

## 7 ディリクレ・ベータの絶対値

### 7.1 ディリクレ・ベータ関数

#### 7.1.1 定義

ディリクレ・ベータ関数  $\beta(z)$  は半平面  $\text{Re}\{\beta(z)\} > 0$  では次のように定義される

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^z} \quad (1.0)$$

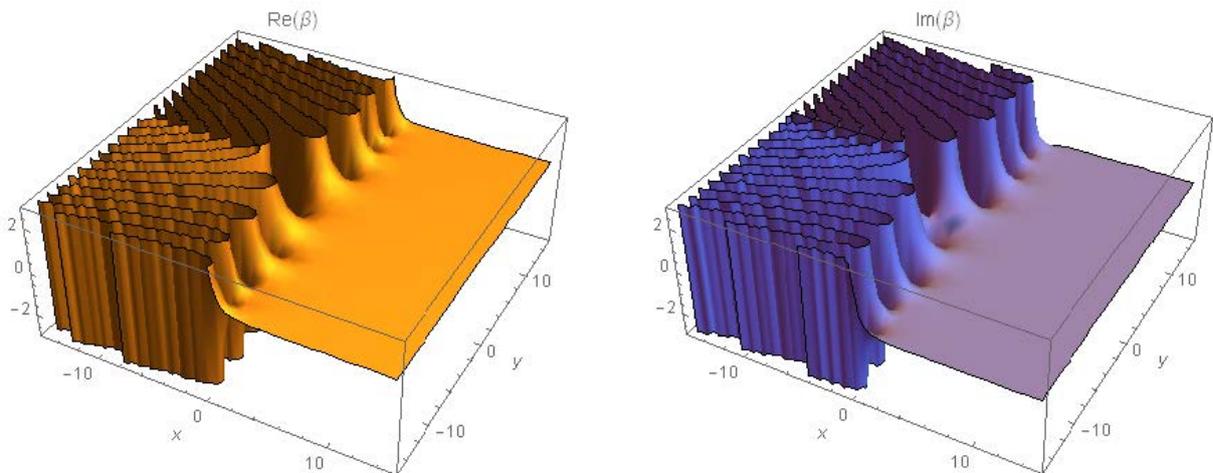
この級数は何らかの加速法を施すことにより簡単に全複素平面に解析接続できる。最も簡単なのは次式で示されるオイラー変換である。

$$\beta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^z} \quad (1.1)$$

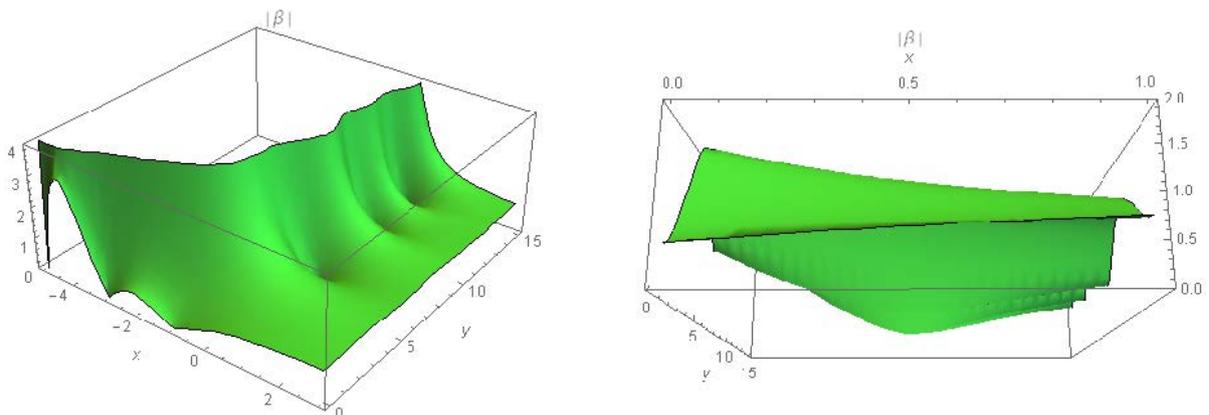
(1.0) と (1.1) は  $\text{Re}\{\beta(z)\} > 0$  では同じものである。(1.0) は収束軸  $\text{Re}\{\beta(z)\} = 0$  より左を記述出来ないが、(1.1) はこの左側も記述できる。それ故 (1.1) でディリクレ・ベータ関数  $\beta(z)$  を定義することができる。

#### 7.1.2 概要

ディリクレ・ベータ関数  $\beta(x+iy)$  の実数部と虚数部の3D図は次のようである。



また、絶対値の3D図は次のとおりである。左図では先ず  $\beta(z)$  の自明な零点が  $x$  軸上に沿って観察される。右図は左図を下から覗いた図である。 $\beta(z)$  の零点が  $x=1/2$  に沿って並んでいるのが見える。ディリクレ・ベータ関数とは異なり、 $x=1$  上には零点が見当たらない。



これらの図に見られるように、ディリクレ・ベータ関数  $\beta(z)$  は次の2種類の零点を持つ。

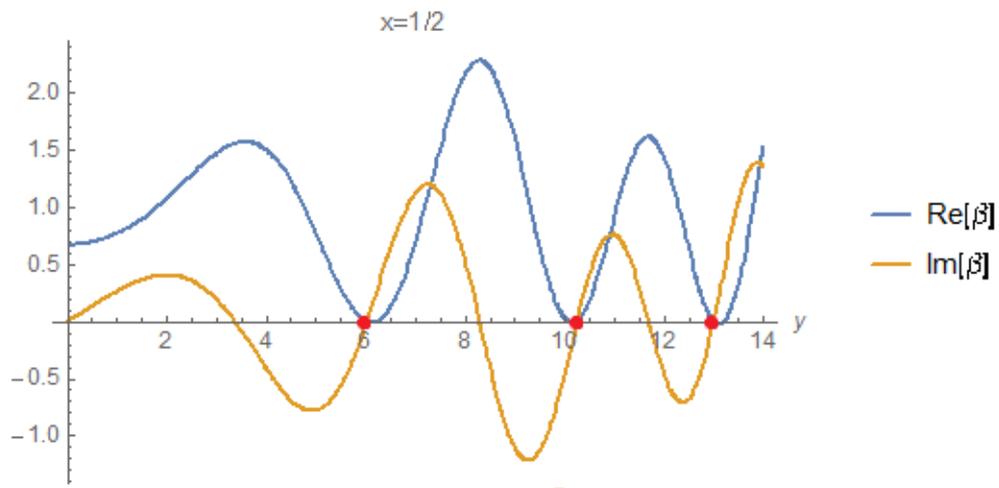
(1) 自明な零点  $-1, -3, -5, -7, \dots$

(2) 非自明な零点  $1/2 \pm i6.020\dots, 1/2 \pm i10.2437\dots, 1/2 \pm i12.9880\dots, \dots$

