定理・公式の一覧（ディリクレ級数編）

1 一般ディリクレ級数とベキ級数

定義 1・1・1（一般ディリクレ級数）

R が実数集合で、$\sigma, t \in R$ かつ $\lambda_n \in R$, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ $n=1,2,3,\cdots$ とする。
$s=\sigma+it$ とし a_n を任意の複素数とするとき、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

を **一般ディリクレ級数** と言う。

定理 1・1・2

ディリクレ級数を $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ とし、$f(s)$ が $s=s_c=\sigma_c+t_c i$ において収束するものとする。すると次が成り立つ。

1. $f(s)$ は $|Arg(s-s_c)| \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において一様収束する。
2. $f(s)$ は任意の $s=\sigma+ti$ s.t. $\sigma > \sigma_c$ について収束する。

この σ_c をディリクレ級数 $f(s)$ の**収束軸**(line of convergence)と言う。$f(s)$ が常に収束するときは $\sigma_c = -\infty$ 、$f(s)$ が常に発散するときは $\sigma_c = +\infty$ とする。

σ_c の計算方法

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が発散するとき、 $\sigma_c = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\log|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{\lambda_n}$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束するとき、 $\sigma_c = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\log|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\cdots|}{\lambda_n}$

定理 1・1・3（正則性）

ディリクレ級数 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ $(s=\sigma+ti)$ が $\sigma > \sigma_c$ で収束するならば、
$f(s)$ は $\sigma > \sigma_c$ で正則である。そして $f(s)$ の導関数は次で与えられる。

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n s}$$

定理 1・1・4（一意性）

2つのディリクレ級数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad , \quad g(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

がある解領域内で収束し、そこで $f(s)=g(s)$ が成立するならば、全ての n に対して $a_n = b_n$ である。

2 ディリクレ級数と対数ベキ級数

定義 2･1･1（通常ディリクレ級数）

s , a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ をそれぞれ複素数とするとき、級数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\frac{a_1}{1^s}+\frac{a_2}{2^s}+\frac{a_3}{3^s}+\frac{a_4}{4^s}+\cdots$$

を **通常ディリクレ級数** と言う。

定理 2･1･2

σ,t が実数、$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n^s$ $(s=\sigma+ti)$ がディリクレ級数のとき、次のいずれかが成り立つ。

1. 任意の s に対して $f(s)$ は収束する。
2. 任意の s に対して $f(s)$ は発散する。
3. ある実数 σ_c が存在して、$\sigma>\sigma_c$ なる s について $f(s)$ が収束し、$\sigma<\sigma_c$ なる s について $f(s)$ が発散する。

この σ_c をディリクレ級数 $f(s)$ の**収束軸**(line of convergence)と言う。
$f(s)$ が常に収束するときは $\sigma_c=-\infty$ 、$f(s)$ が常に発散するときは $\sigma_c=+\infty$ とする。

σ_c の計算方法

1. $\sum_{k=1}^{n}a_k$ が発散するとき、$\sigma_c=\lim_{n\to\infty}sup\dfrac{log\left|a_1+a_2+\cdots+a_n\right|}{log\,n}$
2. $\sum_{k=1}^{n}a_k$ が収束するとき、$\sigma_c=\lim_{n\to\infty}sup\dfrac{log\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\cdots\right|}{log\,n}$

例1 ***p*-級数**

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

すると

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

これは発散するから、

$$\sigma_c=\lim_{n\to\infty}sup\frac{log\,|n|}{log\,n}=1$$

例2 ディリクレ・イータ級数

$$\eta(s)=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+-\cdots$$

すると

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}=1\ or\ 0$$

これは発散するから、

$$\sigma_c=\lim_{n\to\infty}sup\frac{log\,|1\ or\ 0|}{log\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{log\,|1|}{log\,n}=0$$

3 ディリクレ級数の相補級数

公式 3·1·1 (ζ(z) のローラン展開)

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^r}{r!}$$

$$= \frac{1}{z-1} + \gamma_0 - \gamma_1 \frac{(z-1)^1}{1!} + \gamma_2 \frac{(z-1)^2}{2!} - \gamma_3 \frac{(z-1)^3}{3!} + - \cdots$$

但し γ_r は次式で定義されるスチルチェス定数である。

$$\gamma_r = \lim_{n\to\infty}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\log k)^r}{k} - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1} \right\}$$

公式 3·1·2 (η(z) のテイラー展開)

ディリクレ・イータ級数を $\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} e^{-z\log r}$ 、スチルチェス定数を $\gamma_s \quad s=0,1,2\cdots$

とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\eta(z) = \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \left\{ \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \frac{(z-1)^r}{r!}$$

$$= \log 2 - \left(\frac{\log^2 2}{2} - \gamma_0 \log^1 2 \right) \frac{(z-1)^1}{1!}$$

$$+ \left(\frac{\log^3 2}{3} - \gamma_0 \log^2 2 - 2\gamma_1 \log^1 2 \right) \frac{(z-1)^2}{2!}$$

$$- \left(\frac{\log^4 2}{4} - \gamma_0 \log^3 2 - 3\gamma_1 \log^2 2 - 3\gamma_2 \log^1 2 \right) \frac{(z-1)^3}{3!} + - \cdots$$

公式 3·1·3 (λ(z) のローラン展開)

ディリクレ・ラムダ級数を $\lambda(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log(2r-1)}$ 、スチルチェス定数を $\gamma_s \quad s=0,1,2\cdots$

とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\lambda(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{\gamma_0 + \log 2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \left\{ \gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \frac{(z-1)^r}{r!}$$

$$= \frac{1}{2(z-1)} + \frac{\gamma_0 + \log 2}{2}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \frac{\log^2 2}{2} - \gamma_0 \log^1 2 \right) \frac{(z-1)^1}{1!}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\gamma_2 + \frac{\log^3 2}{3} - \gamma_0 \log^2 2 - 2\gamma_1 \log^1 2 \right) \frac{(z-1)^2}{2!}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\gamma_3 + \frac{\log^4 2}{4} - \gamma_0 \log^3 2 - 3\gamma_1 \log^2 2 - 3\gamma_2 \log^1 2 \right) \frac{(z-1)^3}{3!} + - \cdots$$

公式 3·1·4 (β(z) のテイラー展開)

ディリクレ・ベータ級数を $\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} e^{-z\log(2r-1)}$ 、とするとき、

全複素平面上で次式が成立する。

$$\beta(z) = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{r}{s}(\log 4)^{r-s}\left\{\gamma_s\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_s\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

但し、$\gamma_r(a)$ は次式で定義される一般スティルチェス定数である。

$$\gamma_r(a) = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{\log^r(k+a)}{k+a}-\frac{\log^{r+1}(m+a)}{r+1}\right\}$$

公式 3･4･1（$\eta(z)$ のテイラー展開 ）

ディリクレ･イータ級数を $\eta(z)=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-z\log s}$ とするとき、$\eta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\eta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log^r(s+1)}{(s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r!}$$

但し、$0^0=1$ とする。

公式 3･4･1'（$\eta(z)$ の高階導関数 ）

スチルチェス定数を γ_s（$s=0,1,2\cdots$）、ディリクレ･イータ関数を $\eta(z)$、その n 階導関数を $\eta^{(n)}(z)$ とするとき、$Re(z)>0$ なる z について次式が成立する。

$$\eta^{(n)}(z) = (-1)^n\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\log^n s}{s^z} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

但し、$0^0=1$ とする。

特に $z=1$ のときは

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\log^n s}{s} = \frac{\log^{n+1}2}{n+1}-\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n}{s}\gamma_s(\log 2)^{n-s} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

例

$$\frac{\log^1 1}{1}-\frac{\log^1 2}{2}+\frac{\log^1 3}{3}-\frac{\log^1 4}{4}+-\cdots = \frac{\log^2 2}{2}-\gamma_0\log^1 2$$

$$\frac{\log^2 1}{1}-\frac{\log^2 2}{2}+\frac{\log^2 3}{3}-\frac{\log^2 4}{4}+-\cdots = \frac{\log^3 2}{3}-\gamma_0\log^2 2-2\gamma_1\log^1 2$$

