6 ディリクレ・ベータの臨界線上の零点

6・1 符号関数による計算

6・1・1 $\Omega(z)$ 関数による計算

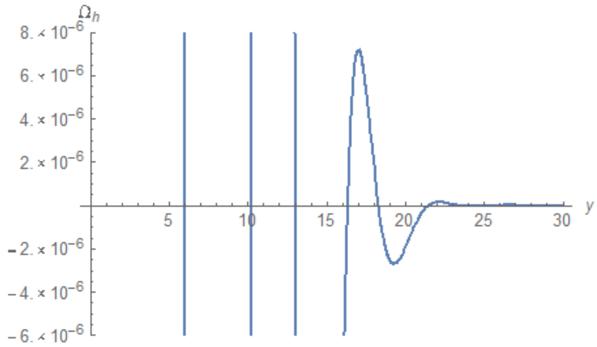
「４ 完備化されたディリクレ・ベータ 」によると、$\Omega(z)$は次のようであった。

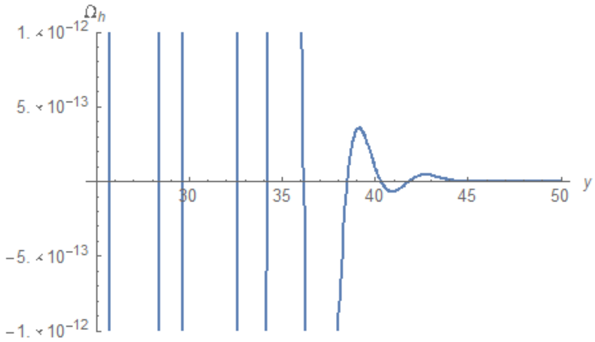
$$\Omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+z\right) \tag{1.0z}$$

そして 4・2・1 によれば、この関数の零点は全てディリクレ・ベータ $\beta(1/2+z)$ の非自明な零点に一致している。従って、$z=0+iy$ と置けば、

$$\Omega_h(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+iy}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{1.0y}$$

この関数の零点は全てディリクレ・ベータ $\beta(z)$ の臨界線上の零点になる。そこでこれを描いてみると次のようになる。





左図は $y=30$ まで描いているがこの付近の零点は判別できない。右図はこれを拡大して $y=25$ から $y=50$ まで描いているがやはりこの付近の零点は判別できない。

それでも *Mathematica* の場合、$y=917$ 程度までは拡大率を上げて何とか零点を見つけることができるが、$y=917$ を超えると作図が出来なくなる。つまり、$\Omega(z)$ 関数は解析的に非常に優れた性質を持つ半面、数値計算には不向きである。

6・1・1 符号関数による計算

この原因は y が大きいところにおける $\Omega_h(y)$ の関数値が余りにも小さいことであった。それならば、関数値を大きくしてやれば良いと考えるのは自然な発想である。そこで、関数 $\Omega_h(y)$ を正規化し、これを**符号関数**と呼ぶことにする。即ち、

$$sgn(y) = -\frac{\Omega_h(y)}{|\Omega_h(y)|}$$

「４ 完備化されたディリクレ・ベータ」4・2・1 (5) によれば、任意の実数 y について $Im\{\Omega_h(y)\}=0$ であるから、

$$sgn(y) = -\frac{\Omega_h(y)}{|\Omega_h(y)|}$$

$$= -\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2+iy} \Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2+iy} \Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|}$$