非自明な零点 (1) は **臨界領域** と呼ばれる  $0 < x < 1$  内に存在している。しかもそれらは  $x=1/2$  を軸として左右対称に存在すべきことが証明されている。(04 完備化されたディリクレ・ベータ定理 4.2.1 参照)。そして、幸いなことに、この臨界領域は級数 (1.0) の収束域内に含まれている。

### 7.1.3 非自明な零点

臨界線  $x=1/2$  におけるディリクレ・ベータ関数  $\beta(z)$  の実数部と虚数部の図は次のようである。

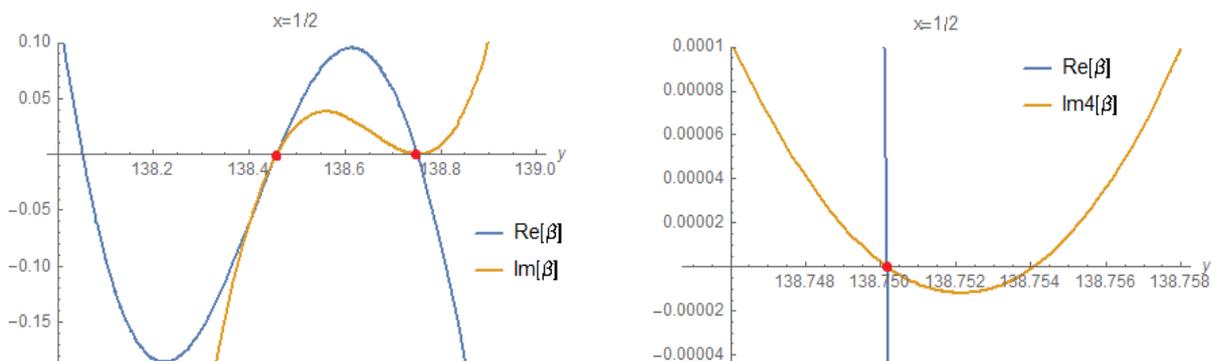


青が実数部で橙が虚数部である。また、赤の点は非自明な零点である。これを観察すると、

- (1) 実数部は負の余弦曲線に似ており、虚数部は正弦曲線に似ている。
- (2) 実数部の極値点は虚数部の零点に近いが零点ではない。
- (3) 非自明な零点は実数部の極小点に近いが極小点ではない。
- (4) 非自明な零点は虚数部の上り坂の零点(周期の終点)である。

### 下り坂の零点

(3) と (4) には例外が存在する。例えば、 $y=139$  付近の図を描くと左図のようである。左図の右側の零点(赤点)付近を拡大したのが右図である。非自明な零点  $138.7501\dots$  は実数部の極大点に近く且つ虚数部の下り坂の零点である。



#### 7・1・4 ディリクレ・ベータ級数の特徴

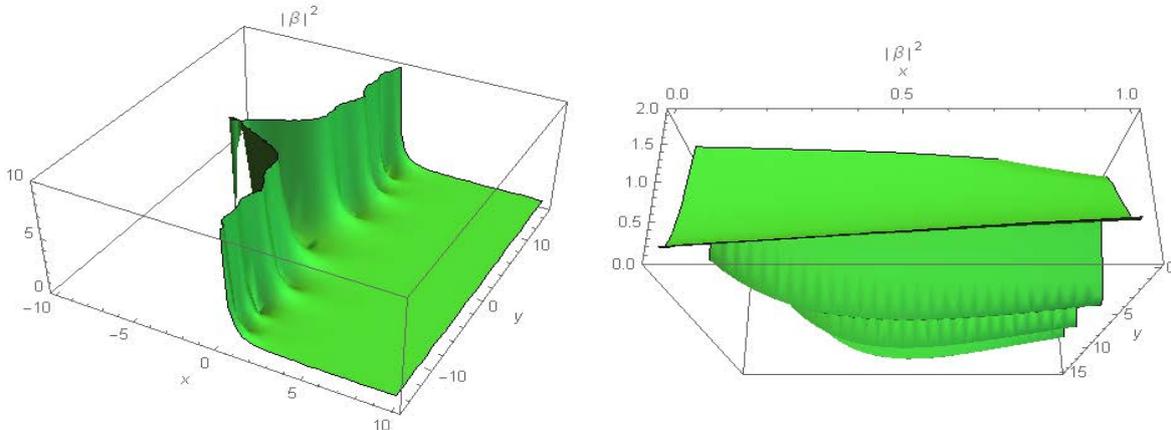
7. 1. 3 の図を観察すると、このディリクレ・ベータ級数は非自明な零点を与える1つの周期関数から成っていることが分かる。但し、その振幅も周期も一定していない。

## 7.2 ディリクレ・ベータ関数の絶対値の2乗

ディリクレ・ベータ関数の絶対値の2乗は

$$f(x, y) = |\beta(x, y)|^2 \quad (2.0)$$

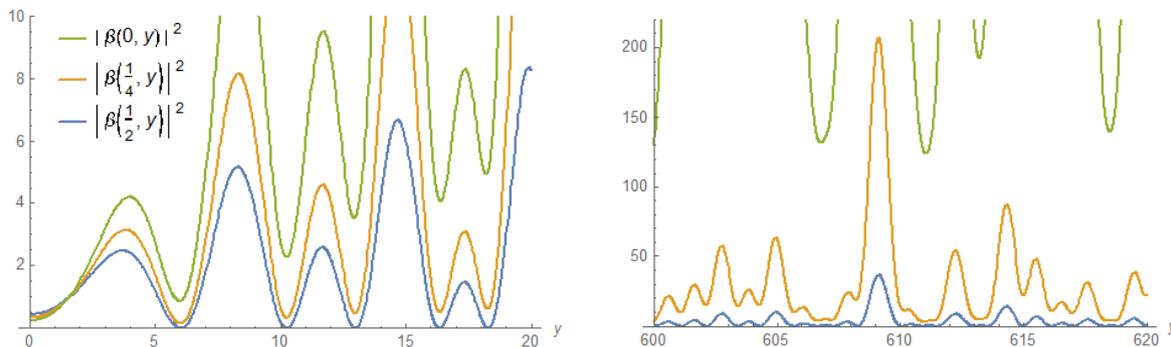
これは2変数実関数であり、図示すれば次のとおり。



左図では  $x=1/2$  に沿って窪みが観察される。右図は左図の一部 ( $0 \leq x \leq 1, y \geq 0$ ) を斜め下から見上げたものである。右図においては  $x=1/2$  に沿って零点が観察される。 $x=1/2$  以外の線上では零点が観察されない。

