5　完備化されたディリクレ・ベータの因数分解

5・1 $\omega(z)$ のアダマール積表示

公式 5・1・1

完備化されたディリクレ・ベータ関数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{1.d}$$

$\beta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ 、γ をオイラー・マスケロニの定数とするとき、$\omega(z)$ は次のようなアダマール積で表される。

$$\omega(z) = e^{\left(\frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.0}$$

$$\omega(z) = e^{\left(\frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

証明

ゼータ関数におけると同様に、(1.d) のアダマール積も次のように表せることが知られている。

$$\omega(z) = A\,e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.p}$$

(1.d) において $z=0$ と置くと

$$\omega(0) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+0}\Gamma\left(\frac{1+0}{2}\right)\beta(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

(1.p) において $z=0$ と置くと $\omega(0)=A$ 。よって、$A=1$ を得る。かくして

$$\omega(z) = e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.p'}$$

次に、(1.d) と (1.p') より

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = e^{Bz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

これより、

$$\beta(z) = \frac{e^{Bz}}{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

両辺の対数を取ると

$$\log\beta(z) = Bz - \log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - z\log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \log\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) + \log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

ここで

$$\log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z_k}$$

であるから

$$\log\beta(z) = Bz - \log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - z\log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \log\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z_k}$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{\beta'(z)}{\beta(z)} = B - \log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\{(z+1)/2\}}{\Gamma\{(z+1)/2\}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1/z_k}{1-z/z_k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k}$$

i.e.

$$\frac{\beta'(z)}{\beta(z)} = B - \log 2 + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\{(z+1)/2\}}{\Gamma\{(z+1)/2\}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k}\right)$$

ここで $z=0$ と置くと、

$$\frac{\beta'(0)}{\beta(0)} = B - \log 2 + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} \tag{1.w}$$

他方、Wolfram MathWorld Dirichlet Beta Function によれば、

$$\beta'(0) = \log\left\{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)/\left(2\pi\sqrt{2}\right)\right\}$$

これと $\beta(0)=1/2$ とから

$$\frac{\beta'(0)}{\beta(0)} = 4\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - 3\log 2 - 2\log\pi$$

また、Wolfram MathWorld Gamma Function によれば、

$$\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - 2\log 2 = -\gamma - 2\log 2$$

これらを (1.w) の両辺に代入すると

$$4\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - 3\log 2 - 2\log\pi = B - \log 2 + \frac{1}{2}\log\pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2$$

これより

$$B = 4\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - 3\log 2 - \frac{5}{2}\log\pi - \frac{\gamma}{2}$$

更に

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\pi$$

を用いて

$$B = \frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

これを (1.p') に代入して (1.0) を得る。

そして非自明な零点を $z_k = x_k \pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、

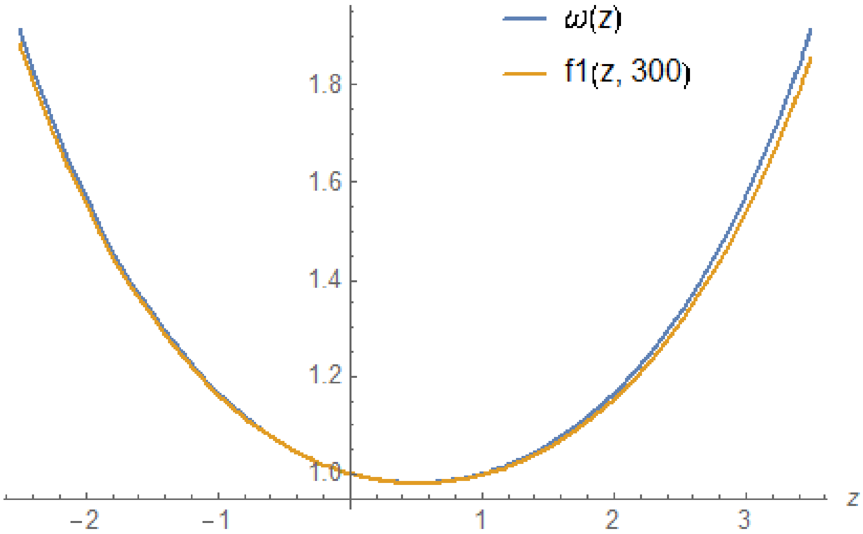
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

