac{E_{2r}}{(4+2r)! 2^{2r}}$$

$$\beta(4) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{2r+1}{1!} + \frac{(2r+1)^2}{2!} + \frac{(2r+1)^3}{3!} \right\} \frac{(-1)^r e^{-2r-1}}{(2r+1)^4} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-4}{2r} \frac{E_{2r}}{(4+2r)!}$$

例2 $\beta(8)$

$x=1/2$ の公式に従いにこの計算を行った。級数を7項まで計算したところ、有効数字10桁が得られた。

m = 7 ;

$$b[n_] := \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s}{s! 2^s} \frac{(-1)^r e^{-(r+1/2)}}{(2r+1)^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{r=0}^m \frac{\text{Binomial}[-n, 2r] \text{EulerE}[2r]}{(n+2r)! 2^{2r}}$$

N[b[8], 10] N[DirichletL[4, 2, 8], 10]

0.9998499902 0.9998499902

2・2 偶数ベータの公式 (*sec x* 系)

公式2・2・1

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, \dots$ をオイラー数とし、 n を自然数とすると、 $0 < x \leq \pi/2$ について次式が成立する。

$$\beta(2n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}| \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}} - \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \binom{2n+2r}{2s} E_{2s} \right\} \frac{|E_{2r}| x^{2n+2r}}{(2n+2r)!} \quad (1.1)$$

特に $x=\pi/2$ のとき

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \binom{2n+2r}{2s} E_{2s} \right\} \frac{|E_{2r}|}{(2n+2r)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n+2r} \quad (1.2)$$

証明

公式1・2・3 (1・2) で次式が得られた。

$$\begin{aligned} \beta(2) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+2}}{(2r+2)!} \\ \beta(4) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^4} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+4}}{(2r+4)!} + \frac{x^2}{2!} \beta(2) \\ \beta(6) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^6} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+6}}{(2r+6)!} + \frac{x^2}{2!} \beta(4) - \frac{x^4}{4!} \beta(2) \\ \beta(8) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^8} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+8}}{(2r+8)!} + \frac{x^2}{2!} \beta(6) - \frac{x^4}{4!} \beta(4) + \frac{x^6}{6!} \beta(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

これらの $\beta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\beta(2n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^r C_s \cos \{(2r+1)x\} x^{2s}}{(2r+1)^{2n-2s}} - \frac{(-1)^{n-s}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{C_s |E_{2r}| x^{2n+2r}}{(2n-2s+2r)!}$$

ここで C_s はつぎのような有理数である。

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{0!}, \quad C_1 = \frac{1}{2!}, \quad C_2 = -\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!2!}, \quad C_3 = \frac{1}{6!} - \left(\frac{1}{4!2!} + \frac{1}{2!4!} \right) + \frac{1}{2!2!2!}, \\ C_4 &= -\frac{1}{8!} + \left(\frac{1}{6!2!} + \frac{1}{4!4!} + \frac{1}{2!6!} \right) - \left(\frac{1}{4!2!2!} + \frac{1}{2!4!2!} + \frac{1}{2!2!4!} \right) + \frac{1}{2!2!2!2!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

そして Sugimoto 氏 によればこれらは次式で計算できる。

$$C_s = (-1)^s \frac{E_{2s}}{(2s)!} = \frac{|E_{2s}|}{(2s)!}$$

かくてこれを上式に代入して与式を得る。

例1

$$\beta(4) = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \binom{4+2r}{0} E_0 + \binom{4+2r}{2} E_2 \right\} \frac{|E_{2r}|}{(4+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4+2r}$$

$$\beta(6) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \binom{6+2r}{0} E_0 + \binom{6+2r}{2} E_2 + \binom{6+2r}{4} E_4 \right\} \frac{|E_{2r}|}{(6+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{6+2r}$$

例2 $\beta(6)$

(1.2) に従いにこの計算を行った。級数を6000項まで計算したところ、有効数字4桁が得られた。
m = 6000;

$$b[n_] := \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^{n-1} \text{Binomial}[2n+2r, 2s] \text{EulerE}[2s] \right) \frac{\text{Abs}[\text{EulerE}[2r]]}{(2n+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2r}$$

N[b[3]] N[DirichletL[4, 2, 6]]
 0.998602 0.998685

例2で見たように、(1.2) は収束が頗る遅い。そこで次式に着目しよう。

$$\beta(2) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}|}{(2r+2)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+2} = \text{Catalan} \quad (= 0.915965\dots)$$

これを用いて (1.2) を次のように変形すると収束が速くなる。

公式2・2・1'