### $0 \leq x \leq 1/2$ における特徴

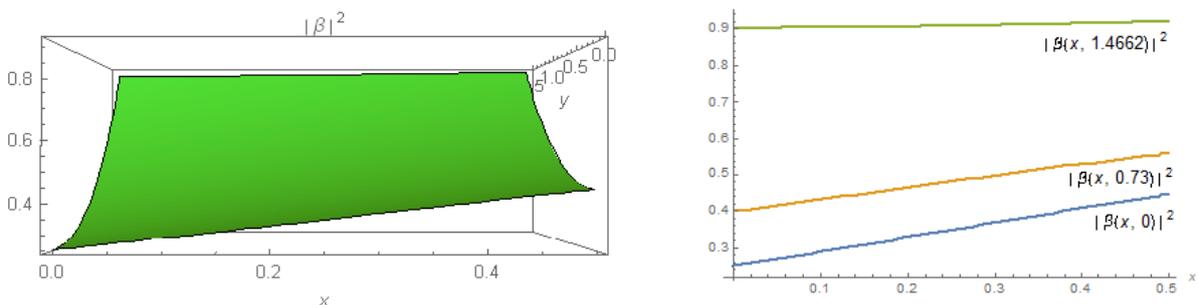
空間  $0 \leq x \leq 1/2$  に着目しよう。 $x=0, 1/4, 1/2$  における切断図を描くと次のとおり。



これを見ると、 $1.5639 \leq y \leq 20$  では  $|\beta(0, y)|^2 > |\beta(1/4, y)|^2 > |\beta(1/2, y)|^2$  であるように見える。 $600 \leq y \leq 620$  でも同様である。以下、これをもっと詳しく観察する。

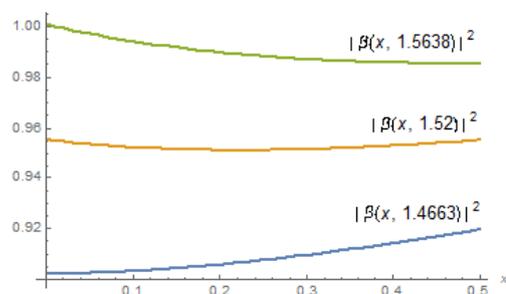
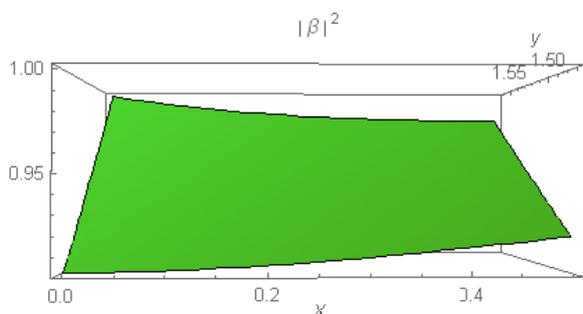
#### (1) $0 \leq y \leq 1.4662$

この区間の3D図を正面から見ると左図のとおり。また、これの  $y=0, 0.73, 1.4662$  における切断図が右図である。この区間では  $|\beta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調増加であるように見える。



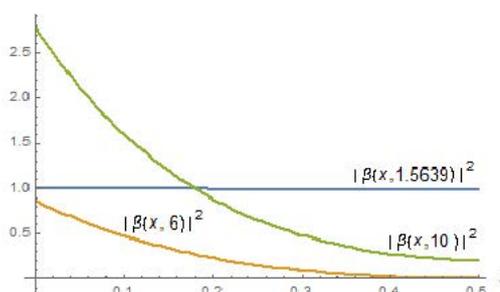
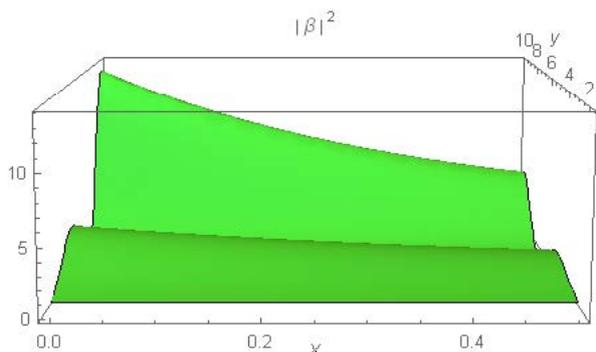
### (2) $1.4662 < y < 1.5639$

この区間の3D図を正面から見ると左図のとおり。また、これの  $y=1.4663, 1.52, 1.5638$  における切断図が右図である。この区間においては  $|\beta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調ではない。右図において、 $y=1.4663$  の曲線は単調増加のように見えるが拡大すれば左端が跳ね上がっており、 $y=1.5638$  の曲線は単調減少のように見えるが実際は右端が跳ね上がっている。



### (3) $y \geq 1.5639$

この区間の3D図を正面から見ると左図のとおり。また、これの  $y=0, 1.5639, 6, 10$  における切断図が右図である。この区間では  $|\beta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調減少であるように見える



以上の観察結果に基づき、筆者はリーマン仮説と同値な次の仮説を提示する。

#### 仮説 7・2・1

$\beta(x, y)$  を複素平面上のディリクレ・ベータ関数とすると、その絶対値の2乗  $|\beta(x, y)|^2$  は領域  $0 < x < 1/2, y \geq 2$  においては  $x$  に関して単調減少関数である。

#### Remark

非自明零点は臨界領域と呼ばれる  $0 < x < 1$  内に存在している。しかも、それらは  $x=1/2$  を軸として左右対称に存在すべきことが証明されている。従って、領域  $0 < x < 1/2, y \geq 2$  で  $|\beta(x, y)|^2$  が  $x$  に関して単調減少ならば、その領域には零点が存在しないことになり、反対の領域  $1/2 < x < 1, y \geq 2$  にも零点が存在しないことになる。

なお、反対の領域  $1/2 < x < 1, y \geq 2$  においては、 $|\beta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調関数とは限らない。

### 7・3 絶対値の2乗の級数表示

#### 7・3・1 ディリクレ・ベータ関数の級数表示

7・1・1 で見たように、ディリクレ・ベータ関数  $\beta(z)$  は次のように定義された。

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^z} \quad \text{Re}(z) > 0$$

$\text{Re}(z) > 0$  のとき、 $z = x + iy$  と置けば

$$\beta(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} (2r-1)^{-x-iy} \quad x > 0$$

指数関数で表せば

$$\beta(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(x+iy)\log(2r-1)} = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-x\log(2r-1) - iy\log(2r-1)}$$

三角関数で書けば

$$\beta(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\cos\{y\log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} - i \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\sin\{y\log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \quad (3.1)$$