これを用いて (1.1) を得る。

もし、$x_n=1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ ならば (1.1) は

$$\omega(z)=e^{\left(\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_n^2}+\frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_n^2}} \qquad (1.1')$$

数式処理ソフト*Mathematica* にディリクレ・ベータの臨界直線上の零点300個を読み込み、(1.1') の両辺をそれぞれ描くと次のようになる。両辺は中心部ではほぼ重なっている。



(1.1) の特殊値として、次節で用いられる重要な公式が得られる。

公式 5・1・2 (特殊値)

ディリクレ・ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=e^{4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}}=1.08088915\cdots \qquad (1.2)$$

証明

(1.1) に $z=1$ を与えれば、

$$\omega(1)=e^{\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=1$$

これより

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}}=e^{4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}}=1.08088915\cdots \tag{1.2}$$

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ 、ならば (1.2) は

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2\cdot 1/2-1}{(1/2)^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2\cdot 1/2}{(1/2)^2+y_r^2}}=e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}}=e^{4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}}$$

これより

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_n^2}=4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}=0.07778398\cdots \tag{1.2'}$$

(1.0) の特殊値として、次の公式が得られる。

公式 5･1･3 (特殊値)

ディリクレ・ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\}=\omega(-1)=1.16624361\cdots \tag{1.3}$$

証明

「 8 完備化されたリーマン・ゼータの因数分解 」(リーマン・ゼータ関数) 中の 公式 8･1･3 の証明と同様である。

試みに、臨界線上の零点 10000 個を使って (1.3) の左辺を計算したところ、両辺は小数点以下2桁まで一致した。

```
y := ReadList["BetaZeros.prn", Number]

g[m_] := Product[(1 - 1/(1/2 + i y[[n]])^2) (1 - 1/(1/2 - i y[[n]])^2), {n, 1, m}]
N[g[10000]]
1.16582 + 0. i
```

5･2 実数部が 1/2 でない非自明零点

「４ 完備化されたディリクレ･ベータ 」定理 4･2･1 によれば、もし ディリクレ･ベータ関数 $\beta(z)$ が 実数部が 1/2 でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成らねばならない。

$$1/2+\alpha_s \pm i\delta_s \;,\; 1/2-\alpha_s \pm i\delta_s \qquad (0<\alpha_s<1/2)$$

本節では、実数部が 1/2 である非自明な零点と実数部が 1/2 でない非自明零点が混在する場合、前節の諸式がどのように表されるか考察する。

Lemma 5･2･1

γ をオイラー･マスケロ二の定数、ディリクレ･ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,\cdots$ これらのうち実数部が 1/2 であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が 1/2 でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\delta_s \; (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、公式 5･1･1 (1.1) は次のように表される。

$$\omega(z) = e^{\left(4\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)-3\log 2-\frac{5}{2}\log\pi-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$
$$\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}\right\}e^{\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}}$$
$$\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}\right\}e^{\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}} \tag{2.1}$$

証明

「８ 完備化されたリーマン･ゼータの因数分解 」(リーマン･ゼータ関数) 中の *Lemma* 8･2･1 の証明と同様である。

定理 5･2･2

γ をオイラー･マスケロ二の定数、ディリクレ･ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,\cdots$ これらのうち実数部が 1/2 であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が 1/2 でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\delta_s \; (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}\right\} \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}=0.07778398\cdots \tag{2.4}$$

証明

「８ 完備化されたリーマン･ゼータの因数分解 」(リーマン･ゼータ関数) 中の 定理 8･2･2 の証明と同様である。

話が少しわき道に逸れるが、定理の (2.2) を用いて、次の特殊値が得られる。

公式 5･2･3 (特殊値)

ディリクレ･ベータ関数の非自明な零点を$x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=1 \tag{2.5+}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right)=\omega(-1)=1.1662436\cdots \tag{2.5-}$$