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-2} \binom{2n+2r}{2s} E_{2s} \right\} \frac{|E_{2r}|}{(2n+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2r}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{E_{2n-2}}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} \text{Catalan} \quad (= 0.915965\dots) \quad (1.2')$$

例2' $\beta(6)$

例2と同じ計算を (1.2') で行った。級数を70項まで計算したところ、有効数字6桁が得られた。
m = 70;

$$b[n_] := \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^{n-2} \text{Binomial}[2n+2r, 2s] \text{EulerE}[2s] \right) \frac{\text{Abs}[\text{EulerE}[2r]]}{(2n+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2r}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{\text{EulerE}[2n-2]}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} \text{Catalan}$$

N[b[3]] N[DirichletL[4, 2, 6]]
 0.998685 0.998685

公式2・2・2

n を自然数とし、ベルヌイ数 B_{2r} 及びオイラー数 E_{2r} をそれぞれ

$$B_0=1, B_2=1/6, B_4=-1/30, B_6=1/42, B_8=-1/30, \dots$$

$$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, \dots$$

とするとき、 $0 < x \leq \pi/2$ について次式が成立する。

$$\beta(2n) = -\frac{1}{x} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_{2s} (2^{2s}-2) \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1}} \\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{B_{2s} (2^{2s}-2)}{(2s)! (2n+1+2r-2s)!} \right\} \frac{|E_{2r}| x^{2r}}{2r}$$

証明

公式1・2・3 (1・2) で次式が得られた。

$$\beta(2) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+2}}{(2r+3)!}$$

$$\beta(4) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^5} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+4}}{(2r+5)!} + \frac{x^2}{3!} \beta(2)$$

$$\beta(6) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^7} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+6}}{(2r+7)!} + \frac{x^2}{3!} \beta(4) - \frac{x^4}{5!} \beta(2)$$

$$\beta(8) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^9} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}| x^{2r+8}}{(2r+9)!} + \frac{x^3}{3!} \beta(6) - \frac{x^5}{5!} \beta(4) + \frac{x^3}{3!} \beta(2)$$

⋮

これらの $\beta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\beta(2n) = -\frac{1}{x} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s C_s x^{2s} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1-2s}} \\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{C_s}{(2n+1+2r-2s)!} \frac{|E_{2r}| x^{2r}}{2r}$$

ここで C_s はつぎのような有理数である。

$$C_0 = -1, \quad C_1 = \frac{1}{3!}, \quad C_2 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{3!3!}, \quad C_3 = \frac{1}{7!} - \left(\frac{1}{3!5!} + \frac{1}{5!3!} \right) + \frac{1}{3!3!3!}, \\ C_4 = \frac{1}{9!} - \left(\frac{1}{3!7!} + \frac{1}{5!5!} + \frac{1}{7!3!} \right) + \left(\frac{1}{3!3!5!} + \frac{1}{3!5!3!} + \frac{1}{5!3!3!} \right) - \frac{1}{3!3!3!3!}$$

⋮

実は、これらは $\csc x$ のテイラー級数の係数であり、2の冪と階乗とベルヌイ数とで次のように計算できる。

$$C_s = \frac{2^{2s}-2}{(2s)!} B_{2s} \quad s=0, 1, 2, \dots$$

かくてこれを上式に代入して与式を得る。

Note

$x=1/4$ のとき、この公式の収束速度は本章中で最速である。

2・3 奇数ベータの公式 ($\sec x$ 系)

公式2・3・1

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, \dots$ をオイラー数とし、 n を自然数とすると、 $0 < x \leq \pi/2$ について次式が成立する。

$$\beta(2n-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}| \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1}}$$

特に $x=\pi/2$ のとき、

$$\beta(2n-1) = \frac{\pi}{4} \frac{|E_{2n-2}|}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n-2}$$

証明

公式1・2・3 (1・2) で次式が得られた。

$$\beta(1) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} \quad (1.1)$$

$$\beta(3) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^3} + \frac{x^2}{2!} \beta(1)$$

$$\beta(5) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^5} + \frac{x^2}{2!} \beta(3) - \frac{x^4}{4!} \beta(1)$$

$$\beta(7) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^7} + \frac{x^2}{2!} \beta(5) - \frac{x^4}{4!} \beta(3) + \frac{x^6}{6!} \beta(1)$$

⋮

これらの $\beta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\beta(2n-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} C_s x^{2s} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1-2s}}$$

ここで C_s は 公式2・2・1 と同じ係数であり、 $C_s = (-1)^s \frac{E_{2s}}{(2s)!} = \frac{|E_{2s}|}{(2s)!}$ で与えら得れる。
よって、

$$\beta(2n-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}| \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1}}$$