公式 3･4･2（ 半2重テイラー級数 ）

ディリクレ･イータ級数を $\eta(z)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log r}$ とするとき、$\eta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\eta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\frac{\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!}$$

但し、$0^0=1$ とする。

最初の数項を展開すると次のとおり。流石にこれはテイラー級数とは呼び難いものである。

$$\eta(z) = \frac{\log^0 1}{1^c}\frac{(z-c)^0}{0!}$$
$$-\frac{\log^0 2}{2^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 1}{1^c}\frac{(z-c)^1}{1!}$$

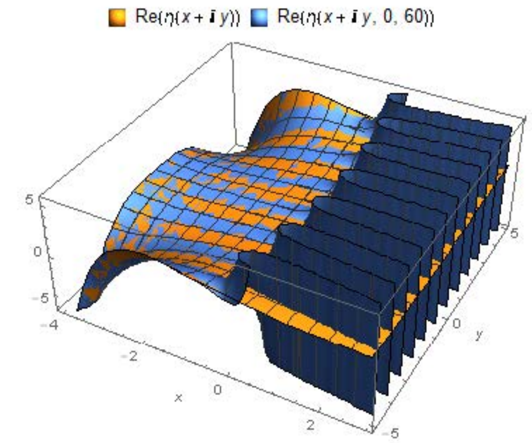
$$+\frac{\log^0 3}{3^c}\frac{(z-c)^0}{0!}+\frac{\log^1 2}{2^c}\frac{(z-c)^1}{1!}+\frac{\log^2 1}{1^c}\frac{(z-c)^2}{2!}$$

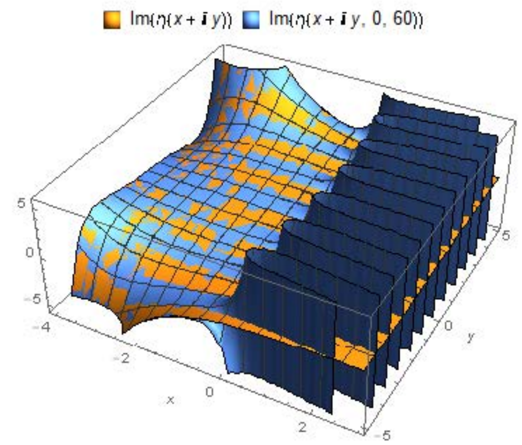
$$-\frac{\log^0 4}{4^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 3}{3^c}\frac{(z-c)^1}{1!}-\frac{\log^2 2}{2^c}\frac{(z-c)^2}{2!}-\frac{\log^3 1}{1^c}\frac{(z-c)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

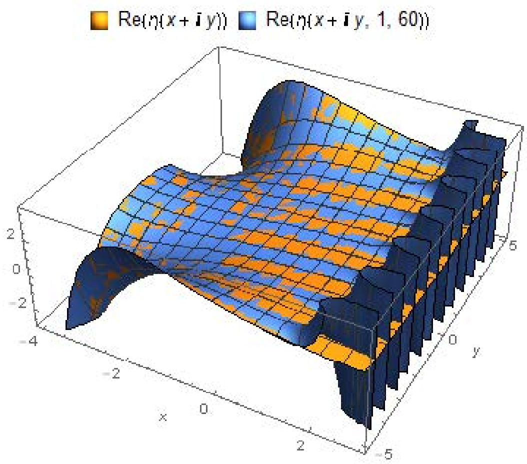
$c=0$, $z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。

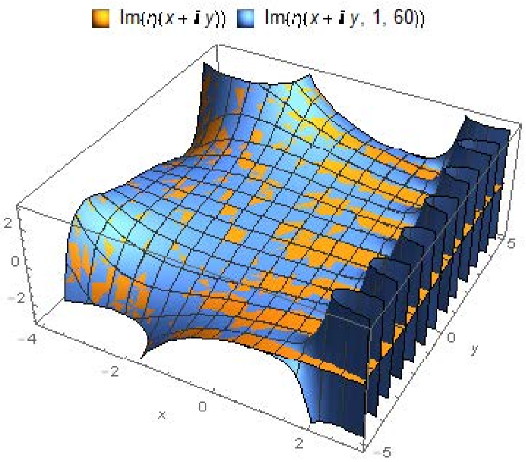
驚くべきは、公式 3·4·1 の図の反対側が描かれていることである。つまり、本公式は収束軸の左側の半平面を表示する ものである。





更に驚いたことに、$c=1$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示すると次のようになる。





何と、収束軸が $x=0$ から $x=2$ に移動したのである。色々作図した結果、本公式の収束軸は可動であり、その位置は $x=2c$ である ことが分った。

定義 3·7·0

関数 $f(z)$ が領域 D とその補集合 $\overline{D}$ 上で2つの関数項級数でそれぞれ次のように表されるとき、

$$f(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_r a_r(z) & z\in D\\ \displaystyle\sum_r b_r(z) & z\in\overline{D}\end{cases}$$

級数 $\sum_r b_r(z)$ を 級数 $\sum_r a_r(z)$ の 相補級数 と呼ぶ。

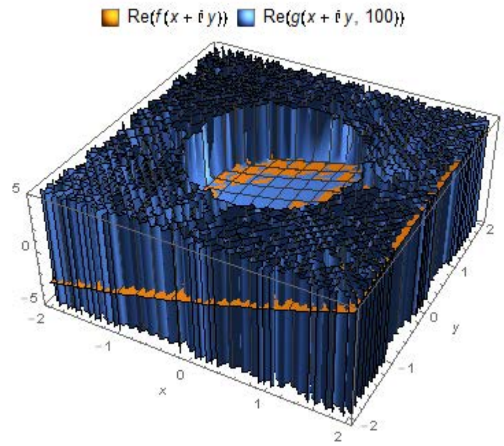
このに定義に従えば、公式 3･4･2は通常ディリクレ級数における相補級数であることが分る。
以下では、冪級数や一般ディリクレ級数における相補級数を例示する。

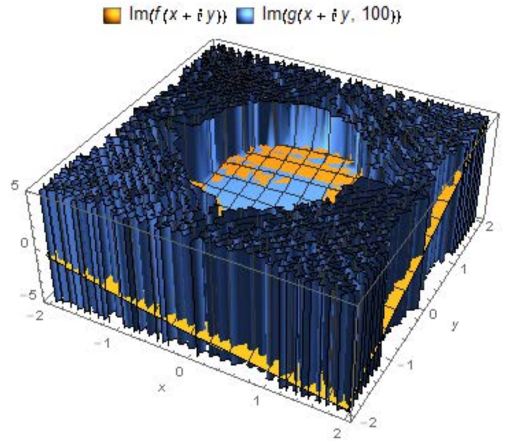
例1　二項級数の相補級数

二項関数は次のように二項級数と呼ばれる冪級数に展開される。

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}z^{r} \qquad |z|\le 1 \qquad (\,|z| = 1 \text{ is allowed at } \alpha>0\,) \tag{7.1}$$

$\alpha=\sqrt{2}$, $z = x+iy$ としてこの両辺を図示するとそれぞれ次のようである。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。収束半径は1であるから、教科書どおりの図が描かれている。