#### 7・3・2 $|\beta|^2$ の二重級数表示

ディリクレ・ベータ関数の絶対値の2乗  $|\beta(x, y)|^2$  は (3.1) を用いて次のように表される。

$$|\beta(x, y)|^2 = \left[ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\cos\{y\log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \right]^2 + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\sin\{y\log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \right]^2$$

これは大変ややこしいそうに見えるが、展開して整理すると意外に簡明な式になる。

#### 公式 7・3・2

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数とするとき、

$$|\beta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (3.2)$$

#### 証明

$(-1)^{r-1} \cos\{y\log(2r-1)\} = C_{2r-1}$  と置けば

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \cos\{y\log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} = \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_7}{7^x} + \dots$$

この2乗は

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_7}{7^x} + \frac{C_9}{9^x} + \frac{C_{11}}{11^x} + \dots \\ & \times \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_7}{7^x} + \frac{C_9}{9^x} + \frac{C_{11}}{11^x} + \dots \\ & = \frac{C_1}{1^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_1}{1^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_1}{1^x} \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_1}{1^x} \frac{C_7}{7^x} + \dots \\ & + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_7}{7^x} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_5}{5^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_5}{5^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_5}{5^x} \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_5}{5^x} \frac{C_7}{7^x} + \dots \\
& + \frac{C_7}{7^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_7}{7^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_7}{7^x} \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_7}{7^x} \frac{C_7}{7^x} + \dots \\
& \vdots \\
& = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_{2r-1} C_{2s-1}}{(2r-1)^x (2s-1)^x}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\left[ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \cos\{y \log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \right]^2 = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{2r-1}}{(2r-1)^x} \right\}^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_{2r-1} C_{2s-1}}{(2r-1)^x (2s-1)^x}$$

同様にして  $(-1)^{r-1} \sin\{y \log(2r-1)\} = S_{2r-1}$  と置けば

$$\left[ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \sin\{y \log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \right]^2 = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{S_{2r-1}}{(2r-1)^x} \right\}^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{S_{2r-1} S_{2s-1}}{(2r-1)^x (2s-1)^x}$$

よって

$$\begin{aligned}
|\beta(x, y)|^2 &= \left[ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\cos\{y \log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \right]^2 + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\sin\{y \log(2r-1)\}}{(2r-1)^x} \right]^2 \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_{2r-1} C_{2s-1} + S_{2r-1} S_{2s-1}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}
\end{aligned}$$

記号を元に戻せば

$$\begin{aligned}
|\beta|^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \left[ (-1)^{r-1} \cos\{y \log(2r-1)\} (-1)^{s-1} \cos\{y \log(2s-1)\} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{r-1} \sin\{y \log(2r-1)\} (-1)^{s-1} \sin\{y \log(2s-1)\} \right]
\end{aligned}$$

i.e.

$$|\beta|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\cos\{y \log(2r-1)\} \cos\{y \log(2s-1)\} + \sin\{y \log(2r-1)\} \sin\{y \log(2s-1)\}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}$$

ここで、

$$\cos\{y \log(2r-1)\} \cos\{y \log(2s-1)\} + \sin\{y \log(2r-1)\} \sin\{y \log(2s-1)\} = \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

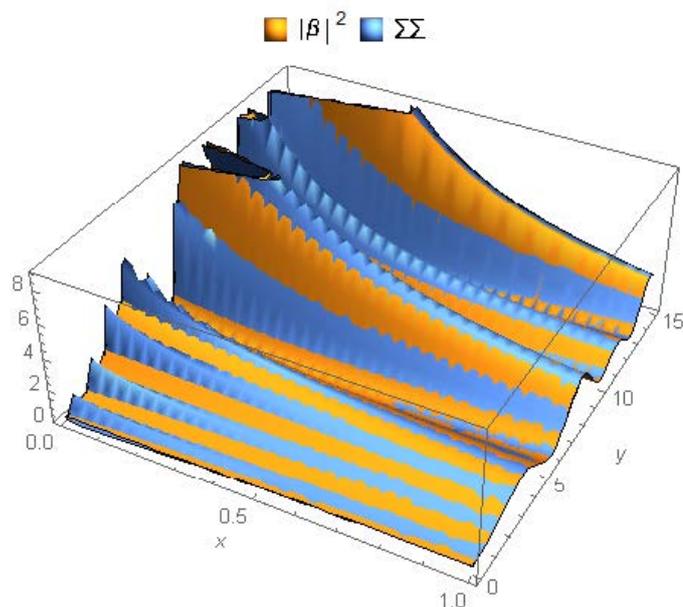
であるから

$$|\beta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (3.2)$$

(3.2) を展開すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
|\beta(x, y)|^2 &= \frac{1}{(1 \cdot 1)^x} \cos\left(y \log \frac{1}{1}\right) - \frac{1}{(1 \cdot 3)^x} \cos\left(y \log \frac{3}{1}\right) + \frac{1}{(1 \cdot 5)^x} \cos\left(y \log \frac{5}{1}\right) - \dots \\
&\quad - \frac{1}{(3 \cdot 1)^x} \cos\left(y \log \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{(3 \cdot 3)^x} \cos\left(y \log \frac{3}{3}\right) - \frac{1}{(3 \cdot 5)^x} \cos\left(y \log \frac{5}{3}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{(5 \cdot 1)^x} \cos\left(y \log \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{(5 \cdot 3)^x} \cos\left(y \log \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{(5 \cdot 5)^x} \cos\left(y \log \frac{5}{5}\right) - \dots \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

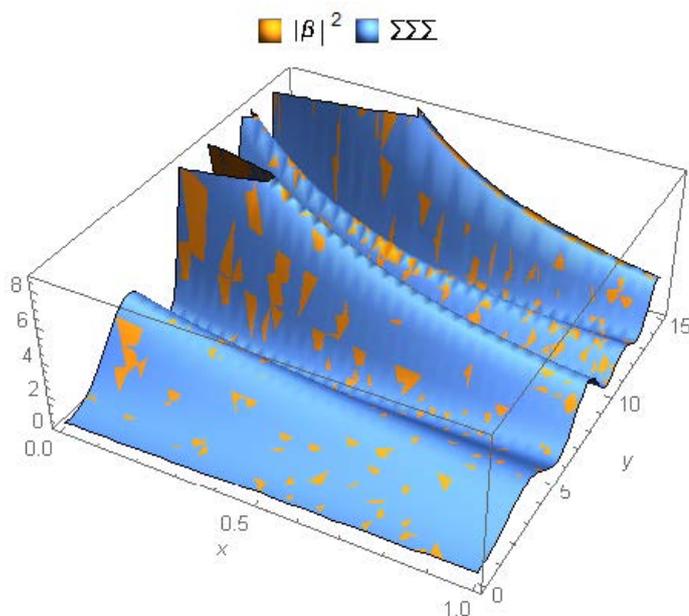
(3.2) の両辺を重ねて描いたのが次図である。ここで  $\Sigma \Sigma$  の上限は  $150 \times 150$  としている。両者は  $x=1$  付近ではほぼ一致しているが、 $x=0$  付近ではあまり一致していない。