証明

「 8 完備化されたリーマン･ゼータの因数分解 」(リーマン･ゼータ関数) 中の 公式 8･2･3 の証明と同様である。

試みに、既知の非自明零点 10000 個を使って (2.5-) の左辺を計算したところ、右辺と小数点以下2桁まで一致した。

```
y := ReadList["BetaZeros.prn", Number]
```

$$g_+[m\_] := \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{1/2+i\,y[[n]]}\right)\left(1+\frac{1}{1/2-i\,y[[n]]}\right)$$

```
N[g+[10000]]
1.16582 + 0. i
```

さて、本題に戻ろう。定理 5･2･2 を用いて、非常に重要な次の定理が得られる。

定理 5･2･4

γ をオイラー･マスケロ二の定数、ディリクレ･ベータ関数の非自明な零点を$x_n+iy_n \quad n=1,2,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が 1/2 でない非自明零点は存在しない。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_n^2}=4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}=0.07778398\cdots \tag{1.2'}$$

証明

非自明零点 $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ は現存するが、この他に $1/2+\alpha_s\pm i\delta_s$, $1/2-\alpha_s\pm i\delta_s$ $(0<\alpha_s<1/2)$ なる非自明零点が存在すると仮定する。すると 定理 5･2･2 (2.3), (2.4) より次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}\right\}$$
$$=4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}$$

ここで、$0<\alpha_s<1/2$ と任意の実数 δ_s に対して

$$\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}=\frac{1/2-2\alpha_s^2+2\delta_s^2}{\left\{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2\right\}\left\{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2\right\}}>0$$

よって、

$$\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}\right\} > 0 \qquad for\ \ 0<\alpha_s<1/2$$

かくて

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} < 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} \neq 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}$$

以上の対偶命題として、本定理が成立する。

Note

この定理は等式 (1.2') がリーマン仮説と同値であることを示している。しかし(1.2')の証明のためには、非自明零点 $1/2\pm iy_r\ \ r=1,2,3,\cdots$ の虚数部 y_r が公式として得られなければならない。

数式処理ソフト *Mathematica* により、臨界線上の零点 10000 個を使って (1.2') の両辺を計算したところ、両辺は小数点以下3桁まで一致した。

```
y := ReadList["BetaZeros.prn", Number]
γ := EulerGamma
```

$$\texttt{gl[m\_]} := \sum_{r=1}^{m}\frac{1}{1/4+\texttt{y[[r]]}^2} \qquad \texttt{gr} := 4\,\texttt{Log}\left[\texttt{Gamma}\left[\frac{3}{4}\right]\right]+\frac{\gamma}{2}+\texttt{Log[2]}-\frac{3\,\texttt{Log}[\pi]}{2}$$

```
N[gl[10000]]
0.0776004
```

```
N[gr]
0.077784
```

5･3 $\omega(z)$ の因数分解

公式 5･1･1（$\omega(z)$ のアダマール積表示）は完備化されたベータ関数 $\omega(z)$ がその非自明な零点で不完全に因数分解されたものである。ところが、定理 5･2･2 を用いれば補正項が消滅し、$\omega(z)$ がその非自明な零点で完全に因数分解される。

定理 5･3･1 （$\omega(z)$ の因数分解）

ディリクレ･ベータ関数を $\beta(z)$、その非自明零点を $z_n = x_n \pm i y_n \quad n=1,2,3,\cdots$、そして完備化されたベータ関数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

すると、$\omega(z)$ は次のように因数分解される。

$$\omega(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2} + \frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

証明

公式 5･1･1 (1.1) より

$$\omega(z) = e^{\left(\frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2} + \frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \cdot e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

他方、定理 5･2･2 (2.4) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\gamma}{2} + \log 2 - \frac{3\log\pi}{2}$$

これより

$$e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} = e^{\left(4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\gamma}{2} + \log 2 - \frac{3\log\pi}{2}\right)z}$$

これを上の右辺に代入すれば

$$\omega(z) = e^{\left(\frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2} + \frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)$$