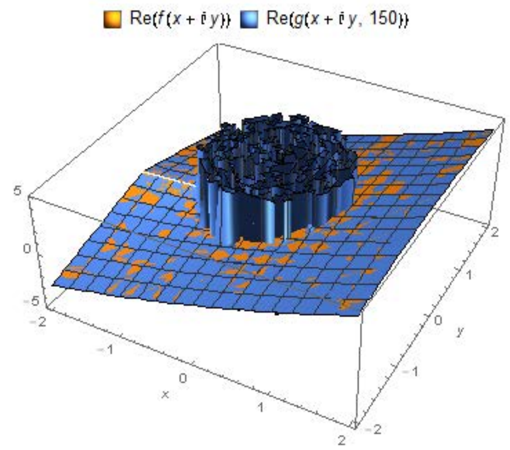


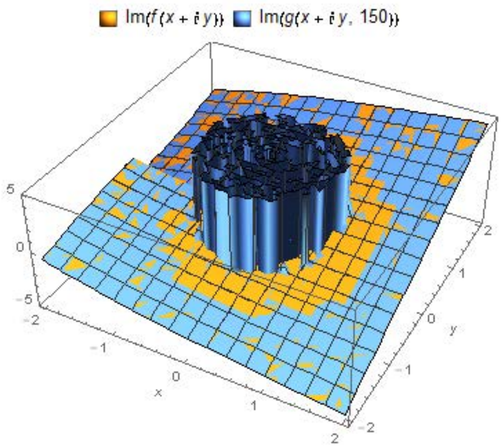


他方、超微積分篇「 3 一般二項定理と一般多項定理 」定理 3･2･1 によれば、この関数は次のようにも級数展開される。

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}z^{\alpha-r} \qquad |z|>1 \tag{7.1'}$$

$\alpha=\sqrt{2}$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示すると、次のようになる。





今度は収束円 $|z|=1$ の外側が描かれている。よって (7.1') は (7.1) の相補級数であることが分る。

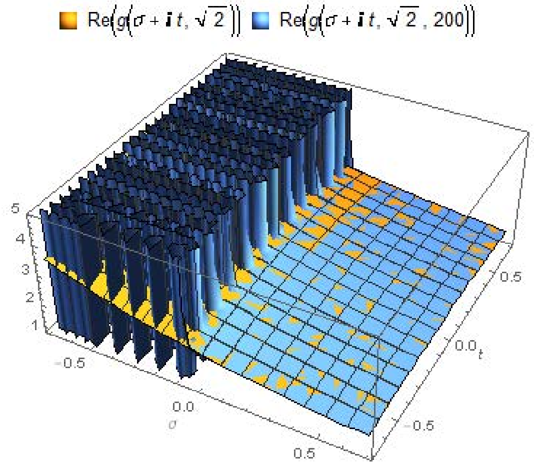
例2　二項ディリクレ級数の相補級数

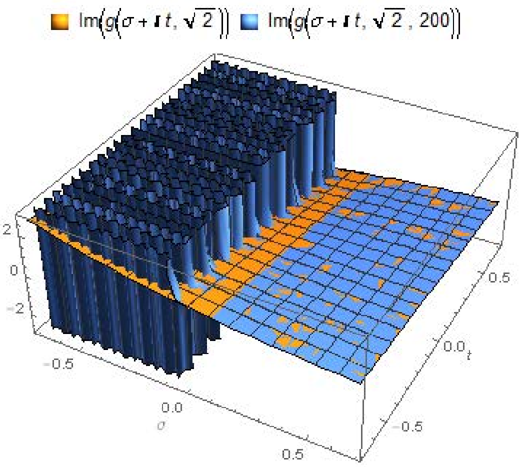
「 01 一般ディリクレ級数とベキ級数 」によれば、冪級数は変数変換 $z = e^{-s}$ により簡単に一般ディリクレ級数に変換できる。先ず、(7.1) にこれを行えば、

$$\left(1+e^{-s}\right)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}e^{-rs} \qquad \left|e^{-s}\right| \le 1 \qquad (\ |e^{-s}| = 1 \text{ is allowed at } \alpha > 0\ ) \tag{7.2}$$

$\alpha = \sqrt{2}\ ,\ s = \sigma + i\,t$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。

両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。収束域は $1 \ge \left|e^{-s}\right| = e^{-\sigma}$ より $\sigma \ge 0$ であるが、両図においてもそのように描かれている。



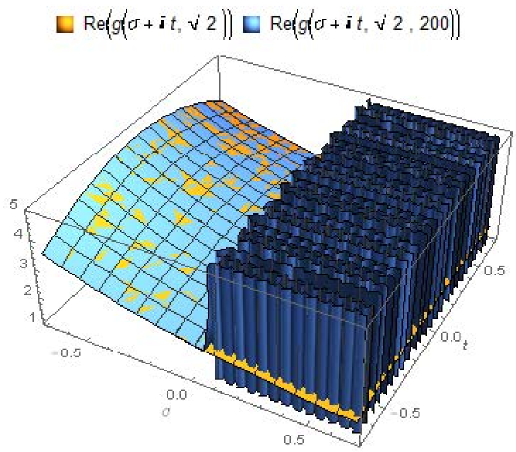


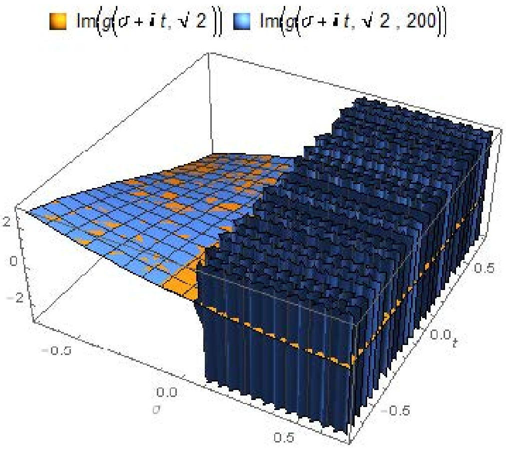
次に、(7.1') に変数変換 $z = e^{-s}$ を行えば、

$$\left(1+e^{-s}\right)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha - r}e^{-(\alpha - r)s} \qquad \left|e^{-s}\right| > 1 \tag{7.2'}$$

$\alpha = \sqrt{2}\ ,\ s = \sigma + i\,t$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。

両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。収束域は $1 < \left|e^{-s}\right| = e^{-\sigma}$ より $\sigma < 0$ であるが、両図においてもそのように描かれている。よって (7.2') は (7.2) の相補級数であることが分る。





例1や例2を見れば、公式 3･4･2 は驚くには当たらないかも知れない。しかしながら、これらの例は極めて稀である。任意の級数の相補級数は容易には得られないのが普通である。

然るに、通常交代ディリクレ級数においては、その級数の各項をテイラー展開して対角線に沿って並べ替えるだけで簡単に相補級数が得られる ように見える。これは大いなる驚きである。
しかもその収束軸は自由に動かし得る。項別微積分も簡単で、テイラー級数とほとんど同じように扱うことができる。諸々のツールとして有望と思われる。

4 ディリクレ・イータ関数の絶対値

定義

ディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ は半平面 $Re\{\eta(z)\}>0$ では次のように定義される

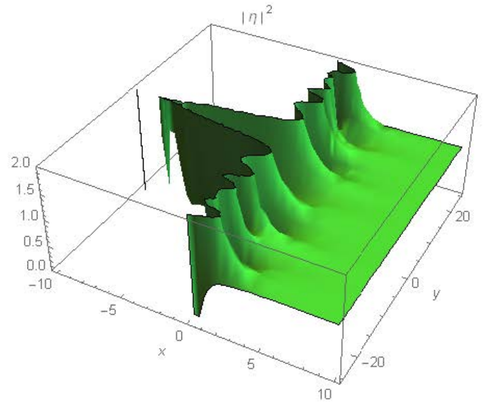
$$\eta(z)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^{z}}$$

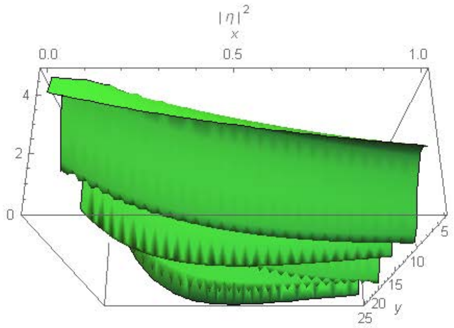
ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗

ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗は

$$g(x,y)=|\eta(x,y)|^{2}$$

これは2変数実関数であり、図示すれば次のとおり。





左図では $x=1/2$ および $x=1$ に沿って窪みが観察される。右図は左図の一部($0\le x\le 1,y\ge 0$)を斜め下から見上げたものである。右図においては $x=1/2$ & $x=1$ に沿って零点が観察される。$x=1/2$ 上の零点は ζ 関数の零点に一致し、$x=1$ 上の零点は η 固有の零点である。これらに対し、$x=0$ 上においては零点が存在しない。