そこで (3.2) の右辺に並列加速因子 (アラカルト篇「13 多重級数の収束加速」) を次のように取り付ける。

$$f(x,y,q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r+s} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (3.2')$$

$q=1/3$ ,  $\Sigma$  の上限を  $m=30$  としてこれを左辺と一緒に描けば次のとおり。両辺はぴったり重なっていて斑に見える。



ついでに、(3.2') に  $x=-3, y=0, q=1, m=50$  を与えて計算すると次のようになる。

```
N[f[-3, 0, 1, 50]]
-4.44089 × 10-16
```

$x = -3, y = 0$  は  $\beta(x, y)$  の自明の零点であるから、このことは、(3.2) の右辺が収束軸  $x = 0$  を越えて負方向に解析接続されたことを示している。

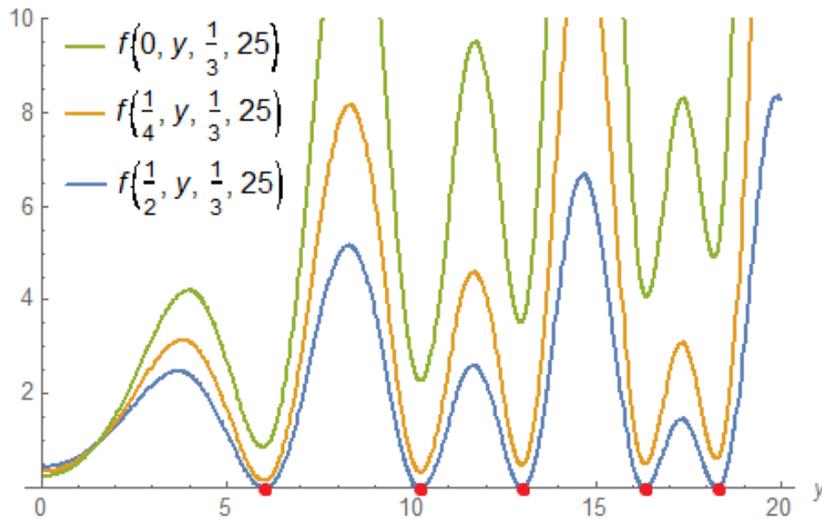
公式 7・3・2 を用いれば、リーマン仮説と同値な仮説は次のようにも記述できる。

**仮説 7・3・3**

$\beta(x, y)$  を複素平面上のディリクレ・ベータ関数とすると、次の不等式が成り立つ。

$$|\beta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) > 0 \quad \text{for } \begin{matrix} 0 < x < 1/2 \\ y \geq 2 \end{matrix} \quad (3.3)$$

これを図示すれば次のとおり。緑、橙、青 はそれぞれ  $x = 0, 1/4, 1/2$  における  $|\beta(x, y)|^2$  の切断図であり、赤い点は臨界線 ( $x = 1/2$ ) 上の零点である。



青線以外は  $y$  軸に接していない。このことは  $x < 1/2$  では  $|\beta(x, y)|^2$  が零点を持たないことを意味している。それはディリクレ・ベータ関数が臨界線上以外に零点を持たないことと同値である。

#### 7・4 零点における諸定理

前節で見たように、ディリクレ・ベータ関数の絶対値の2乗は次のような二重級数で表された。

$$|\beta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (3.2)$$

この二重級数の零点に関して以下の諸定理が成立する。

##### 定理 7・4・0

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数とすると、 $\beta(a, b) = 0$  ならば

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad (4.0c)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad (4.0s)$$

##### 証明

(4.0c) の左辺は  $\beta(a, b)$  の絶対値であるから、(4.0c) は当然である。(4.0s) については本節の末尾で証明する。

面白いことに、 $\beta$  の零点  $(a, b)$  にはおいてはこれらの各行和が全て0でなければならない。以下、このことを定理として述べる。

##### 定理 7・4・1

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数とすると、 $\beta(a, b) = 0$  ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1c)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1s)$$

##### 証明

(4.1c) の二重級数の第  $r$  行を  $c_r$  と表すことにすれば、

$$\begin{aligned} c_r &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \\ &= \frac{(-1)^r}{(2r-1)^a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \end{aligned}$$

ここで

$$\cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = \cos\{b \log(2r-1)\} \cos\{b \log(2s-1)\} + \sin\{b \log(2r-1)\} \sin\{b \log(2s-1)\}$$

であるから

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{(-1)^r}{(2r-1)^a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} [\cos\{b \log(2r-1)\} \cos\{b \log(2s-1)\} \\ &\quad + \sin\{b \log(2r-1)\} \sin\{b \log(2s-1)\}] \end{aligned}$$

i.e.

$$c_r = \frac{(-1)^r}{(2r-1)^a} \left[ \cos\{b \log(2r-1)\} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\{b \log(2s-1)\} \right. \\ \left. + \sin\{b \log(2r-1)\} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \sin\{b \log(2s-1)\} \right]$$

$\beta$  の零点  $(a, b)$  においては

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\{b \log(2s-1)\} = 0, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \sin\{b \log(2s-1)\} = 0$$

であったから、 $c_r(a, b) = 0$  for  $r=1, 2, 3, \dots$  とならねばならない。

同様にして、(4.1s) の二重級数の第  $r$  行を  $S_r$  と表すことにすれば、

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(2r-1)^a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

ここで

$$\sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = \cos\{b \log(2r-1)\} \sin\{b \log(2s-1)\} - \sin\{b \log(2r-1)\} \cos\{b \log(2s-1)\}$$

であるから

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(2r-1)^a} \left[ \cos\{b \log(2r-1)\} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \sin\{b \log(2s-1)\} \right. \\ \left. - \sin\{b \log(2r-1)\} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\{b \log(2s-1)\} \right]$$

上と同様の理由で、 $\beta$  の零点  $(a, b)$  においては  $S_r(a, b) = 0$  for  $r=1, 2, 3, \dots$  とならねばならない。

これから、次の系が従う。

#### 系 7・4・1'

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数とするとき、 $\beta(a, b) = 0$  ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1c')$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1s')$$

この系において  $\theta = -b \log r$  と置けば次が従う。

#### 系 7・4・1''

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数とするとき、 $\beta(a, b) = 0$  ならば、任意の実数  $\theta$  について次式が成立する。

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\{b \log(2s-1) + \theta\} = 0 \quad (4.1c'')$$

