4 完備化されたディリクレ・ベータ

4・1 対称関数等式

ディリクレ・ベータの関数等式も対称的な形に変換できる。

公式 4・1・1

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)\beta(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{2-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z) \tag{1.0}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{z}{2}\right)\beta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}-z}\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{2}\right)\beta\left(\frac{1}{2}-z\right) \tag{1.1}$$

証明

関数等式は次のようであった。

$$\beta(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-z}\cos\frac{\pi z}{2}\,\Gamma(1-z)\beta(1-z) \qquad z\neq 1,2,3,\cdots$$

ここで

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos\pi z}$$

より

$$\cos\frac{\pi z}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}$$

これを上に代入して

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-z}\frac{\pi\,\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}\beta(1-z)$$

さらに

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

より

$$\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} = \frac{2^{-z}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)$$

これを上に代入して

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-z}\frac{2^{-z}\pi}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)\\ &= \frac{2^{1-z}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{1-z}}\frac{2^{-z}\sqrt{\pi}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{1-z}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)\\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1-z}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)\end{aligned}$$

両辺に $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}$ を乗じて

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)\beta(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{2-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z) \tag{1.0}$$

次に、z を $z+1/2$ に置換すれば

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{z}{2}\right)\beta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}-z}\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{2}\right)\beta\left(\frac{1}{2}-z\right) \tag{1.1}$$

Note

公式 4･1･1 においては $2/\sqrt{\pi}$ が両辺に無駄に乗じられているように見える。この理由は次章で明らかになる。

4･2 完備化されたディリクレ・ベータ

公式 4･1･1 の左辺をそれぞれ

$$\omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{2.0}$$

$$\Omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{2.1}$$

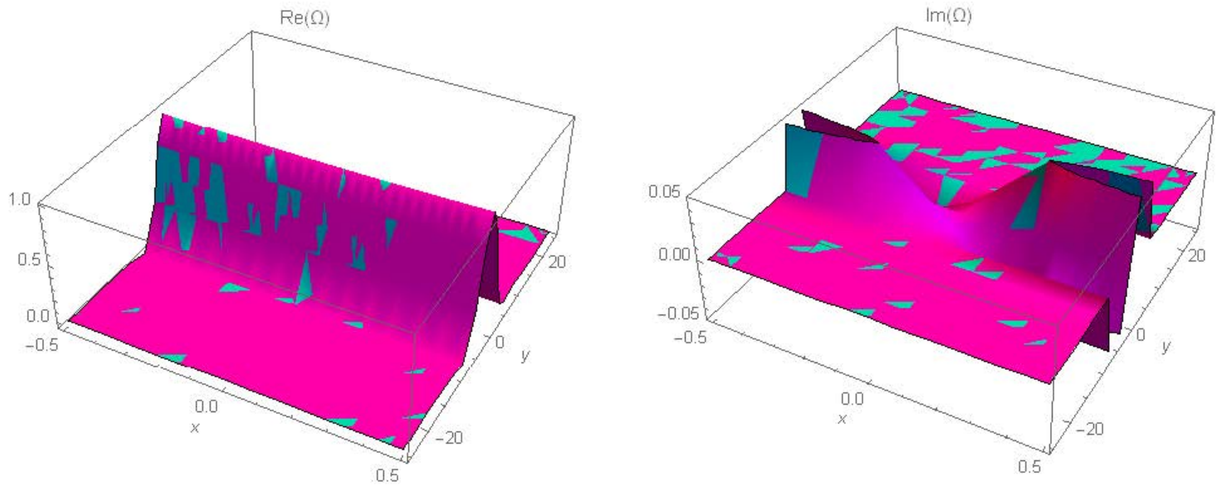
と置けば、公式 4･1･1 は次のように表される。

$$\omega(z)=\omega(1-z)$$
$$\Omega(z)=\Omega(-z) \tag{2.2}$$

これらは**完備化されたディリクレ・ベータ** と呼ぶことができる。$z=x+iy$ とするとき、$\omega(z)$ はその実数部が $x=1/2$ に対して線対称であり、$\Omega(z)$ はその実数部が $x=0$ に対して線対称である。本節では $\Omega(z)$ についてその性質を考察する。なお、以下の説明中の「**定理 7･X･Y**」は 全て「 **7 完備化されたリーマン・ゼータ** 」(リーマン・ゼータ関数 遍) の定理や系である。

4･2･1 完備化されたディリクレ・ベータの諸性質

$\Omega(z),\Omega(-z)$ の実数部と虚数部を3次元図に描けば次のようになる。$\Omega(z)$ がシアンで $\Omega(-z)$ がマゼンタである。