この式はさらに次のように変形できる。

$$\beta(2n-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-2} \frac{|E_{2s}| \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} + \frac{|E_{2n-2}| \{(2r+1)x\}^{2n-2}}{(2n-2)!} \right\} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1}}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \beta(2n-1) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-2} \frac{|E_{2s}| \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1}} \\ &\quad + \frac{|E_{2n-2}| x^{2n-2}}{(2n-2)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} \end{aligned}$$

さらに (1.1) とマーダヴァの級数

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^1} = \beta(1) = \frac{\pi}{4}$$

を用いて

$$\beta(2n-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-2} \frac{|E_{2s}| \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1}} + \frac{\pi}{4} \frac{|E_{2n-2}| x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

よって $x=\pi/2$ のときには

$$\beta(2n-1) = \frac{\pi}{4} \frac{|E_{2n-2}|}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n-2}$$

公式2・3・2

n を自然数とし、 $B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, ... をベルヌイ数とすると、 $0 < x \leq \pi/2$ について次式が成立する。

$$\beta(2n-1) = -\frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_{2s} (2^{2s}-2) \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}}$$

証明

公式1・2・3 (1・2) で次式が得られた。

$$\beta(1) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^2}$$

$$\beta(3) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^4} + \frac{x^2}{3!} \beta(1)$$

$$\beta(5) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^6} + \frac{x^2}{3!} \beta(3) - \frac{x^4}{5!} \beta(1)$$

$$\beta(7) = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^8} + \frac{x^2}{3!} \beta(5) - \frac{x^4}{5!} \beta(3) + \frac{x^6}{7!} \beta(1)$$

⋮

これらの $\beta(k)$ を順次下の式に代入していくと次のようになる。

$$\beta(2n-1) = -\frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s C_s \{(2r+1)x\}^{2s} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}}$$

ここで C_s は 公式2・2・2 と同じ係数であり、 $C_s = \frac{2^{2s}-2}{(2s)!} B_{2s}$ で与えら得れる。よって、

$$\beta(2n-1) = -\frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_{2s} (2^{2s}-2) \{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \sin \{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}}$$

2・4 複素数ベータの公式 (*sech x* 系)

2・1 自然数ベータの公式 は容易に複素数化できる。

公式2・4・1

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61, E_8=1385, \dots$ をオイラー数とし、 p を $p \neq 1, 0, -1, -2, \dots$ なる複素数とし、 $\Gamma(p, x) = \int_x^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$ を不完全ガンマ関数とするとき、複素数 $x = u + vi$ s.t. $0 < |x| \leq \pi/2, u \geq 0$ について次式が成立する。

$$\beta(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\{p, (2r+1)x\}}{\Gamma(p)} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^p} + \frac{x^p}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-p}{2r} \frac{E_{2r} x^{2r}}{\Gamma(p+1+2r)}$$

特に $x = 1$ のとき

$$\beta(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p, 2r+1)}{\Gamma(p)} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^p} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-p}{2r} \frac{E_{2r}}{\Gamma(p+1+2r)}$$

証明

公式2・1・1 で次の自然数ベータが得られた。

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} + \frac{x^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{2r} \frac{E_{2r} x^{2r}}{(n+2r)!}$$

一方、指数和と不完全ガンマ関数について次の関係式が知られている。

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!} = \frac{\Gamma(n, x)}{\Gamma(n)} e^x$$

よってこれを上式に代入すれば

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\{n, (2r+1)x\}}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^n} + \frac{x^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{2r} \frac{E_{2r} x^{2r}}{(n+2r)!}$$

そして自然数 n を複素数 p に拡張し階乗をガンマ関数に置換すれば

$$\beta(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\{p, (2r+1)x\}}{\Gamma(p)} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^p} + \frac{x^p}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-p}{2r} \frac{E_{2r} x^{2r}}{\Gamma(p+1+2r)}$$

例 $\beta(1/2 + 12.98809801231i)$

$x = 1 + i$ としてこの計算を行った。級数を143項まで計算したところ、有効数字11桁が得られた。

$m = 143$

$$b[p, x] := \sum_{r=0}^m \frac{\text{Gamma}[p, (2r+1)x]}{\text{Gamma}[p]} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^p} + \frac{x^p}{2} \sum_{r=0}^m \frac{\text{Binomial}[-p, 2r] \text{EulerE}[2r] x^{2r}}{\text{Gamma}[p+1+2r]}$$

$N[b[1/2 + 12.98809801231i, 1 + i]] \quad N[\text{DirichletL}[4, 2, 1/2 + 12.98809801231i]]$
 $1.53477 \times 10^{-12} - 5.79803 \times 10^{-12} i \quad 1.19633 \times 10^{-12} - 4.99564 \times 10^{-12} i$

2012.04.13

K. Kono