絶対値の2乗の級数表示

ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗 $|\eta(x,y)|^{2}$ は次のように表される。

公式 4・3・2

$\eta(x,y)$ をディリクレ・イータ関数とするとき、

$$|\eta(x,y)|^{2}=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^{x}}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)\quad\{\ :=g(x,y)\ \}$$

零点における諸定理

定理 4・4・0

$\eta(x,y)$ をディリクレ・イータ関数とするとき、$\eta(a,b)=0$ ならば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^{a}}\cos\left(b\log\frac{s}{r}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^{a}}\sin\left(b\log\frac{s}{r}\right)=0$$

定理 4・4・1

$\eta(x,y)$ をディリクレ・イータ関数とするとき、$\eta(a,b)=0$ ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^{a}}\cos\left(b\log\frac{s}{r}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^{a}}\sin\left(b\log\frac{s}{r}\right)=0\qquad for\ \ r=1,2,3,\cdots$$

系 4･4･1'

$\eta(x,y)$ をディリクレ･イータ関数とするとき、$\eta(a,b)=0$ ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s^a}\cos\left(b\log\frac{s}{r}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s^a}\sin\left(b\log\frac{s}{r}\right)=0 \qquad for\ r=1,2,3,\cdots$$

系 4･4･1"

$\eta(x,y)$ をディリクレ･イータ関数とするとき、$\eta(a,b)=0$ ならば、任意の実数 θ について次が成立する。

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s^a}\cos(b\log s+\theta)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s^a}\sin(b\log s+\theta)=0$$

定理 4･4･2

$\eta(x,y)$ がディリクレ･イータ関数、$c(r)$ が任意の実関数のとき、$\eta(a,b)=0$ ならば次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{c(r)}{(rs)^a}\cos\left(b\log\frac{s}{r}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{c(r)}{(rs)^a}\sin\left(b\log\frac{s}{r}\right)=0$$

絶対値の2乗の偏導関数

公式 4･5･1 (1階偏導関数)

ディリクレ･イータ関数の絶対値の2乗を

$$g(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) \qquad \left(=|\eta(x,y)|^2\right)$$

とするとき、これの1階偏導関数はそれぞれ次式で表される。

$$g_x=-2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log r}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$

$$g_y=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log r}{(rs)^x}\sin\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$

公式 4･5･2 (2階偏導関数)

ディリクレ･イータ関数の絶対値の2乗を

$$g(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) \qquad \left(=|\eta(x,y)|^2\right)$$

とするとき、これの2階偏導関数はそれぞれ次式で表される。

$$g_{xx}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log r\log s+\log^2 r}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$

$$g_{xy}=-2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log^2 r}{(rs)^x}\sin\left(y\log\frac{s}{r}\right) \qquad (=g_{yx})$$

$$g_{yy}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log r\log s-\log^2 r}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$

定理 4･7･1 (**$g(x,y)$ と $g_x(x,y)$**)

2変数実関数 $g(x,y)$, $g_x(x,y)$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$g(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) \qquad \left\{=|\eta(x,y)|^2\right\}$$

$$g_x(x,y) = -2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log r}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$

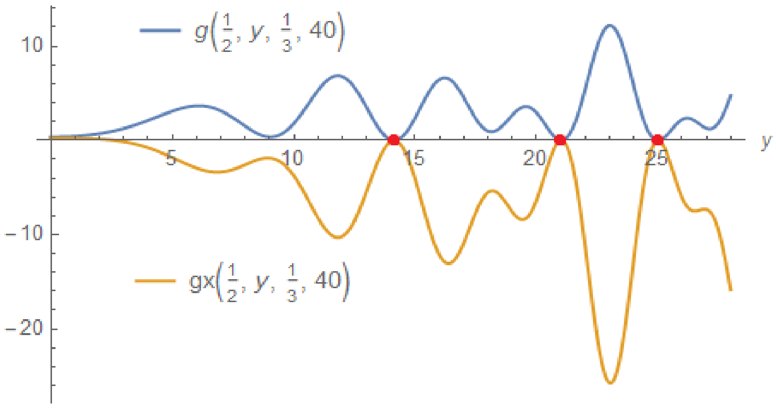
すると、ディリクレ・イータ関数 $\eta(x,y)$ の零点を (a,b) とするとき、

(1) b は $g(a,y)=0$, $g_x(a,y)=0$ の共通根である。

(2) b は $g(a,y)=0$, $g_x(a,y)=0$ の両式において、少なくとも重根である。

(3) $g(a,y)$ と $g_x(a,y)$ は y 軸を挟んでほぼ対称である。

臨界線上の g と g_x （赤点は b ）



以上から、リーマン仮説と同値な次の仮説が得られる。

仮説 4・7・5

$\eta(x,y)$ を複素平面上のディリクレ・イータ関数とするとき、次の不等式が成立する。

$$g_x(x,y) = -2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log r}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) < 0 \qquad \text{for} \quad \begin{matrix} 0 < x < 1/2 \\ y \geq 3 \end{matrix}$$

5 ディリクレ級数の分割

定義 5·1·0 (基本分割)

被分割級数において 第 k 項(k=1, 2, …m)から (m-1) 個飛ばしに項を選んで正項級数または負項級数 A_k (k=1, 2, …m) を作成でるとき、我々はこれを **基本 $\boldsymbol{m}$ 分割** (あるいは単に **$\boldsymbol{m}$ 分割**) と呼ぶ。

公式 5·1·1

$\zeta(n,z)$ をフルヴィッツ·ゼータ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、リーマン·ゼータ級数 $\zeta(n)$ 及びその m 分割級数 A_k をそれぞれ次のようであるとする。

$$\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$$

$$A_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(mr+k)^n} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

すると、$k=1,2,\cdots,m$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(mr+k)^n} = \frac{1}{m^n}\zeta\left(n,\frac{k}{m}\right) = \frac{(-1)^n}{m^n(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{m^n(n-1)!}\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}e^{-\frac{k}{m}t}}{1-e^{-t}}dt$$

公式 5·1·2

$\zeta(n,z)$ をフルヴィッツ·ゼータ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、ディリクレ·ラムダ級数 $\lambda(n)$ 及びその m 分割級数 A_k をそれぞれ次のようであるとする。

$$\lambda(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^n}$$

$$A_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2mr+2k-1)^n} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

すると、$k=1,2,\cdots,m$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2mr+2k-1)^n} = \frac{1}{(2m)^n}\zeta\left(n,\frac{2k-1}{2m}\right) = \frac{(-1)^n}{(2m)^n(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{2k-1}{2m}\right)$$

$$= \frac{1}{(2m)^n(n-1)!}\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}e^{-\frac{2k-1}{2m}t}}{1-e^{-t}}dt$$

例1 $\boldsymbol{\lambda(3)}$ の3分割

$$\lambda(3) = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \cdots = 1.0517997$$

これの3分割は次のようになる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} + \cdots = \frac{-1}{6^3\,2!}\psi_1\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{182\zeta(3)+4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\,2!}$$

$$= 1.0036855$$

$$A_2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{21^3} + \cdots = \frac{-1}{6^3\,2!}\psi_1\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{14\zeta(3)}{6^3\,2!} = 0.0389555$$

$$A_3 = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{23^3} + \cdots = \frac{-1}{6^3\,2!}\psi_1\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{182\zeta(3) - 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!}$$

$$= 0.0091587$$

例2 $\boldsymbol{\zeta(2)}$ の4分割

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$

$$= 1.6649341$$

これの4分割は次のようになる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^4 + 8\beta(2)}{4^2\,1!} = 1.0748331$$

$$A_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \cdots = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2\times 4^2\,1!} = 0.3084251$$

$$A_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{15^2} + \cdots = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi^4 - 8\beta(2)}{4^2\,1!} = 0.1588675$$

$$A_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\pi^2}{6\times 4^2\,1!} = 0.1028084$$

定義 5·5·0 (合成分割)