ここで、

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2+iy} \Big/ \left|\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2+iy}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \Big/ \left|\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy}$$

$$\left(\because \ \left|(2/\sqrt{\pi})^{iy}\right| = 1\right)$$

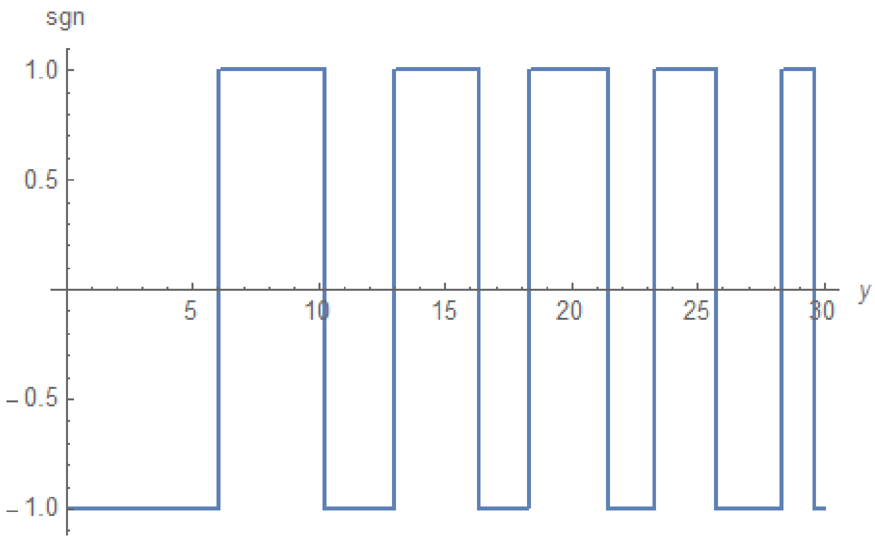
であるから、

$$sgn(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|} \tag{1.1}$$

Note 描画時の注意

(1.1) の分子は理論上は実数である。しかし数値計算上は微小な虚数を含む。数値を求めるときは虚数部を無視すれば問題ないが、描画時は $sgn(y)$ が複素数とみなされて描画できないことがある。その場合は、$Re[sgn(y)]$ として描画すれば良い。

この関数はその絶対値がに1であるから、$\Omega_h(y)$ の零点を判別し易いに違いない。実際、これを描くと次のようになる。

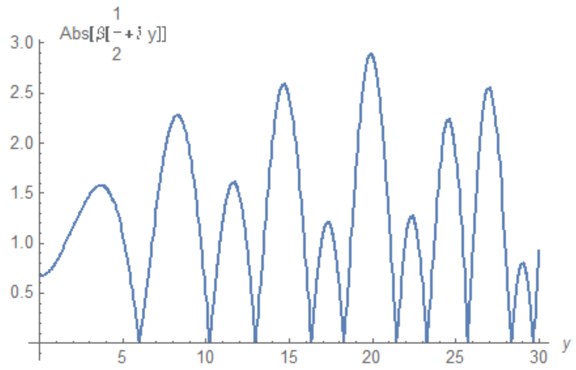


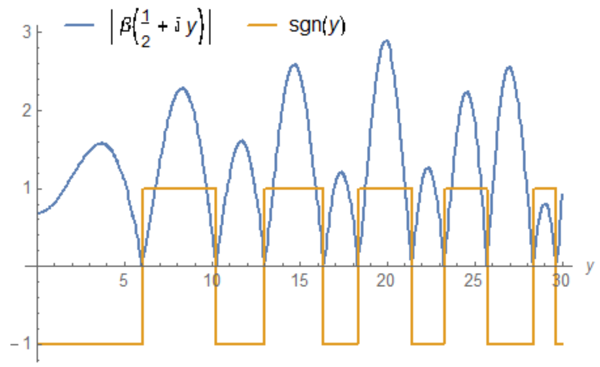
この関数により零点のおおよその位置を見つけた後、具体的な零点の値は $\beta(1/2+iy)$ から直接求める。例えば、$y=28$ 付近の零点の場合、*Mathematica* の *FindRoot* 関数を用いて次のように求める。(虚数部は無視。)

$$\text{FindRoot}\left[\beta\left[\frac{1}{2} + i\, y\right], \{y, 28\}\right] \qquad \{y \to 28.3596 + 6.63172 \times 10^{-16}\, i\}$$