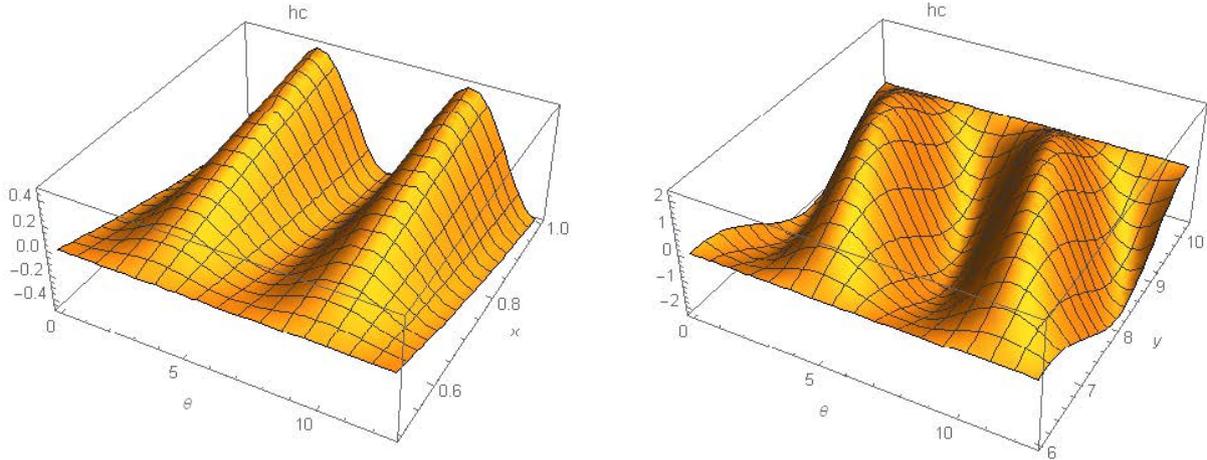
$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \sin\{b \log(2s-1) + \theta\} = 0 \quad (4.1s'')$$

例

(4.1c'') を図示する。この左辺は収束が遅くて正確な図を描き得難いので、これに次のようなクノップ変換を施す。(アラカルト篇「10 二重関数項級数による収束加速と総和法」参照。)

$$h_c(x, y, \theta, q, m) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^x} \cos\{y \log(2s-1) + \theta\}$$

ここでは  $q=1/3$ ,  $\Sigma$  の上限を  $m=25$  で描かれている。



左図は  $y=6.0209\dots$  のときの  $x=1/2$  での切断図である。この切断面では任意の  $\theta$  について  $h_c = 0$  であることが目視できる。

右図は  $x=1/2$  のときの  $y=6.0209\dots$  及び  $y=10.2437\dots$  での切断図である。これらの切断面では任意の  $\theta$  について  $h_c = 0$  であることが目視できる。このような捻じれた図形中に等高直線が無数に現れるのは驚くべきことである。

系 7・4・1' を用いて、次の定理が得られる。

定理 7・4・2

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数、 $c(r)$  を任意の実関数とすると、 $\beta(a, b) = 0$  ならば次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{c(r)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad (4.2c)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{c(r)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad (4.2s)$$

証明

系 7・4・1' (4.1c') より

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots$$

両辺に  $(-1)^r c(r) / (2r-1)^a$  を乗じれば

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{c(r)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots$$

$r$  について足し上げて (4.2c) を得る。類似の方法で (4.2s) も得られる。

#### 定理 7・4・0 (4.0s) の証明

定理 7・4・2 (4.2s) において、特に  $c(r) = 1$  と置いて (4.0s) を得る。

## 7・5 絶対値の2乗の偏導関数

### 7・5・1 1階偏導関数

#### 公式 7・5・1

ディリクレ・ベータ関数の絶対値の2乗を

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (= |\beta(x, y)|^2) \quad (3.2)$$

とすると、この1階偏導関数はそれぞれ次式で表される。

$$f_x = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (5.1x)$$

$$f_y = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (5.1y)$$

#### 証明

(3.2) を  $x$  で偏微分すれば

$$\begin{aligned} f_x &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log\{(2r-1)(2s-1)\}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \\ &\quad - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2s-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \end{aligned}$$

右辺第2項において  $r$  と  $s$  を交換すれば、

$$\begin{aligned} &- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2s-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \\ &= - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s+r} \frac{\log(2r-1)}{\{(2s-1)(2r-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2r-1}{2s-1}\right) \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad \{\because \cos(-z) = \cos z\} \end{aligned}$$

これを右辺第2項に代入して (5.1x) を得る。

(3.2) を  $y$  で偏微分すれば

$$\begin{aligned} f_y &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log\{(2s-1)/(2r-1)\}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2s-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \end{aligned}$$

右辺第1項において  $r$  と  $s$  を交換すれば、

$$- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2s-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s+r} \frac{\log(2r-1)}{\{(2s-1)(2r-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2r-1}{2s-1}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s+r} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad \{\because \sin(-z) = -\sin z\}
\end{aligned}$$

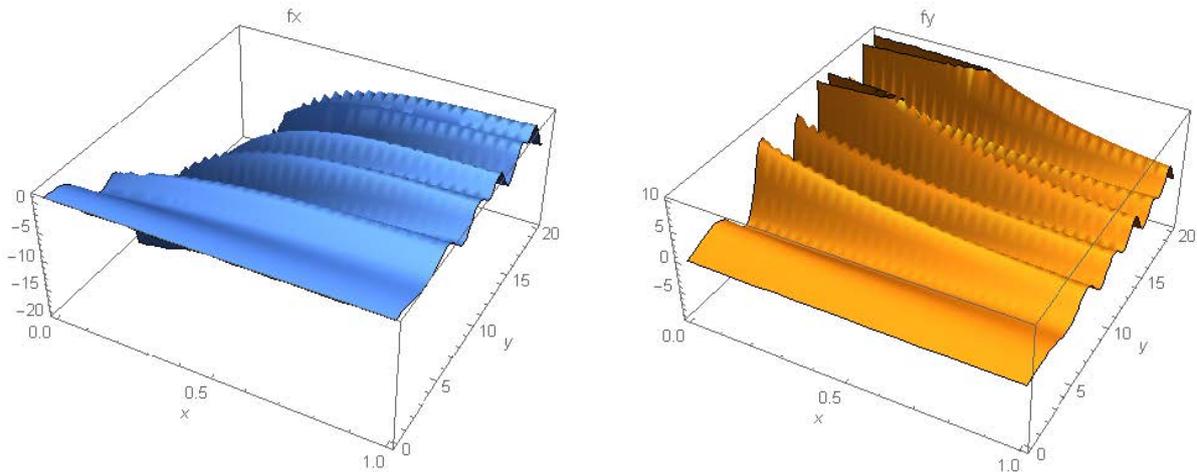
これを右辺第1項に代入して(5.1y)を得る。

公式 7・5・1 をそのまま図示すると原点付近がきれいに描けない。そこでこれらの右辺に並列加速因子(アラカルト篇「13 多重級数の収束加速」)を取り付ければ次のようになる。

$$f_x(x, y, q) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r+s} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (5.1x')$$

$$f_y(x, y, q) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r+s} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (5.1y')$$