この図から次のことが見てとれる。

(1) 関数 $\Omega(z)$ は全複素平面上で正則である。特異点は何処にも見当たらない。

(2) 関数 $\Omega(z)$ は複素数 z に関して偶関数である。($\Omega(z)=\Omega(-z)$)

上図において $\Omega(z)$ (シアン)と $\Omega(-z)$ (マゼンタ)は重なってマダラに見えている。

(3) 実数部 $u(x,y)$ は x に関しても y に関しても偶関数である。(上左図参照。)

i.e. $\quad u(x,y) = u(x,-y) = u(-x,y)$

これらは $\Omega(z)$ の偶数性と複素共役性によるものである。(定理 7･2･3 (1))

(4) 虚数部 $v(x,y)$ は x に関しても y に関しても奇関数である。(上右図参照。)

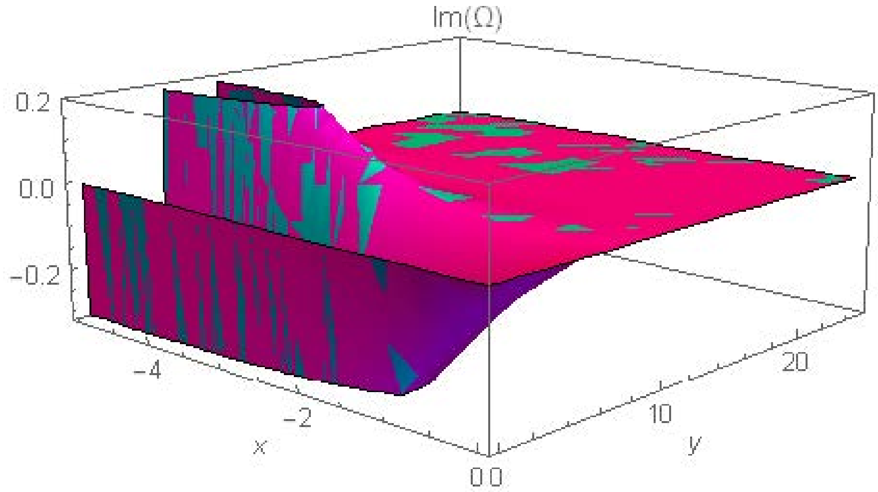
i.e. $\quad v(x,y) = -v(x,-y) = -v(-x,y)$

これらもまた $\Omega(z)$ の偶数性と複素共役性によるものである。(定理 7･2･3 (1))

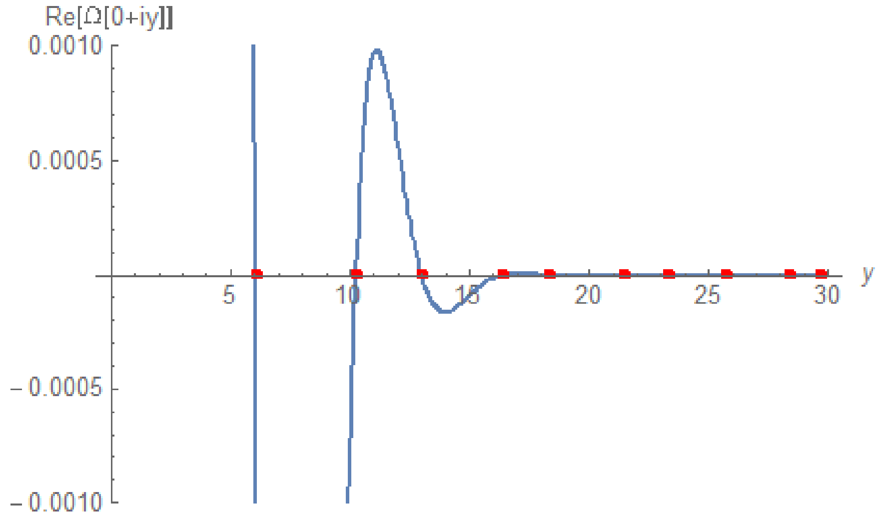
(5) 任意の x,y に対して $v(x,0)=0$, $v(0,y)=0$ である。

これは $\Omega(z)$ の偶数性と複素共役性によるものである。(系 7･2･3 (1))