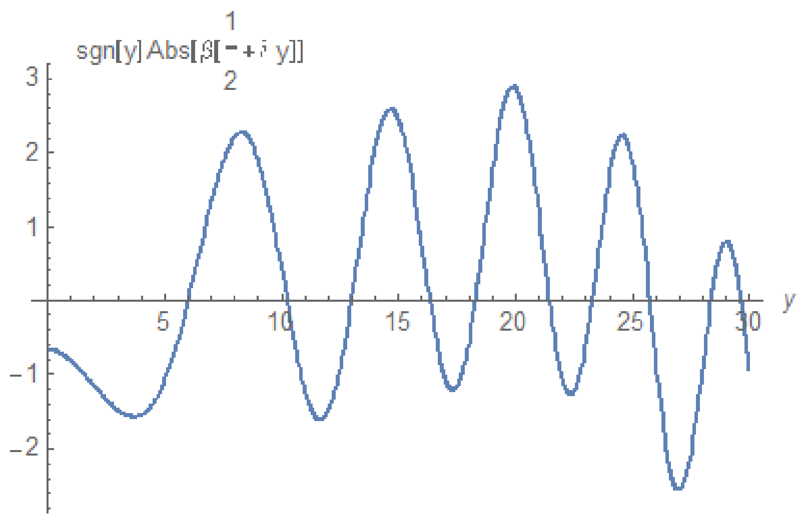
6·2 $|\beta(1/2+iy)|$ の符号反転

ディリクレ・ベータ関数 $\beta(1/2+iy)$ の絶対値を描いて見ると左図のようである。これに前節の符号関数 $sgn(y)$ を重ねて描くと右図のようになる。





注目すべきは右図である。負になって欲しい区間の $sgn(y)$ の値が正確に負である。両者の積は滑らかな関数になることが期待される。実際、両者の積を描くと次のようになる。



当然ながら、この関数の零点は全てディリクレ・ベータ $\beta(z)$ の臨界線上の零点になる。しかも絶対値は $\Omega_h(y)$ よりもはるかに大きい。

B 関数

この積を ***B*** 関数と呼ぶことにすれば、それは以下のように表される。

$$B(y) = sgn(y)\left|\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|$$

これに前節の

$$sgn(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|} \tag{1.1}$$

を代入すれば、

$$B(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|} \left|\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|$$

これより

$$B(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\right|}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{2.1}$$

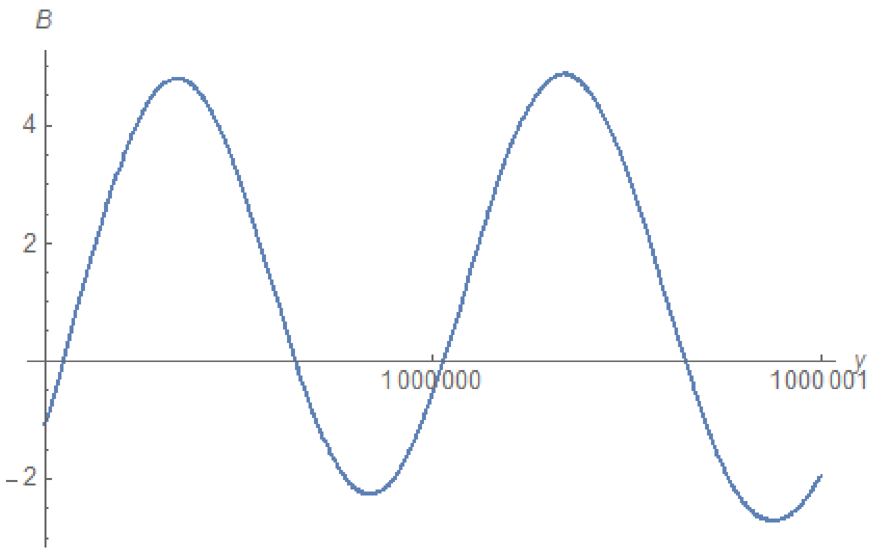
この関数を用いれば、曲線と y 軸との交点によって $\beta(z)$ の臨界線上の零点を探すことができる。