$q=1/3$ ,  $\Sigma$  の上限を  $m=25$  としてこれらを3D図に描けば次のとおり。青が  $f_x$  で橙が  $f_y$  である。  
 $f_x \leq 0$  であるように見える。



なお、 $y$  が大きい(概ね30以上)領域では(5.1x), (5.1y) で描画する方が良い。

## 7・5・2 極小点のための必要条件

### 定理 7・5・2 (停留条件)

$\beta(x, y)$  をディリクレ・ベータ関数とすると、 $\beta(a, b) = 0$  ならば次式が成立する。

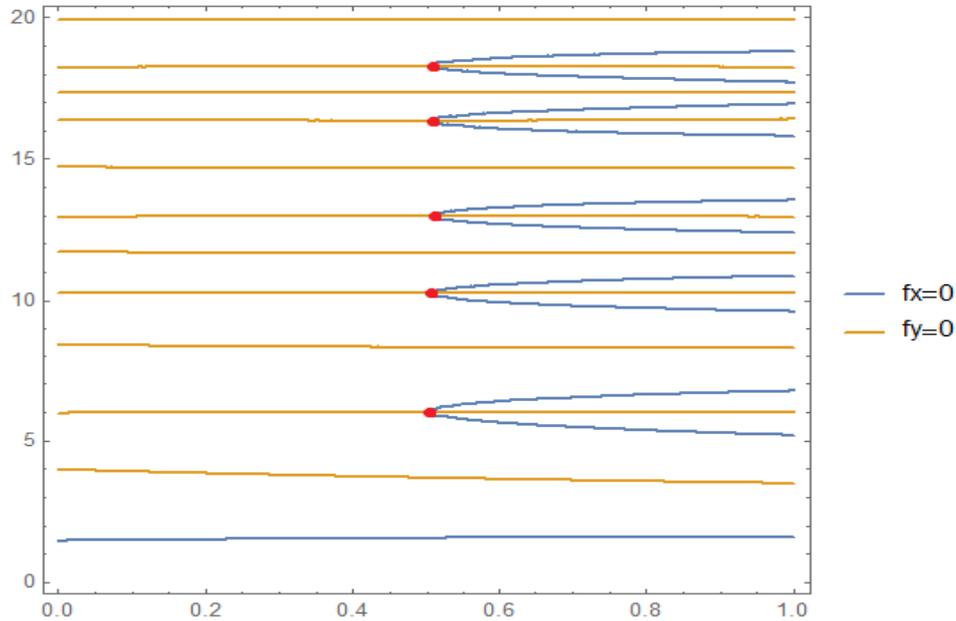
$$f_x(a, b) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \cos\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad (5.2x)$$

$$f_y(a, b) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a} \sin\left(b \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0 \quad (5.2y)$$

### 証明

$\beta(x, y)$  の零点  $(a, b)$  を求める問題は  $f(x, y) \{= |\beta(x, y)|^2\}$  の極小点  $(a, b)$  を求める問題に帰着する。(5.2x), (5.2y) は2変数実関数の停留条件として周知のことである。

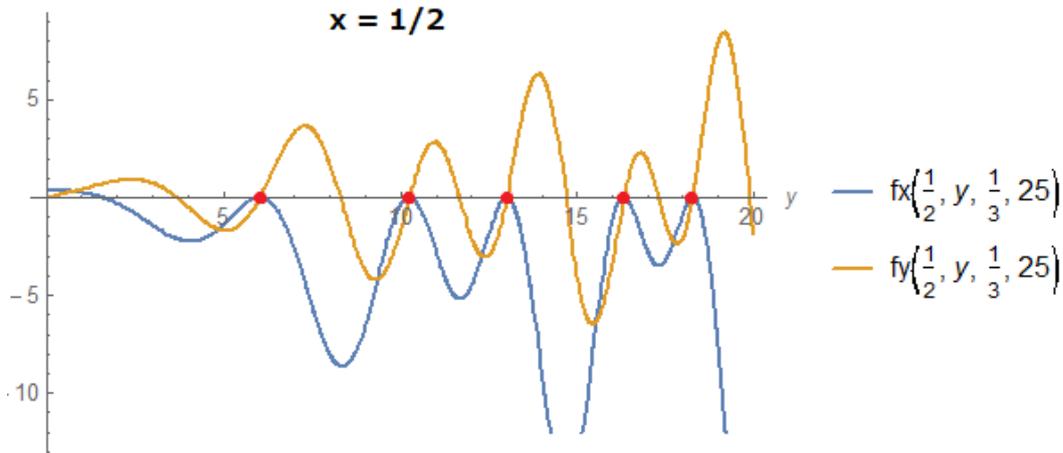
停留条件 (5.2x), (5.2y) を満たす点  $(a, b)$  は停留点と呼ばれている。Mathematica の関数 ContourPlot を用いて  $0 \leq x \leq 1$  ,  $0 \leq y \leq 20$  における等高線図を描くと次のようになる。



$x = 1/2$  上にある赤点是非自明な零点である。  $f(a, b) = |\beta(a, b)|^2 = 0$  であるから、これらはいずれも  $f(x, y)$  の極小点である。この図を観察する限りでは、極小点以外の停留点は存在しそうにない。

### 7・5・3 非自明な零点

$x = 1/2$  における偏導関数  $f_x, f_y$  の2D図は次のようである。



青が  $f_x$  で橙が  $f_y$  である。また、赤の点是非自明な零点である。この図を観察すると

- (1)  $f_x$  は余弦曲線に似ており、 $f_y$  は正弦曲線に似ている。
- (2)  $f_x$  の極値点は一般的に  $f_y$  の零点ではない。但し、例外は存在する。
- (3) 非自明な零点は  $f_x$  の極大点であり且つ  $f_y$  の零点である。
- (4) 非自明な零点は  $f_y$  の上り坂の零点(周期の終点)である。
- (5)  $f_x, f_y$  とも各周期の終点が非自明な零点である。即ち無駄な周期が存在しない。

これらの結果を  $7 \cdot 1 \cdot 3$  と比較すると、青字の部分が大きく異なる。(1) については余弦曲線の符号が異なっている。(3) の例として、 $y=6$  付近の  $f_x$  の極大点と  $f_y$  の零点を計算すると、それぞれ次のようになる。両者は最初の非自明な零点  $6.02094\dots$  と一致している。

$$\begin{aligned} \text{FindMaximum}\left[fx\left[\frac{1}{2}, y, \frac{1}{3}, 35\right], \{y, 6\}\right] & \quad \text{FindRoot}\left[fy\left[\frac{1}{2}, y, \frac{1}{3}, 30\right], \{y, 6\}\right] \\ \{-1.08773 \times 10^{-11}, \{y \rightarrow 6.02095\}\} & \quad \{y \rightarrow 6.02095\} \end{aligned}$$