上右図の $x=0$, $y=0$ での断面図を描いたのが次図である。両断面は $Im(\Omega)=0$ 上で一直線となっている。



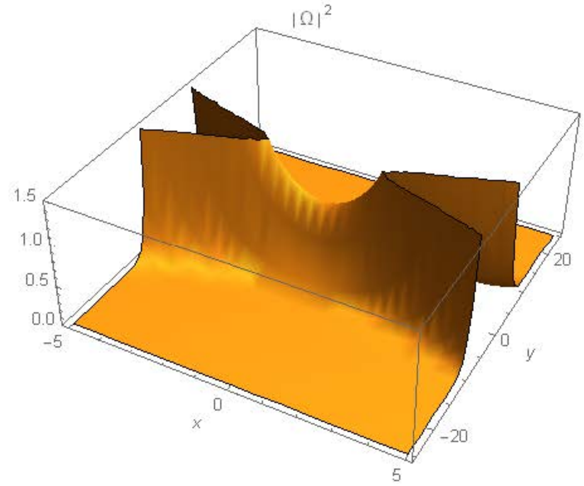
(6) 従って($v(0,y)=0$ *for any* y)、$u(0,y)=0$ の解は $\Omega(z)$ の零点となる。

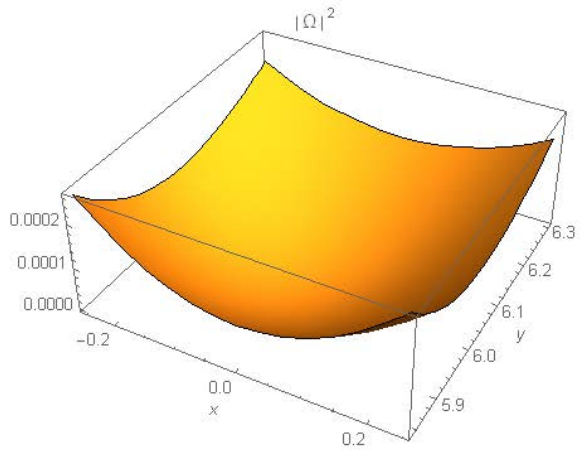


(7) $\Omega(z)$ の絶対値の2乗 $|\Omega(z)|^2$ は x に関しても y に関しても偶関数となる。

これは $\Omega(z)$ が偶関数であるからである。(定理 7･1･4) 複素共役性は要求されない。

これを3次元で示せば左図のとおりである。そして右図のような極小点が $x=0$ に沿って点在しているように見える。





以上の性質から、ディリクレ・ベータ関数の非自明な零点に関する次の重要な定理が得られる。

定理 4･2･1

ディリクレ・ベータ関数 $\beta(z)$ が 実数部が $1/2$ でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成る。

$$1/2+\alpha_1 \pm i\delta_1 \quad , \quad 1/2-\alpha_1 \pm i\delta_1 \qquad (0 < \alpha_1 < 1/2)$$

証明

$1/2+\alpha_1+i\delta_1$ が $\beta(z)$ の非自明な零点であることは $\alpha_1+i\delta_1$ が $\beta(1/2+z)$ の非自明な零点であることと同値である。ここで (2.1) を観察しよう。

$$\Omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z} \Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{2.1}$$

すると次のことが分る。

(1) $\beta\left(\frac{1}{2}+z\right)$ の自明な零点は $\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}$ の特異点と相殺され、

それらの点において $\Omega(z)$ は非ゼロ正則となる。

(2) $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2+z}$ と $\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}$ は零点を持たない。

以上の結果、$\beta(1/2+z)$ の非自明な零点と $\Omega(z)$ の零点は一致する。

(2.2) より $\Omega(z)=\Omega(-z)$ であるから、$\Omega(z)$ は偶関数である。そして、定理 7･2･2 *Note*1 で見たように、(2.1) を構成する関数は全て複素共役性を持つ。よって、公式 7･2･1 により、$\Omega(z)$ もまた複素共役性を持つ。すると 定理 7･2･4 (1) により、もし $\Omega(z)$ が実数部が0でない零点を持つならば、それは次の4個から成る。

$$\alpha_1 \pm i\delta_1 \quad , \quad -\alpha_1 \pm i\delta_1 \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

$\Omega(z)$ と $\beta(z)$ との関係から、このことは次と同値である。

$\beta(z)$ が 実数部が 1/2 でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成る。

$$1/2+\alpha_1 \pm i\delta_1 \quad , \quad 1/2-\alpha_1 \pm i\delta_1 \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

そして $0 < 1/2 \pm \alpha_1 < 1$ が既知であるから $0 < |\alpha_1| < 1/2$ 。これは定理と同値である。

2015.11.17
2018.04.08 Updated

Kano. Kono

宇宙人の数学