Note 描画時の注意

(2.1) の分子は理論上は実数である。しかし数値計算上は微小な虚数を含む。数値を求めるときは虚数部を無視すれば問題ないが、描画時は $B(y)$ が複素数とみなされて描画できないことがある。その場合は、$Re\,[B(y)]$ として描画すれば良い。

y = 100 万 付近の零点

(2.1) と *Mathematica* を用いてこの付近を描画してみると、次のようになる。



この図の中央付近の零点を求めると、

```
SetPrecision[FindRoot[B[y], {y, 1 000 000}], 20]
{y → 1.0000000279752088245 × 10^6 - 1.4374 × 10^-10 ⅈ}

N[DirichletBeta[1/2 + ⅈ 1 000 000.0279752088245], 20]
-3.5 × 10^-10 + 1.33 × 10^-9 ⅈ
```

(2.1) と *Mathematica* を用いて y=10,000,000 以上での零点を計算するのは時間的に困難である。

6・3 リーマン・ジーゲル型 B 関数

前節の B 関数からリーマン・ジーゲル型の B 関数を導出することが出来る。そのため、先ず、*Lemma* を1つ用意する。これは「 11 リーマン・ゼータの臨界線上の零点 」からの再掲である。

Lemma 6.3.1(再掲)

$f(z)$を領域 D 上に定義された複素関数とするとき、次式が成立する。

$$e^{i\,Im\log f(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

リーマン・ジーゲル型 B 関数

前節より、

$$B(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\right|}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{2.1}$$

ガンマ関数に *Lemma* 6.3.1 を適用すれば、

$$B(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} e^{i\,Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

$$= -e^{i\left[Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\} - \frac{y}{2}\log\frac{\pi}{4}\right]}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

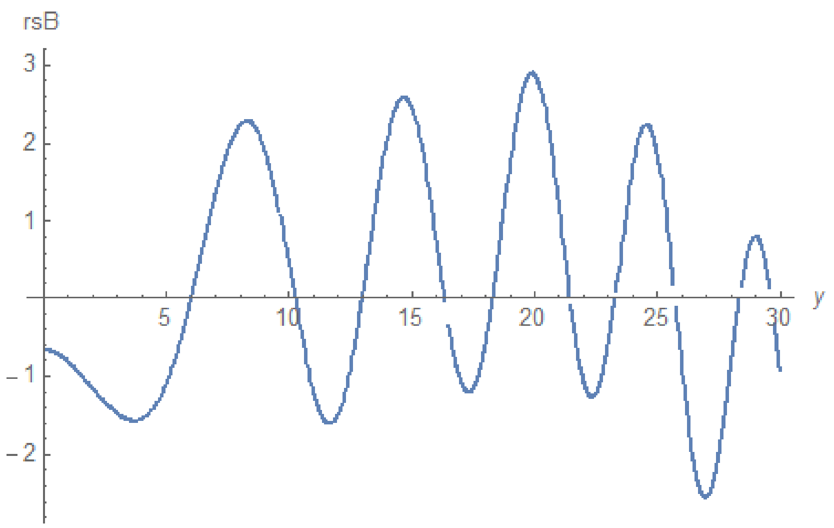
ここで

$$\theta(y) = Im\,\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\} - \frac{y}{2}\log\frac{\pi}{4}$$

と置けば、

$$B(y) = -e^{i\theta(y)}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \tag{3.1}$$

これがリーマン・ジーゲル型の B 関数である。これを描くと次のようになる。



この図は 前節の図 と同じであることが分かる。

Note

(3.1) と*Mathematica* を用いて$y=10{,}000{,}000$ 以上の零点を計算するのは時間的に困難である。これより大きなy での零点を高速で計算するためには、ゼータ関数におけるリーマン・ジーゲルの漸近公式のごときものが必要である。

2019.03.20

Kano Kono

宇宙人の数学