基本 n 分割級数からより少ない m 個の級数を合成することを **合成 m 分割** と言う。

例1 $\boldsymbol{\lambda(3)}$ の合成2分割

ディリクレ·ラムダ級数 $\lambda(3)$ は次のように基本3分割できる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} + \cdots$$

$$A_2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{21^3} + \cdots$$

$$A_3 = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{23^3} + \cdots$$

$$\lambda(3) = A_1 + A_2 + A_3$$

級数 A_1 , A_2 , A_3 を組み合わせて2つの級数を構成するには、次の3通りの組合せがある。

$$A_1 + (A_2 + A_3) \quad , \quad A_2 + (A_1 + A_3) \quad , \quad A_3 + (A_1 + A_2)$$

これらはそれぞれ次のようになる。

$A_1 + (A_2 + A_3)$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{31^3} + \cdots = \frac{182\zeta(3) + 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} + \cdots = \frac{196\zeta(3) - 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!}$$

$A_2 + (A_1 + A_3)$

$$a_1 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{21^3} + \frac{1}{27^3} + \cdots = \frac{14\zeta(3)}{6^3\,2!}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} + \cdots = \frac{2\times 182\zeta(3)}{6^3\,2!}$$

$A_3 + (A_1 + A_2)$

$$a_1 = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{23^3} + \frac{1}{29^3} + \cdots = \frac{182\zeta(3) - 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\,2!}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{15^3} + \cdots = \frac{196\zeta(3) + 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\,2!}$$

例2 マーダヴァ・ライプニッツ級数の合成2分割

マーダヴァ・ライプニッツ級数 $\beta(1)$ $(=\pi/4)$ は次のようである。

$$\beta(1) = 1 - \frac{1}{3^1} + \frac{1}{5^1} - \frac{1}{7^1} + \frac{1}{9^1} - \frac{1}{11^1} + \frac{1}{13^1} - \frac{1}{15^1} + \frac{1}{17^1} - + \cdots$$

これの可能な合成2分割は次のようになる。

分割1

$$\begin{cases} a_{11} = 1 - \dfrac{1}{7^1} + \dfrac{1}{9^1} - \dfrac{1}{15^1} + \dfrac{1}{17^1} - \dfrac{1}{23^1} + - \cdots = \dfrac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ a_{12} = \dfrac{1}{3^1} - \dfrac{1}{5^1} + \dfrac{1}{11^1} - \dfrac{1}{13^1} + \dfrac{1}{19^1} - \dfrac{1}{21^1} + - \cdots = \dfrac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$$

$$\beta(1) = a_{11} - a_{12}$$

分割2

$$\begin{cases} a_{21} = 1 - \dfrac{1}{3^1} + \dfrac{1}{9^1} - \dfrac{1}{11^1} + \dfrac{1}{17^1} - \dfrac{1}{19^1} + - \cdots = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \\ a_{22} = \dfrac{1}{5^1} - \dfrac{1}{7^1} + \dfrac{1}{13^1} - \dfrac{1}{15^1} + \dfrac{1}{21^1} - \dfrac{1}{23^1} + - \cdots = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$$

$$\beta(1) = a_{21} + a_{22}$$

6 ディリクレ級数の反射分割

公式 6･1･2 (ポリガンマ関数の反射公式)

$\psi_n(z)\quad (n=1,2,3,\cdots)$ をポリガンマ関数とするとき、次式が成立する。

$$\psi_{2n-1}(z)+\psi_{2n-1}(1-z) = -\pi\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}cot(\pi z)$$

$$\psi_{2n-2}(z)-\psi_{2n-2}(1-z) = -\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)$$

定義 6･1･3' (限定的定義)

(1) ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2n)$ が次のようであるとする。

$$\lambda(2n) = 1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{9^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\frac{1}{13^{2n}}+\cdots$$

この級数が次のように分割されるとき、これをディリクレ･ラムダ級数の反射 ***m*** 分割 と言う。

$$a_k = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n}}+\frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n}}\right\}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_m = \lambda(2n)$$

(2) ディリクレ･ベータ級数 $\beta(2n-1)$ が次のようであるとする。

$$\beta(2n-1) = 1-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-+\cdots$$

この級数が次のように分割されるとき、これをディリクレ･ベータ級数の反射 ***m*** 分割 と言う。

$$a_k = (-1)^{k-1}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n-1}}-\frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n-1}}\right\}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_m = \beta(2n-1)$$

公式 6･1･4 (ディリクレ級数の反射分割)

定義 6･1･3'における反射分割級数 a_k の総和は次式で与えられる。

(1) ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2n)$ のとき、

$$a_k = -\frac{\pi}{(4m)^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}cot(\pi z)\Bigg|_{\frac{2k-1}{4m}}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

(2) ディリクレ･ベータ級数 $\beta(2n-1)$ のとき

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}\pi}{(4m)^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{\frac{2k-1}{4m}}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

定理 6･1･5

定義 6･1･3'における反射分割級数 a_k の総和は初等関数の特殊値である。

例1 $\boldsymbol{\lambda(2n)}$ の反射2分割

$$\lambda(2n) = 1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{9^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\frac{1}{13^{2n}}+\cdots$$

これの反射2分割は次のようになる。

$$1+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{9^{2n}}+\frac{1}{15^{2n}}+\frac{1}{17^{2n}}+\cdots = -\frac{\pi}{8^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}cot(\pi z)\Bigg|_{1/8}$$

$$\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\frac{1}{13^{2n}}+\frac{1}{19^{2n}}+\cdots = -\frac{\pi}{8^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}cot(\pi z)\Bigg|_{3/8}$$

$n=2$ のとき

$$a_1 = 1+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{17^4}+\cdots = \frac{\pi^4(16+11\sqrt{2})}{3072} = 1.000610446\cdots$$

$$a_2 = \frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{19^4}+\cdots = \frac{\pi^4(16-11\sqrt{2})}{3072} = 0.01406758545\cdots$$

例2 $\boldsymbol{\beta(2n-1)}$ の反射2分割

$$\beta(2n-1) = 1-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-+\cdots$$

これの反射2分割は次のようになる。

$$1-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{15^{2n-1}}+-\cdots = \frac{\pi}{8^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{1/8}$$

$$-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{5^{2n-1}}+\frac{1}{11^{2n-1}}-\frac{1}{13^{2n-1}}+-\cdots\right) = -\frac{\pi}{8^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{3/8}$$

$n=3$ のとき

$$a_1 = 1-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{15^5}+\frac{1}{17^5}-\frac{1}{23^5}+-\cdots = \frac{\pi^5(80+57\sqrt{2})}{49152} = 0.9999568$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{1}{11^5}-\frac{1}{13^5}+\frac{1}{19^5}-\frac{1}{21^5}+-\cdots\right) = \frac{\pi^5(80-57\sqrt{2})}{49152} = -0.0037989$$

例3 $\boldsymbol{\beta(2n-1)}$ の反射3分割

$$\beta(2n-1) = 1-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-+\cdots$$

これの反射3分割は次のようになる。

$$1-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-\frac{1}{23^{2n-1}}+\frac{1}{25^{2n-1}}+-\cdots = -\frac{\pi}{12^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{1/12}$$

$$-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{9^{2n-1}}+\frac{1}{15^{2n-1}}-\frac{1}{21^{2n-1}}+-\cdots\right) = \frac{\pi}{12^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{3/12}$$

$$\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{17^{2n-1}}-\frac{1}{19^{2n-1}}+-\cdots = -\frac{\pi}{12^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{5/12}$$

$n=3$ のとき

$$1-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}-\frac{1}{23^5}+\frac{1}{25^5}-\frac{1}{35^5}+-\cdots = \frac{\pi^5(305+176\sqrt{3})}{186624} = 0.9999964$$

$$-\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{9^5}+\frac{1}{15^5}-\frac{1}{21^5}+\frac{1}{27^5}-\frac{1}{33^5}+-\cdots\right) = -\frac{5\pi^5}{373248} = -0.0040994$$

$$\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{17^5}-\frac{1}{19^5}+\frac{1}{29^5}-\frac{1}{31^5}+-\cdots = \frac{\pi^5(305-176\sqrt{3})}{186624} = 0.0002608$$