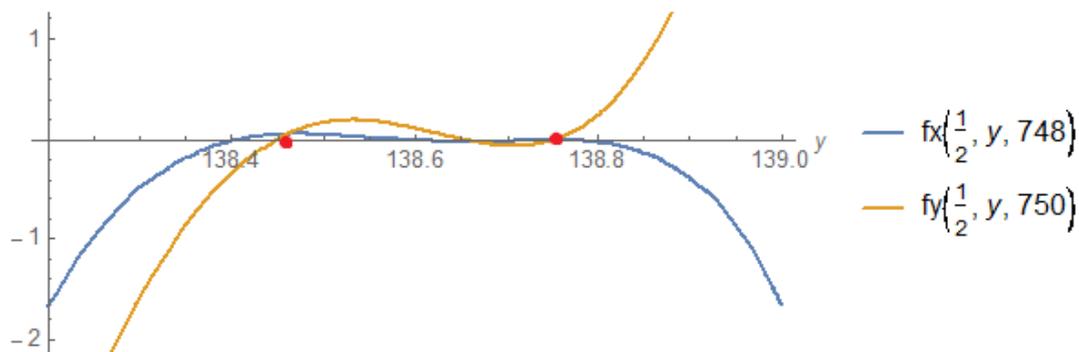
### 下り坂の零点の不存在

$7 \cdot 1 \cdot 3$  においては  $y=139$  付近で虚数部の下り坂の零点が存在した。 $f_x, f_y$  の場合はどうであろうか？ これを見るために先ず (5.1x), (5.1y) を対角線に沿って次のように並べ替える。

$$f_x = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^r (-1)^{r+s} \frac{\log(2r+1-2s)}{\{(2r+1-2s)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r+1-2s}\right) \quad (5.1x')$$

$$f_y = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^r (-1)^{r+s} \frac{\log(2r+1-2s)}{\{(2r+1-2s)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r+1-2s}\right) \quad (5.1y')$$

これらを用いて  $y=139$  付近の図を描くと次のとおり。



非自明な零点  $138.7501\dots$  (右の赤点) は  $f_x$  の極大点かつ  $f_y$  の上り坂の零点になっている。左側の零点  $138.4572\dots$  は正しく描かれていないが、正しく描かれたならば、これも  $f_y$  の上り坂の零点になる筈である。つまり  $f_x, f_y$  の場合、(3) と (4) の例外は存在しない。

### 7.5.4 2階偏導関数

ディリクレ・ベータ関数の絶対値の2乗  $f(x,y)$  の2階偏導関数はそれぞれ次式で示される。

$$f_{xx} = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1) \log(2s-1) + \log^2(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

$$f_{xy} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \sin\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) \quad (= f_{yx})$$

$$f_{yy} = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1) \log(2s-1) - \log^2(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

周知のように、 $f(x,y)$  の停留点  $(a,b)$  が極小点と判定されるための判別式は次のようである。

$$\begin{aligned} f_{xx}(a,b) & > 0 \\ f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2 & > 0 \end{aligned}$$

いくつかの数値計算行ってみたところ、全ての停留点は例外なくこの2式を満たした。この関数  $f(x, y) \{ = |\beta(x, y)|^2 \}$  に関しては、これらの不等式を満たさない停留点は存在しそうにない。

### 7・5・5 リーマン仮説と同値な仮説

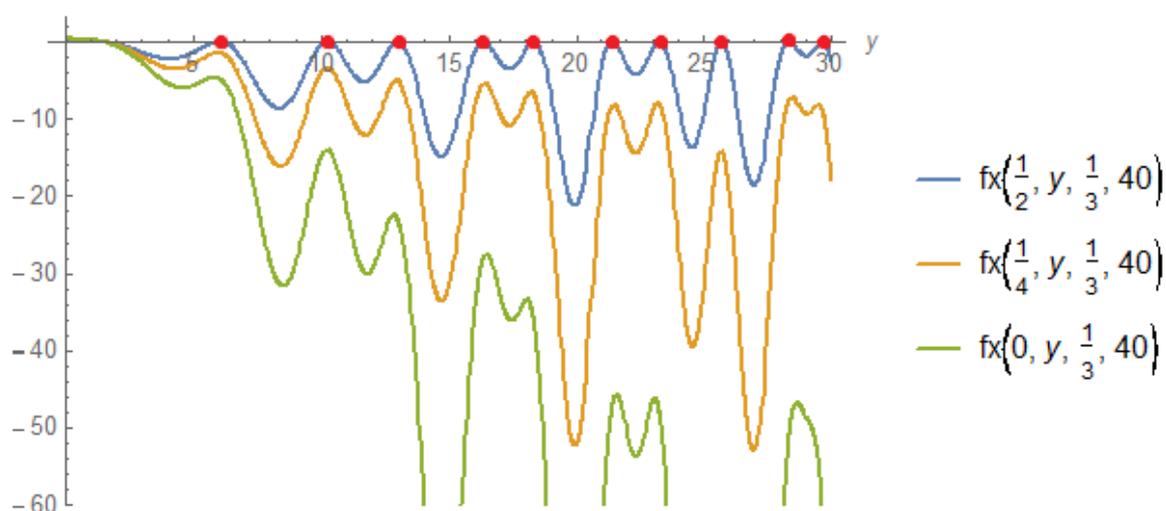
最後に、公式 7・5・1 を用いてリーマン仮説と同値な仮説を提示する。

#### 仮説 7・5・5

$\beta(x, y)$  を複素平面上のディリクレ・ベータ関数とすると、次の不等式が成立する。

$$f_x = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x} \cos\left(y \log \frac{2s-1}{2r-1}\right) < 0 \quad \text{for } \begin{matrix} 0 < x < 1/2 \\ y \geq 2 \end{matrix} \quad (5.5)$$

これを図示すれば次のとおり。青は  $f_x(1/2, y)$ 、橙は  $f_x(1/4, y)$ 、緑は  $f_x(0, y)$  であり、赤い点は臨界線 ( $x = 1/2$ ) 上の零点である。



青線以外は  $y \geq 2$  では  $y$  軸に接していない。このことは  $x < 1/2, y \geq 2$  なる  $f_x(x, y)$  が零点を持たないことを意味している。それはディリクレ・ベータ関数が臨界線上以外に零点を持たないことと同値である。

2019.07.18

Kano Kono

宇宙人の数学