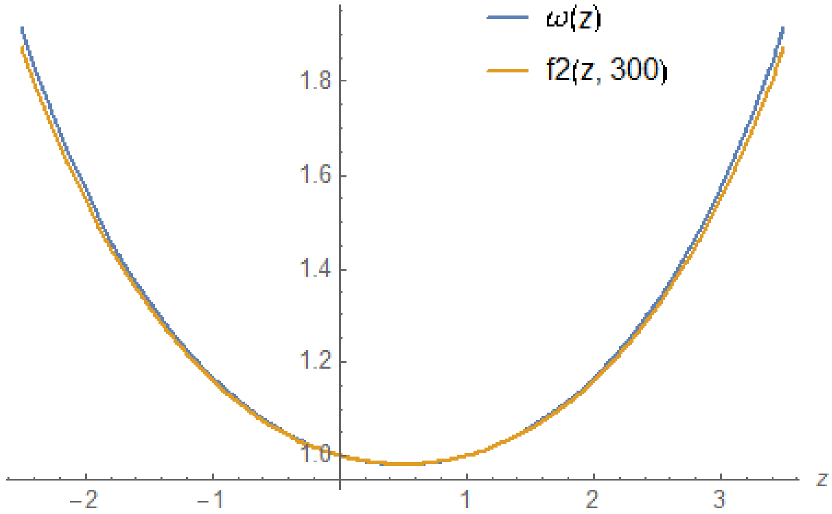
$$\times e^{\left(4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\gamma}{2} + \log 2 - \frac{3\log\pi}{2}\right)z}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2} + \frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ ならば (3.1) は

$$\omega(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{1/4+y_n^2} + \frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right) \tag{3.1'}$$

臨界線上の零点 300 個を使って (3.1') の両辺をそれぞれ描けば次のようになる。これは公式 5･1･1 の (1.1') の図 と全く同じである。



5・4 $\Omega(z)$ の因数分解

定理 5・3・1 において z を $z+1/2$ で置換すれば、偶関数である完備化されたベータ関数 $\Omega(z)$ が得られる。

定理 5・4・1 （$\Omega(z)$ の因数分解 ）

ディリクレ・ベータ関数を $\beta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたベータ関数が次のようであるとする。

$$\Omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z} \Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、$\Omega(z)$ は次のように因数分解される。

$$\Omega(z) = \Omega(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\} \tag{4.1}$$

但し、$\Omega(0) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.98071361\cdots$

(4.1_0)

証明

定理 5・3・1 より

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

$$\omega(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \tag{3.1}$$

最初の式において z を $1/2+z$ に置換すると、

$$\omega\left(\frac{1}{2}+z\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+z\right) =: \Omega(z)$$

$z=0$ をこれに代入すれば

$$\Omega(0) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.98071361\cdots$$

(3.1) において z を $1/2+z$ に置換すると、

$$\omega\left(\frac{1}{2}+z\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}\left(\frac{1}{2}+z\right)+\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\left(\frac{1}{2}+z\right)^2\right\}$$

i.e.

$$\omega\left(\frac{1}{2}+z\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

$\omega(1/2+z) = \Omega(z)$ であるから

$$\Omega(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} \left\{ 1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2} + \frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2} \right\}$$

$z=0$ をこれに代入すれば

$$\Omega(0) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2}$$

これを $\Omega(z)$ の右辺に代入して (4.1) を得る。

Lemma 5･4･2

定理 5･4･1 (4.1) の内、実数部 x_n が $1/2$ である因数の積 $\Omega_h(z)$ は次のように表される。

$$\Omega_h(z) = \Omega_h(0) \prod_{r=1} \left(1+\frac{z^2}{y_r^2} \right) \tag{4.2}$$

$$\text{但し、} \Omega_h(0) = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} \tag{4.2$_0$}$$

証明

定理 5･4･1 において x_n の一部を $1/2$ に置換して、直ちに与式を得る。

Note

$\Omega(z)=\Omega_h(z)$ であろう と言うのがリーマン仮説である。

Lemma 5･4･3

定理 5･4･1 (4.1) の内に実数部 x_n が $1/2$ でない因数が存在すると仮定せよ。すると2つの実数を α_s , δ_s s.t. $0<\alpha_s<1/2$ & $|\delta_s|>\sqrt{1/8}$ とするとき、それらの因数の積 $\Omega_\alpha(z)$ は次のように表される。

$$\Omega_\alpha(z) = \Omega_\alpha(0) \prod_{s=1} \left\{ 1+\frac{2(\delta_s^2-\alpha_s^2)z^2}{(\alpha_s^2+\delta_s^2)^2} + \frac{z^4}{(\alpha_s^2+\delta_s^2)^2} \right\} \tag{4.3}$$

$$\text{但し、} \Omega_\alpha(0) = \prod_{s=1} \frac{\alpha_s^2+\delta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2} \frac{\alpha_s^2+\delta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2} < 1 \tag{4.3$_0$}$$