反射分割の代数的可解性

公式 6･4･1 (三角関数の反射公式)

自然数 n および $k=1,2,3,\cdots,n-1$ について次式が成り立つ。

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}-(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\}\quad,\quad \sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2i}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\}$$

系 6･4･1

自然数 n および $k=1,2,3,\cdots,n-1$ について次式が成り立つ。

$$\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{i\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}-(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\}}{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{1-\frac{k}{n}}}\quad,\quad \csc\frac{k\pi}{n}=\frac{2i}{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{1-\frac{k}{n}}}$$

系 6･4･1 を用いれば、次の定理を証明できる。

定理 6･4･2 (代数的可解性)

定義 6･1･3' における反射分割級数 $a_k\quad k=1,2,\cdots,m$ の総和は、π を除いて、開冪と四則演算のみで表わされる。

例 $\boldsymbol{\beta(3)}$ の反射7分割

$$\beta(3)=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-+\cdots$$

これの反射7分割は次のようになる。

$$1-\frac{1}{27^3}+\frac{1}{29^3}-\frac{1}{55^3}+\frac{1}{57^3}-\frac{1}{83^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{1}{28}}-(-1)^{\frac{27}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{1}{28}}+(-1)^{\frac{27}{28}}\right\}^3}$$

$$-\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{25^3}+\frac{1}{31^3}-\frac{1}{53^3}+\frac{1}{59^3}-\frac{1}{81^3}+-\cdots\right)=\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{3}{28}}-(-1)^{\frac{25}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{3}{28}}+(-1)^{\frac{25}{28}}\right\}^3}$$

$$\frac{1}{5^3}-\frac{1}{23^3}+\frac{1}{33^3}-\frac{1}{51^3}+\frac{1}{61^3}-\frac{1}{79^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{5}{28}}-(-1)^{\frac{23}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{5}{28}}+(-1)^{\frac{23}{28}}\right\}^3}$$

$$-\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{21^3}+\frac{1}{35^3}-\frac{1}{49^3}+\frac{1}{63^3}-\frac{1}{77^3}+-\cdots\right)=\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{7}{28}}-(-1)^{\frac{21}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{7}{28}}+(-1)^{\frac{21}{28}}\right\}^3}$$

$$\frac{1}{9^3}-\frac{1}{19^3}+\frac{1}{37^3}-\frac{1}{47^3}+\frac{1}{65^3}-\frac{1}{75^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{9}{28}}-(-1)^{\frac{19}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{9}{28}}+(-1)^{\frac{19}{28}}\right\}^3}$$

$$-\left(\frac{1}{11^3}-\frac{1}{17^3}+\frac{1}{39^3}-\frac{1}{45^3}+\frac{1}{67^3}-\frac{1}{73^3}+-\cdots\right)=\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{11}{28}}-(-1)^{\frac{17}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{11}{28}}+(-1)^{\frac{17}{28}}\right\}^3}$$

$$\frac{1}{13^3}-\frac{1}{15^3}+\frac{1}{41^3}-\frac{1}{43^3}+\frac{1}{69^3}-\frac{1}{71^3}+-\cdots = -\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{13}{28}}-(-1)^{\frac{15}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{13}{28}}+(-1)^{\frac{15}{28}}\right\}^3}$$

ディリクレ級数の反射 $m2^n$ 分割

公式 6･5･1

T_n を第1種チェビシェフ多項式とするとき、自然数 $m\,,k$ について次式が成り立つ。

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{m} = T_{2k-1}\left(\cos\frac{\pi}{m}\right) \quad , \quad \sin\frac{(2k-1)\pi}{m} = (-1)^{k-1}T_{2k-1}\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)$$

公式 6･5･2

自然数 n について次式が成り立つ。

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ \sin\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases} \qquad (n-1)-nests$$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}} \\ \sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}} \end{cases} \qquad n-nests$$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{5\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}}} \\ \sin\dfrac{\pi}{5\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}}} \end{cases} \qquad n-nests$$

定理 6･5･3

定義 6･1･3'における反射分割級数 $a_k \quad k=1,2,\cdots,2^n$ の総和は、π を除いて、2 の多重平方根と四則演算のみで表される。

系 6･5･3

(1) 反射分割級数 $a_k \quad k=1,2,\cdots,3\cdot 2^n$ の総和は、π を除いて、3 と 2 の多重平方根と四則演算のみで表される。

(2) 反射分割級数 $a_k \quad k=1,2,\cdots,5\cdot 2^n$ の総和は、π を除いて、5 と 2 の多重平方根と四則演算のみで表される。

例1 $\lambda(2)$ の反射8分割

ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2)$ は次のようである。

$$\lambda(2) = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots$$

これの反射8分割は次のようになる。

$$a_1 = 1 + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{65^2} + \frac{1}{95^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{61^2} + \frac{1}{67^2} + \frac{1}{93^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{69^2} + \frac{1}{91^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{71^2} + \frac{1}{89^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{73^2} + \frac{1}{87^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{85^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_7 = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{83^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_8 = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{79^2} + \frac{1}{81^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$\lambda(2) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$$

例2 $\boldsymbol{\beta(3)}$ の反射6分割

ディリクレ・ベータ級数 $\beta(3)$ は次のようである。

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + - \cdots$$

これの反射6分割は次のようになる。

$$a_1 = 1 - \frac{1}{23^3} + \frac{1}{25^3} - \frac{1}{47^3} + \frac{1}{49^3} - \frac{1}{71^3} + - \cdots$$
$$= \frac{\left(56+39\sqrt{2}+32\sqrt{3}+23\sqrt{6}\right)\pi^3}{6912}$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{21^3} + \frac{1}{27^3} - \frac{1}{45^3} + \frac{1}{51^3} - \frac{1}{69^3} + - \cdots\right) = \frac{\left(-4-3\sqrt{2}\right)\pi^3}{6912}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^3} - \frac{1}{19^3} + \frac{1}{29^3} - \frac{1}{43^3} + \frac{1}{53^3} - \frac{1}{67^3} + - \cdots$$
$$= \frac{\left(56-39\sqrt{2}-32\sqrt{3}+23\sqrt{6}\right)\pi^3}{6912}$$

$$a_4 = -\left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{31^3} - \frac{1}{41^3} + \frac{1}{55^3} - \frac{1}{65^3} + - \cdots\right)$$
$$= \frac{\left(56+39\sqrt{2}-32\sqrt{3}-23\sqrt{6}\right)\pi^3}{6912}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{33^3} - \frac{1}{39^3} + \frac{1}{57^3} - \frac{1}{63^3} + - \cdots = \frac{\left(-4+3\sqrt{2}\right)\pi^3}{6912}$$

$$a_6 = -\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} + \frac{1}{35^3} - \frac{1}{37^3} + \frac{1}{59^3} - \frac{1}{61^3} + - \cdots\right)$$

$$= \frac{\left(56-39\sqrt{2}+32\sqrt{3}-23\sqrt{6}\right)\pi^3}{6912}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = \beta(3)$$

$\lambda(2)$ の反射 $\boldsymbol{m2^n}$ 分割

ディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(2)$ は次のようである。

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$$

これの 2分割、4分割、6分割、8分割、10分割を行うと、それぞれ次のようになる。

2分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{23^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{21^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

4分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{47^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{45^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{43^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{41^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

6分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{71^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{69^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3^2\, 16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{67^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{65^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{63^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3^2\, 16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{61^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

ここで、a_2, a_5 は $\lambda(2)$ の2分割級数の $1/3^2$ である。

8分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{65^2} + \frac{1}{95^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{61^2} + \frac{1}{67^2} + \frac{1}{93^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{69^2} + \frac{1}{91^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{71^2} + \frac{1}{89^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{73^2} + \frac{1}{87^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{85^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_7 = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{83^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_8 = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{79^2} + \frac{1}{81^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

10分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{79^2} + \frac{1}{81^2} + \frac{1}{119^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{83^2} + \frac{1}{117^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{85^2} + \frac{1}{115^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{5^2\,16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{73^2} + \frac{1}{87^2} + \frac{1}{113^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{71^2} + \frac{1}{89^2} + \frac{1}{111^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{69^2} + \frac{1}{91^2} + \frac{1}{109^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_7 = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{67^2} + \frac{1}{93^2} + \frac{1}{107^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_8 = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{65^2} + \frac{1}{95^2} + \frac{1}{105^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{5^2\, 16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$a_9 = \frac{1}{17^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{97^2} + \frac{1}{103^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_{10} = \frac{1}{19^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{61^2} + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{101^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

ここで、a_3, a_8 は $\lambda(2)$ の2分割級数の $1/5^2$ である。

Remark

敢えて分母の有理化はしていない。この表現によれば、各級数の総和は多重平方根内の + と - の組み合わせによって表される。但し、6分割と10分割においては、これらの組み合わせのみでは全ての総和を表現できない。面白いことに、その不足分は $\lambda(2)$ の2分割によって補われている。そこで次の定理が成立する。

定理 6･6･1

p は3以上の素数、ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2)$ の反射 $2p$ 分割級数 a_k は次のようであるとせよ。

$$a_k = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8pr+2k-1)^2} + \frac{1}{(8pr+8p-2k+1)^2}\right\} \qquad k=1,2,\cdots,2p$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p} = \lambda(2)$$

すると、次式が成立する。

$$a_{\frac{p+1}{2}} = \frac{\pi^2}{p^2 16\left(2-\sqrt{2}\right)} \quad , \quad a_{\frac{3p+1}{2}} = \frac{\pi^2}{p^2 16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

例 $\lambda(2)$ の14分割

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{105^2} + \frac{1}{119^2} + \frac{1}{161^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{7^2\, 16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_{11} = \frac{1}{21^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{91^2} + \frac{1}{133^2} + \frac{1}{147^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{7^2\, 16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

7 p-級数の零点

公式 7·1·1

リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ $(z=x+iy)$ について次式が成立する。

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^z} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad x>0\ ,\ x\ne 1$$

証明

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}}\eta(z) = \left(\frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}-\frac{1}{6^z}+-\cdots\right)\Big/\left(\frac{1}{1^z}-\frac{2}{2^z}\right) \qquad x>0\ ,\ x\ne 1$$

これを筆算すると

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \\ \hline
\frac{1}{1^z}-\frac{2}{2^z} & \frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}-\frac{1}{6^z}+-\cdots \\
 & \underline{\frac{1}{1^z}-\frac{2}{2^z}} \\
 & \qquad \frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}-\frac{1}{6^z}+-\cdots \\
 & \qquad \underline{\frac{1}{2^z}-\frac{2}{4^z}} \\
 & \qquad\qquad \frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}-\frac{1}{6^z}+\frac{1}{7^z}-\frac{1}{8^z}+-\cdots \\
 & \qquad\qquad \underline{\frac{1}{3^z}-\frac{2}{6^z}} \\
 & \qquad\qquad\qquad \frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{7^z}-\frac{1}{8^z}+\frac{1}{9^z}-\frac{1}{10^z}+-\cdots \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{\frac{1}{4^z}-\frac{2}{8^z}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{8^z}+\frac{1}{9^z}-\frac{1}{10^z}+\frac{1}{11^z}-\frac{1}{12^z}+-\cdots \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

p - 級数の収束加速

公式 7·2·1ri（クノップ変換）

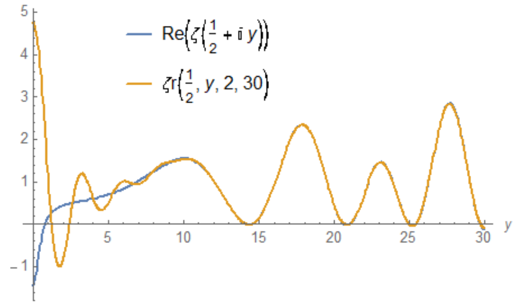
複素平面上のリーマン・ゼータ関数 $\zeta(x,y)$ の実部と虚部をそれぞれ ζ_r , ζ_i とするとき、$x>0\ ,\ x\ne 1$ において次式が成立する。

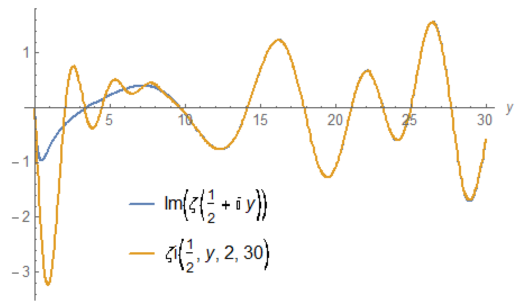
$$\zeta_r(x,y,q) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k}\frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{s}\frac{\cos(y\log s)}{s^x}$$

$$\zeta_i(x,y,q) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k}\frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{s}\frac{\sin(y\log s)}{s^x}$$

但し、q は任意の正数とする。

$0 \leq y \leq 30$ における臨界線 $x=1/2$ 上の2D図を描くと次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において青が左辺で橙が右辺である。



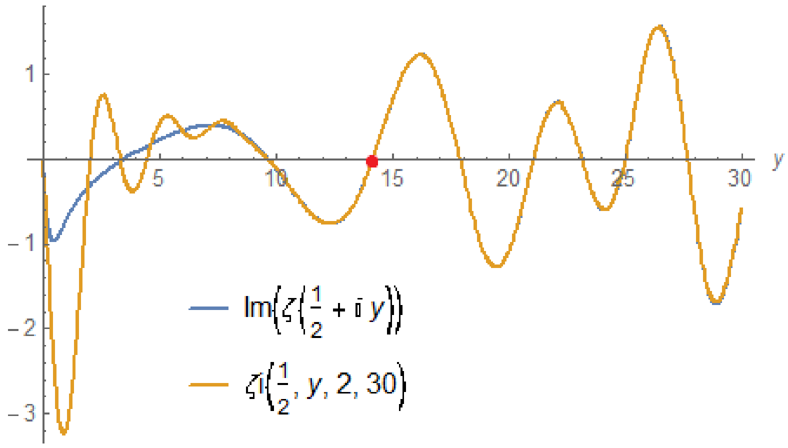


p - 級数は y が小さいところでは $Re\{\zeta(1/2+iy)\}$, $Im\{\zeta(1/2+iy)\}$ との乖離が大きいが、y の大きいところでは急速に $Re\{\zeta(1/2+iy)\}$, $Im\{\zeta(1/2+iy)\}$ に接近している。そしてそれらは $|y|$ の増大に伴って限りなく $Re\{\zeta(1/2+iy)\}$, $Im\{\zeta(1/2+iy)\}$ に接近する。

p - 級数の零点

最初の零点

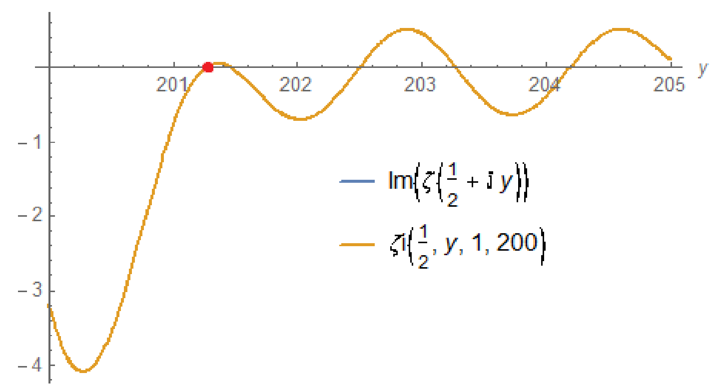
$0 \leq y \leq 30$ における臨界線 $x=1/2$ 上の虚部は次のようである。青が左辺で橙が右辺である。



$\zeta(1/2+iy)$ の最初の零点は虚部の2番目の上り坂の零点(赤点)に一致する。そこで $y=14$ 付近の両辺の零点を計算したところ、有効4桁が得られたが、これより良い近似値は得られなかった。