証明

「 8 完備化されたリーマン･ゼータの因数分解 」(リーマン･ゼータ関数) 中の *Lemma* 8･4･3 の証明と同様である。

Note

条件式 $|\delta_s|>\sqrt{1/8}$ は妥当である。何故ならば、$0<\alpha_s<1/2$ & $|\delta_s|\le\sqrt{1/8}$ の領域に $\beta(z)$ の零点は存在しないからである。

定理 5•4•4

ディリクレ•ベータ関数を $\beta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が $1/2$ でない非自明零点は存在しない。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.98071361\cdots \tag{4.4$_0$}$$

証明

非自明零点 $1/2 \pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ は現存するが、この他に $1/2+\alpha_s \pm i\delta_s$, $1/2-\alpha_s \pm i\delta_s$ $\left(0<\alpha_s<1/2 \ \ \& \ \ |\delta_s|>\sqrt{1/8}\right)$ なる非自明零点が存在すると仮定する。

すると 定理 5•4•1 、*Lemma* 5•4•2 、*Lemma* 5•4•3 より次式が成立する。

$$\Omega(z)=\Omega_h(z)\Omega_\alpha(z)$$

$$=\Omega(0)\prod_{r=1}\left(1+\frac{z^2}{y_r^2}\right)\cdot\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\left(\delta_s^2-\alpha_s^2\right)z^2}{\left(\alpha_s^2+\delta_s^2\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\alpha_s^2+\delta_s^2\right)^2}\right\} \tag{4.1'}$$

$$\Omega(0)=\Omega_h(0)\Omega_\alpha(0)$$

$$=\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2}\cdot\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\delta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\delta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=0.98071361\cdots \tag{4.1'$_0$}$$

そして *Lemma* 5•4•3 によれば、$0<\alpha_s<1/2 \ \ \& \ \ |\delta_s|>\sqrt{1/8}$ のとき

$$\prod_{s=1}\frac{\alpha_s^2+\delta_s^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}\frac{\alpha_s^2+\delta_s^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}<1 \tag{4.3$_0$}$$

であったから、(4.1'$_0$) より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} > \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right)$$

i.e.

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} \neq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.98071361\cdots$$

以上の対偶命題として、本定理が成立する。

数式処理ソフト *Mathematica* により、 臨界線上の零点 10000 個を使って (4.4$_0$) の両辺を計算したところ、両辺は小数点以下4桁まで一致した。

```
y := ReadList["BetaZeros.prn", Number]
Ω0[m_] := Product[y[[r]]^2 / (1/4 + y[[r]]^2), {r, 1, m}]      Ω[0] := (2/Sqrt[π])^(3/2) Gamma[3/4] DirichletBeta[1/2]
N[Ω0[10000]]                                                    N[Ω[0]]
0.980759                                                        0.980714
```

cf.

(4.4$_0$) の平方根を取ると次のようになる。これもまたリーマン仮説と同値である。

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{y_r}{\sqrt{1/4+y_r^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/4} \sqrt{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.99030985\cdots \tag{4.5}$$

左辺の各因数は 非自明な零点 $z_r = 1/2 + i\,y_r$ を極座標で表示したときの虚数部である。即ち、

$$\prod_{r=1}^{\infty} \sin\theta_r = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/4} \sqrt{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.99030985\cdots \qquad (4.5_\theta)$$

$\beta(z)$ の零点のデータ

ディリクレ・ベータ関数 $\beta(z)$ の臨界直線上の零点は次のウェブサイトからダウンロードした。ウェブマスターに深く謝意を表する。

Tables of approximate values of the first zeros on the critical line of some primitive Dirichlet L-series

2018.04.11

Kano Kono

宇宙人の数学