80番目の零点

$200 \leq y \leq 205$ における臨界線 $x=1/2$ 上の虚部は次のようである。青が左辺で橙が右辺であるが、両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



$\zeta(1/2+iy)$ の80番目の零点は虚部の(多分)81番目の上り坂の零点(赤点)に一致する。そこで $y=201$ 付近の両辺の零点を計算したところ、有効15桁が得られた。

```
SetPrecision[FindRoot[ζi[1/2, y, 1, 200], {y, 201}], 16]
{ y → 201.2647519437039 }

SetPrecision[Im[ZetaZero[80]], 16]
     201.2647519437038
```

結論

現在のところ、公式 7･2･1ri は臨界領域 $0<x<1$ においては漸近展開と考えざるを得ない。
しかし、これらの計算精度は独立変数の虚部 $|y|$ が大きくなるほど高くなる。2004年時点で臨界線上の最初の10兆個はリーマン仮説を満たすことが知られている。10兆番目以降の虚部 $|y_r|$ は非常に大きいから、公式 7･2･1ri は臨界領域 $0<x<1$ においても十分に有用である。

9 リーマン・ゼータ等の実数部虚数部別ベキ級数

以下においては、$0^0 = 1$とする。

公式 9・1・1 ($\eta(z)$ のマクローリン級数)

ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z=x+iy$)とするとき、半平面 $x>0$ において次式が成立する。

$$\eta(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t \log^s(t+1)\frac{(-1)^s z^s}{s!}$$

$$Re\{\eta(z)\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t \log^{2r+s}(t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$Im\{\eta(z)\} = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t \log^{2r+s+1}(t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

公式 9・2・1 ($\beta(z)$ のマクローリン級数)

ディリクレ・ベータ関数を $\beta(z)$ ($z=x+iy$)とするとき、半平面 $x>0$ において次式が成立する。

$$\beta(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t \log^s(2t+1)\frac{(-1)^s z^s}{s!}$$

$$Re\{\beta(z)\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t \log^{2r+s}(2t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$Im\{\beta(z)\} = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t \log^{2r+s+1}(2t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

公式 9・3・1 ($\zeta(z)$ のローラン級数)

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ ($z=x+iy$)、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=1$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!}$$

$$Re\{\zeta(z)\} = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$Im\{\zeta(z)\} = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

公式 9・4・1 ($(z-1)\zeta(z)$ の テイラー級数)

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ ($z=x+iy$)、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$(z-1)\zeta(z) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty}s\,\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!}$$

$$Re\{(z-1)\zeta(z)\} = 1 - \sum_{s=1}^{\infty}s\,\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)\,\gamma_{2r+s-1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$Im\{(z-1)\zeta(z)\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)\,\gamma_{2r+s}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

10 ディリクレ級数とテイラー級数

要　旨

(1) ディリクレ級数はその収束域内でテイラー級数に変換できる。
(2) ディリクレ級数の係数とテイラー展開の中心を実数に限定すれば、実部・虚部別のテイラー級数が得られる。
(3) 双曲線関数は無限または有限の一般ディリクレ級数で表される。

10･1 一般ディリクレ級数とテイラー級数

定義 10･1･0 (一般ディリクレ級数)

R を実数集合とし、$\lambda_t \in R$, $\lambda_t < \lambda_{t+1}$ 　$t=1,2,3,\cdots$ とし、a_t を任意の複素数とする。
このとき、次の級数を **一般ディリクレ級数** と言う。

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-\lambda_t z}$$

公式 10･1･1 (一般ディリクレ級数 -> テイラー級数)

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が一般ディリクレ級数に展開されるとき、その収束域に属する任意の複素数 z, c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-\lambda_t z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

例1 $\coth z - 1$

$$\coth z - 1 = \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-2tz} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-2tc} (-2t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

例2 $\tanh z - 1$

$$\tanh z - 1 = \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^t e^{-2tz} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^t e^{-2tc} (-2t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

例3 $\operatorname{csch} z$

$$\operatorname{csch} z = \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-(2t-1)z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-c(2t-1)} \{-(2t-1)\}^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

例4 $\operatorname{sech} z$

$$\operatorname{sech} z = \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^{t-1} e^{-(2t-1)z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^{t-1} e^{-c(2t-1)} \{-(2t-1)\}^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

公式 10･1･2 (実部･虚部別テイラー級数)

$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-\lambda_t z}$ ($z = x+iy$) を一般ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t 　$t=1,2,3,\cdots$ を任意の実数とするとき、収束範囲内において次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

10･2 有限一般ディリクレ級数とテイラー級数

公式 10･2･1（有限一般ディリクレ級数）

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が有限一般ディリクレ級数に展開されるとき、任意の複素数 z,c について次式が成立する。

$$f(z)=\sum_{t=1}^{n}a_t e^{-\lambda_t z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

例1 ***cosh z***

$$\cosh z=\sum_{t=1}^{2}\frac{1}{2}e^{-(-1)^t z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{1}{2}e^{-c(-1)^t}\{-(-1)^t\}^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

例2 ***sinh z***

$$\sinh z=\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}}{2}e^{-(-1)^t z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}}{2}e^{-c(-1)^t}\{-(-1)^t\}^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

公式 10･2･2 (実部･虚部別テイラー級数)

$f(z)=\sum_{t=1}^{n}a_t e^{-\lambda_t z}$ $(z=x+iy)$ を有限一般ディリクレ級数、u,v を $f(z)$ の実部および虚部 c 及び a_t $t=1,2,\cdots,n$ を任意の実数とするとき、次式が成り立つ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

10･3 通常ディリクレ級数とテイラー級数

定義10･3･0（通常ディリクレ級数）

z , a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ をそれぞれ複素数とするとき、次の級数を **通常ディリクレ級数** と言う。

$$f(z)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t}{t^z}=\frac{a_1}{1^z}+\frac{a_2}{2^z}+\frac{a_3}{3^z}+\frac{a_4}{4^z}+\cdots$$

公式 10･3･1（通常ディリクレ級数 -> テイラー級数)

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が通常ディリクレ級数に展開されるとき、その収束域に属する任意の複素数 z,c について次式が成立する。

$$f(z)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t}{t^z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

例 ディリクレ･イータ級数

$$\eta(z)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{t^z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

公式 10･3･2 (実部･虚部別テイラー級数)

$f(z)=\sum_{t=1}^{\infty} a_t/t^z$ ($z=x+iy$) を通常ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t $t=1,2,3,\cdots$ を任意の実数とするとき、収束範囲内において次式が成り立つ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

例 ディリクレ･ベータ級数

$$\beta(z)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^c}\{-\log(2t-1)\}^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^c}\{-\log(2t-1)\}^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^c}\{-\log(2t-1)\}^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

10･4 有限通常ディリクレ級数とテイラー級数

公式 10･4･1 (有限通常ディリクレ級数 -> テイラー級数)

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が有限通常ディリクレ級数に展開されるとき、任意の複素数 z,c について次式が成立する。

$$f(z)=\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t}{t^z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

例 $\boldsymbol{a_t=(-1)^{t-1}}$, $\boldsymbol{n=6}$

$$f(z)=\sum_{t=1}^{6}\frac{(-1)^{t-1}}{t^z}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{6}\frac{(-1)^{t-1}}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

公式 10･4･2 (実部･虚部別テイラー級数)

$f(z)=\sum_{t=1}^{n} a_t/t^z$ ($z=x+iy$) を有限通常ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t $t=1,2,3,\cdots$ を任意の実数とするとき、次式が成り立つ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t}{t^c}(-\log t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

例 $a_t=(-1)^{t-1}t$, $n=2$

有限通常ディリクレ級数は

$$f(z)=\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^z}\qquad\left(=\frac{1}{1^z}-\frac{2}{2^z}=1-2^{1-z}\right)$$

実部・虚部別テイラー級数は

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^c}(-\log t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^c}(-\log t)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^c}(-\log t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

2024.03.22

河野 和
広島市

宇宙人の数学